УДК 532.546

Байболотов Б.А., Исабеков К.А.

ИГУ им. К.Тыныстанова

РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТОВЫХ ВОД

Рассматривается гидрогеологическая задача одномерного уравнения Буссинеска, которая решается прикладной программой Maple 9.5.

Consider specific hydrogeological problem ie one-dimensional Bossiness' equation, which is solved today, the most common application Maple 9.5.

Одной из проблем современной науки является разработка и внедрение в практику методов исследования функционирования сложных систем. К классу сложных систем относятся технологические, производственные, энергетические комплексы, системы автоматизации управления и другие объекты. Моделирование является одним из наиболее мощных средств исследования подобных систем на сегодняшний день.

Моделирование – один из наиболее распространенных способов изучения различных процессов и явлений. В настоящее время известны и широко используются в научных исследованиях и инженерной практике различные типы моделей и многочисленные методы моделирования. Одним из важнейших видов моделирования является математическое моделирование – способ исследования процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими соотношениями. Методы, основанные на применении аналогий, в ряде случаев оказываются весьма плодотворными при решении задач.

В последние полтора десятка лет возникло и получило бурное развитие новое фундаментальное научное направление — *компьютерная математика*, которое зародилось на стыке математики и информатики. Первыми серьезными средствами для автоматизированного выполнения массовых научно-технических расчетов стали программируемые микрокалькуляторы. С появлением персональных компьютеров их стали широко применять для численных расчетов, программируемых на языках высокого уровня, например, Фортране, Си, Бейсике или Форте. Однако все большее распространение получают аналитические (символьные) вычисления, обладающие гораздо большей общностью, чем численные вычисления.

Предвестником появления систем компьютерной математики стали специализированные программы для математических численных расчетов, работающие в среде Microsoft MS-DOS. Это Eureka, Mercury, Mathcad и MATLAB под операционную систему MS-DOS. Казалось бы это было совсем недавно — в начале 90-х годов ушедшего столетия. Вслед за этим, на основе достижений компьютерной математики, были разработаны новейшие программные системы *символьной математики* или *компьютерной алгебры*(СКА). Среди них наибольшую известность получили системы Mathcad под Windows , Derive. Mathematica и Maple и др.

Хотя множество (и даже большинство) математических задач решается с помощью СКМ без программирования, это не означает отказ от программирования вообще. Напротив, все СКМ, в частности Maple 9.5/10, имеют довольно развитый язык программирования, содержащий типовые средства процедурного программирования, например управляющие структуры, циклы, операторы ввода/вывода и т.д.

В последнее время такие языки включают в себя средства визуально-ориентированного программировании пользовательского интерфейса — в Maple 9.5/10 эти средства названы *маплетами* (maplets). Есть одно весьма важное обстоятельство в современной реализации этих средств — многие маплеты обеспечивают *пошаговое решение* математических задач с демонстрацией промежуточных результатов вычислений. Это именно то, что давно требовалось от СКМ в образовании и чего они не давали. Теперь подобное решение задач стало возможным и существенно повышает значение систем Maple 9.5/10 в образовании [6].

Рассмотрим конкретную физическую задачу. Во многих случаях течение грунтовых вод можно считать одномерным, например, течение к рекам или водоемам в межгорных впадинах; течение к скважинам; течение к горизонтальным дренам при проведении промывок и т.д. Различные прогнозные задачи мелиоративной гидрогеологии в таких случаях сводятся к решению одномерного уравнения Буссинеска [4]

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+f(x,t),\quad 0<x<L,\ t>0 \qquad (1)$$

с начальным

$$H(x,0)=H_0(x),\quad 0<x<L \qquad (2)$$

и краевыми

$$\gamma_1 k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}-\gamma_2 AH=-\gamma_3 B,\quad x\in\Gamma,\ t>0 \qquad (3)$$

условиями, где Γ – граница области, т.е. множество точек, где имеются возмущающие факторы. Сюда относятся также точки $x = 0$ и $x = L$; γ_1, γ_2 и γ_3 – числа, равные нулю или единице; $A = const$ параметр, характеризующий несовершенство дрены, значение которого определяется по режимным наблюдениям или вычисляется по экспериментальным формулам; $H_{\partial p}$ – уровень воды в дрене. При $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ имеем условие в несовершенной дрене; при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$ – условие I рода, а при $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, $\gamma_2 = 0$ – условие II рода.

В задаче (1) – (3) приняты следующие обозначения:

$H(x,t)$ – уровень грунтовых вод (УГВ) в точке x в момент времени t*(м)*; $k(x)$ – коэффициент фильтрации (размерность – *м/сут*); $b(x)$ – отметка водоупора *(м)*; $\mu(x)$ – коэффициент водоотдачи или недостатка насыщения; $f(x,t)$ – инфильтрация *(м/сут)*; $H_0(x)$ – начальные *УГВ* (*м*); L – длина области фильтрации (*м*); x – пространственная, t – временная координаты.

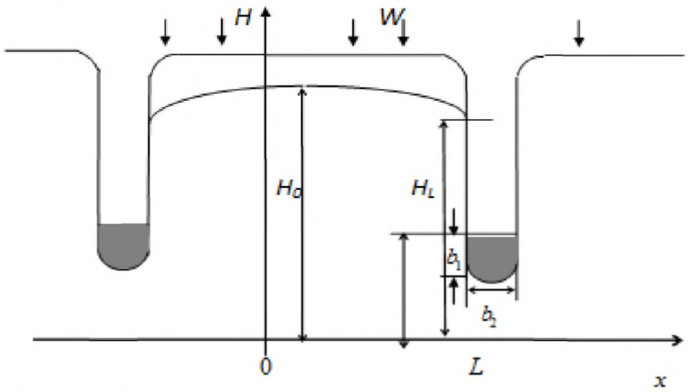
Рассмотрим задачу без t. Тогда имеем

$$-\frac{d}{dx}\left(T\frac{dH}{dx}\right)+Q(x)H=f(x), \qquad a<x<b, \tag{4}$$

С краевыми условиями

$$\begin{aligned} &-TdH/dx+A_0H=B_0, \qquad x=a,\\ &TdH/dx+A_nH=B_n, \qquad x=b, \end{aligned} \tag{5}$$

f(x), Q(x), b(x) – в отрезке $[a,b]$ функции непрерывны и непрерывна дифференцируемы. *H(x)* – искомая функция.



Задача решается с помощью прикладной программы Maple 9.5.

Например: даны значении функции $T(x)=x^2$, $q(x)=1$, $f(x)=-5x^2$; с краевыми условиями $H(0)=0$, $H'(3)=6$

Запускаем программу и в новом окне пишем

```
> restart;
> de1:=T(x)*diff(H(x),x);
```

$$de1 := T(x)\left(\frac{d}{dx}H(x)\right)$$

```
> de:=-diff(de1,x)+q(x)*H(x)=f(x);
```

Здесь описывается уравнение (4)

$$de := -\left(\frac{d}{dx}T(x)\right)\left(\frac{d}{dx}H(x)\right)-T(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}H(x)\right)+q(x)\,H(x)=f(x)$$

Задаем значений заданных функций

```
> q(x):=1;
```

$q(x) := 1$

```
> T(x):=x^2;
```

$T(x) := x^2$

> f(x):=-5*x^2;

$f(x) := -5\,x^2$

> de;

(4) уравнение принимает вид

$$-2\,x\left(\frac{d}{dx}H(x)\right) - x^2\left(\frac{d^2}{dx^2}H(x)\right) + H(x) = -5\,x^2$$

> sol:=dsolve(de);

Решим задачу с помощью оператора *sol.*

$$sol := H(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)}\_C2 + x^{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\right)}\_C1 + x^2$$

Задаем краевые условия $H(0)=0, \quad H'(3)=6$

> sol:=dsolve({de,D(H)(0)=0,D(H)(3)=6}, H(x));

$sol := H(x) = x^2$

,

т.е. решение находится в явном виде. Далее можно с помощью этого же документа изменит исходные данные, и получит разные результаты *H(x)*.

Литература:

1. Прохоров Г.В., Колбеев В.В., Желнов К.И., Леденев М.А. Математический пакет Maple V Release 4. – Калуга: Облиздат, 1998. - 195 с.
2. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. - М., 2000. - 526 с.
3. Дьяконов В.П. Mapl 6. Учебный курс. - СПб.: Питер, 2001. - 607 с.
4. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977. -664 с.
5. Самарский А.А. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. //Вестн. АН СССР. – 1979, -№ 5. – С. 38-49.
6. Дьяконов В. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. - М.: Солон-Р, 2006. - 458 с.