УДК. 517.9.928

Сулайманова М.
Жалал-Абадский государственный университет

ПОГРАНИЧНЫЕ ЛИНИИ, РЕГУЛЯРНЫЕ И СИНГУЛЯРНЫЕ ОБЛАСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В данной работе доказывается существования пограничных линий (ПЛ), регулярная и сингулярная области (РО, СО) для решения нелинейного сингулярно возмущенного уравнения первого порядка .

In the given work is carried existence of boundary-layer lines (BLL), singular and regular domains (SD,RD) for solving singularly perturbed equations of the first order.

Пусть рассматривается задача

$$\varepsilon\dot{z}(t,\varepsilon)=a(t)z(t,\varepsilon)+\varepsilon g(t,z(t,\varepsilon)) \qquad (1)$$

$$z(t_0,\varepsilon)=z^0\text{ - const}\in C, \qquad (2)$$

где $0<\varepsilon$ - малый параметр, $t\in\Omega\subset C$ - комплексная плоскость, Ω – односвязная область; $Q(\Omega)$ – пространство аналитической функции в области Ω, $z(t,\varepsilon)$ - скалярная функция.

Пусть:

U1. $a(t)\in Q(\Omega)$; $\forall t\in\Omega: a(t)\neq 0,\ F(t)=\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds$, $\operatorname{Re}F(t)=F_1(t_1,t_2)$;

$\dfrac{\partial F_1}{\partial t_2}\neq 0$ и $F_1(t_1,t_2)=0,\Rightarrow\ t_2=\varphi(t_1)$;

U2. $g(t,z)\in Q(\Omega_0)$, $\Omega_0=\{(z,t): t\in\Omega, |z|\leq\delta\}$, где $0<\delta$ - некоторая постоянная.

$g(t,0)\neq 0$, $\left|g(t,\bar{z})-g(t,\bar{\bar{z}})\right|\leq L\left|\bar{z}-\bar{\bar{z}}\right|$;

Определение. Множество $\{(t_1;t_2)\in\Omega: \operatorname{Re}F(t)=F_1(t_1,t_2)=const\}$ называется линией уровня $F_1(t_1,t_2)$.

В [1] даны определения пограничных линий (ПЛ), регулярных и сингулярных областей (РО, СО) и доказаны существования ПЛ, РО и СО для линейного уравнения первого порядка.

В данной работе проводится оценки решения задачи (1)-(2) в $Q(\Omega)$ и доказывается существования ПЛ, РО и СО.

Справедлива следующая теорема. Доказательство теоремы проводится с применением метода последовательных приближений [3].

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия U1-U2, тогда

1) существует единственное решение задачи (1)-(2) в Ω и справедлива оценка

$$|z(t,\varepsilon)|\leq\left|z^0\right|+M\varepsilon, \qquad (3)$$

2) для этого решения существуют ПЛ, РО и СО в Ω.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задачу (1)-(2) заменим следующим

$$z(t,\varepsilon)=z^0e^{\frac{1}{\varepsilon}F(t)}+\int\limits_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}g(\tau,z)d\tau\cdot \qquad (4)$$

Применим метод последовательных приближений

$$z_0(t,\varepsilon)=0$$

$$z_m(t,\varepsilon)=z^0e^{\frac{1}{\varepsilon}F(t)}+\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}g(\tau,z_{m-1}(\tau,\varepsilon))d\tau,\ m=1,2,...$$

$\forall(t_1,t_2)\in\Omega_0:F_1(t_1,t_2)=0$ и Ω_0 разбивает Ω на части Ω_1 и Ω_2. Оценим первое приближение

$$z_1(t,\varepsilon)=z^0e^{\frac{1}{\varepsilon}F(t)}+\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}g(\tau,0)d\tau\cdot$$

Пусть $t\in\Omega_1$. Выберем путь интегрирования для $z_1(t,\varepsilon)$. Путь состоит из части линии Ω_0, соединяющей точки $(t_{01};t_{02}),(t_1;\bar{t}_2)\in\Omega_0$ и отрезка, соединяющей точки $(t_1;\bar{t}_2),(t_1,t_2)\in\Omega_1$. Согласно условиям U1 и U2, соответственно от $F_1(t_1,t_2)=0$ определяется $t_2=\varphi(t_1)$ и $g(t,0)\neq 0$. Полагая, что $t=t_1+it_2,\tau=\tau_1+i\tau_2$, $g(t,0)=g(t)$, $t_0=t_{01}+it_{02}$, $t_{01}\le t_1\le T_{01}$, где $t_1,t_2,\tau_1,\tau_2,t_{01},t_{02}$ - действительные переменные. Можем написать

$$z_1(t,\varepsilon)=z^0e^{\frac{i}{\varepsilon}F_2(t_1,t_2)}+\int_{t_{01}}^{t_1}e^{\frac{i}{\varepsilon}[F_2(t_1,t_2)-F_2(\tau_1,\varphi_1(\tau_1))]}g_1(\tau_1+i\varphi(\tau_1))(1+i\dot{\varphi}(\tau_1))d\tau_1+$$
$$+\int_{\bar{t}_2}^{t_2}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F_1(t_1,t_2)-F_1(t_1,\tau_2)]}g_1(t_1+i\tau_2))id\tau_2.$$

Обозначая

$$g_1(\tau_1+i\varphi(t))(1+i\dot{\varphi}(t))=\varphi_0(t)\in Q([t_{01},T_{01}]),$$
$$F_2(\tau_1,\varphi(\tau_1))=F_0(\tau_1)$$

и произведя интегрирования по частям в первом интеграле, применяя теорему о конечных приращениях ко второму интегралу, получим

$$z_1(t,\varepsilon)=z^0e^{\frac{i}{\varepsilon}F_2(t_1,t_2)}-\varepsilon\frac{\varphi_0(t_1)}{iF'(t_1)}+\varepsilon\frac{\varphi_0(t_{01})}{iF'(t_{01})}e^{\frac{i}{\varepsilon}[F_2(t_1,t_2)-F_0(t_{01})]}+$$
$$+\frac{\varepsilon}{i}e^{\frac{i}{\varepsilon}F_2(t_1,t_2)}\int_{t_{01}}^{t_1}\frac{\varphi_0'F_0'-\varphi_0F_0''}{(F_0')^2}e^{-\frac{i}{\varepsilon}F_0(\tau)}d\tau_1+\int_{\bar{t}_2}^{t_2}e^{-\frac{q}{\varepsilon}[t_2-\tau_2]}g_1(t_1+i\tau_2))id\tau_2.$$

Оценим $z_1(t,\varepsilon)$.

$$|z_1(t,\varepsilon)|\le\left|z^0e^{\frac{i}{\varepsilon}F_2(t_1,t_2)}\right|+\varepsilon\left|-\frac{\varphi_0(t_1)}{iF'(t_1)}\right|+\varepsilon\left|\frac{\varphi_0(t_{01})}{iF'(t_{01})}e^{\frac{i}{\varepsilon}[F_2(t_1,t_2)-F_0(t_{01})]}\right|+$$
$$+\varepsilon\left|\frac{1}{i}e^{\frac{i}{\varepsilon}F_2(t_1,t_2)}\int_{t_{01}}^{t_1}\frac{\varphi_0'F_0'-\varphi_0F_0''}{(F_0')^2}e^{-\frac{i}{\varepsilon}F_0(\tau_1)}d\tau_1\right|+\left|\int_{\bar{t}_2}^{t_2}e^{-\frac{q}{\varepsilon}[t_2-\tau_2]}g_1(t_1+i\tau_2))id\tau_2\right|\le$$
$$\le\left|z^0\right|+\varepsilon(m_1+m_2+m_3+m_4)=\left|z^0\right|+C\varepsilon.$$

$$|z_1(t,\varepsilon)|\le\left|z^0\right|+C\varepsilon,\ \text{где}\ C=m_1+m_2+m_3+m_4.$$

Сначала докажем ограниченность последовательных приближений. Предположим, что

$$|z_m(t,\varepsilon)|\le\left|z^0\right|+a_m(\varepsilon)\varepsilon, \qquad (5)$$

где $a_m(\varepsilon)$ - некоторая положительная функция от ε. Оценка (5) верна при $m=1$:

$$|z_1(t,\varepsilon)|\le\left|z^0\right|+a_1(\varepsilon)\varepsilon,\ \text{где}\ a_1(\varepsilon)=C.$$

Докажем для $m+1$:

$$|z_{m+1}(t,\varepsilon)|=\left|z^0\right|+\left|\int_{t_0}^{t}e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}g(\tau,z_m(\tau,\varepsilon))d\tau\right|\cdot$$

Из условии U2, учитывая, что

$$|g(\tau, z_m(\tau,\varepsilon))| \le L|z_m(\tau,\varepsilon)| \le L\left(|z^0| + a_m(\varepsilon)\varepsilon\right) = L|z^0| + La_m(\varepsilon)\varepsilon,$$

получим

$$|z_{m+1}(t,\varepsilon)| \le |z^0| + \varepsilon\left(L|z^0| + La_m(\varepsilon)\varepsilon\right) = |z^0| + a_{m+1}(\varepsilon)\varepsilon,$$

где $a_{m+1}(\varepsilon) = L|z^0| + La_m(\varepsilon)\varepsilon$.

Теперь докажем сходимость последовательных приближений. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}(z_{m+1} - z_m) \text{ и } z_{m+1} = \sum_{k=0}^{m}(z_{k+1} - z_k).$$

Тогда

$$|z_{m+1} - z_m| \le \left|\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}|g(\tau,z_m) - g(\tau,z_{m-1})|d\tau\right|.$$

При $m = 1$, получим

$$|z_2 - z_1| \le \left|\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}|g(\tau,z_1) - g(\tau,0)|d\tau\right| \le L|z_1|\varepsilon \le |z_1|L\varepsilon,$$

$$|z_3 - z_2| \le \left|\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}|g(\tau,z_2) - g(\tau,z_1)|d\tau\right| \le L|z_2 - z_1|\varepsilon \le |z_1|(L\varepsilon)^2,$$

. . . .

$$|z_{m+1} - z_m| \le \left|\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)]}|g(\tau,z_m) - g(\tau,z_{m-1})|d\tau\right| \le L|z_m - z_{m-1}|\varepsilon \le |z_1|(L\varepsilon)^m.$$

$$|z_{m+1} - z_m| \le |z_1|(L\varepsilon)^m.$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon < \dfrac{1}{L}$, последовательность функций $\{z_m(t,\varepsilon)\}$ в Ω_1 равномерно сходится к некоторой функции $z(t,\varepsilon) \in Q(\Omega_1)$.

Далее рассмотрим область Ω_2. Решение задачи (1)-(2) неограниченно в Ω_2. Докажем методом от противного. Пусть решение задачи (1)-(2) ограничено и $z \in \Omega_2$.

$$|z(t,\varepsilon)| \ge \left||z_1| - \left|\int_{t_0}^{t} e^{\frac{1}{\varepsilon}[F(t)-F(\tau)}|g(t,z) - g(\tau,0)|d\tau\right|\right| \ge$$

$$\ge \left||z_1| - e^{-\frac{1}{\varepsilon}F(t_1,t_2]}L\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{1}{\varepsilon}F(\tau_1,\tau_2)}|z|d\tau\right| \ge C_2 e^{-\frac{1}{\varepsilon}F(t_1,t_2]} \to \infty.$$

Решение неограниченно. Теорема доказана. Из доказанной теоремы следует, что Ω_0 - пограничная линия, Ω_1 регулярная и Ω_2 сингулярная области [1].

Литература:

1. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М. Р. Явления погранслойных линий и асимптотика решения сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. //Вестник Ош ГУ, Серия естес. наук, спец. выпуск. - Ош, 2013. - С. 227-231.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексных переменных. - Москва: Наука, 1973. - 739 с.

3. Бельман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – Москва: Изд. Иностранной литературы, 1954. - 215 с.