УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БОКСА – УИЛСОНА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА МРАМОРА (ЧАСТЬ 2)

К.А. Герман

Приведены результаты обработки серии экспериментов с использованием метода Бокса – Уилсона. Получены статические математические модели физико-механических процессов. Обозначены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: планирование эксперимента; метод Бокса – Уилсона; разрушение мрамора; трещина.

BOX-WILSON METHOD IMPLEMENTATION TO STUDY OF ELECTRIC FIELD INFLUENCE ON MARBLE DEFORMATION BEHAVIOR (PART 2)

K.A. Herman

In work processing and the analysis of results of a series of experiments is made. The methods Box - Wilson was for this purpose used. This method allows to receive static mathematical models of physical-mechanical processes. Directions of the further researches are designated.

Key words: design of experiments; method's Box-Wilso; disintegration marble; crack.

Регрессионный анализ, как всякий статистический метод, применим при определенных предположениях и постулатах [1, 2].

Первый постулат. Параметр оптимизации является случайной величиной с нормальным законом распределения. Дисперсия воспроизводимости – одна из характеристик этого закона распределения.

Второй постулат. Дисперсия не зависит от абсолютной величины *у.* Выполнимость этого постулата проверяется с помощью критериев однородности дисперсий в разных точках факторного пространства. Нарушение этого постулата недопустимо. Если однородность дисперсий все же отсутствует, то необходимо такое преобразование у, которое делает дисперсии однородными. Довольно часто помогает логарифмическое преобразование, с которого обычно начинают поиски.

Третий постулат. Значения факторов являются неслучайными величинами. Это утверждение практически означает, что установление каждого фактора на заданный уровень и его поддержание существенно точнее, чем ошибка воспроизводимости. Нарушение этого постулата приводит к трудностям при реализации матрицы планирования.

Четвертый постулат, налагающий ограничения на взаимосвязь между значениями факторов. Он выполняется автоматически в силу ортогональности матрицы планирования.

Каждый эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности экспериментального материала. Постановка повторных (или параллельных) опытов не дает полностью совпадающих результатов, так как всегда существует ошибка опыта (ошибка воспроизводимости). Для сравнения данных их необходимо проверить по различным критериям. В таблице 1 приведены исходные данные и расчётные значения.

Предполагается, что распределение признака происходит по нормальному закону. Если найденное значение относительного отклонения для любого i-го измерения не превосходит по абсолютной величине табличного значения r для выбранного уровня значимости и числа степеней свободы $f = n - 2$, то можно принять гипотезу об однородности результатов наблюдений (Критерий Стьюдента) [3].

Таблица 1 – Статистическая обработка данных

№ п/п	Опытные данные (Модуль Юнга)			Среднее	Отклонение			Квадрат отклонения			Стандартное отклонение	Относительное отклонение			Дисперсия
	y_{i1}	y_{i2}	y_{i3}	$\overline{y}$	Δy_{i1}	Δy_{i2}	Δy_{i3}	$(\Delta y_{i1})^2$	$(\Delta y_{i2})^2$	$(\Delta y_{i3})^2$	$s_{\{y\}}$	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	$(s_{\{y\}})^2$
1	1,710411	1,387035	1,045	1,380815	-0,3296	-0,00622	0,335815	0,108633	3,86855E-05	0,112772	0,33274895	-1,213133	-0,02289	1,2360309	0,11072186
2	0,370851	0,3605	0,3804	0,370584	-0,00027	0,010084	-0,00982	7,15E-08	0,00010168	9,64E-05	0,009952693	-0,032897139	1,240862035	-1,207964896	9,9056E-05
3	0,337051	0,3279	0,3397	0,334884	-0,00217	0,006984	-0,00482	4,7E-06	4,87716E-05	2,32E-05	0,006191365	-0,428731046	1,38147403	-0,952742984	3,8333E-05
4	0,42877	0,4367	0,42655	0,430673	0,001903	-0,00603	0,004123	3,62E-06	3,63207E-05	1,7E-05	0,005335975	0,43686441	-1,38327645	0,94641204	2,8473E-05
5	0,413904	0,39957	0,41643	0,409968	-0,00394	0,010398	-0,00646	1,55E-05	0,000108118	4,18E-05	0,009093073	-0,530139365	1,400505366	-0,870366	8,2684E-05
6	0,405233	0,39785	0,4105	0,404528	-0,00071	0,006678	-0,00597	4,97E-07	4,45912E-05	3,57E-05	0,006354427	-0,13594512	1,287045648	-1,151100528	4,0379E-05
7	0,376189	0,38671	0,369178	0,377359	0,00117	-0,00935	0,008181	1,37E-06	8,74412E-05	6,69E-05	0,008824366	0,162385778	-1,297837103	1,135451325	7,7869E-05
8	0,36026	0,34965	0,36582	0,358577	-0,00168	0,008927	-0,00724	2,83E-06	7,96873E-05	5,25E-05	0,008215412	-0,250982348	1,330794412	-1,079812064	6,7493E-05

$\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ среднее; $(\Delta y)^2 = (\overline{y} - y_i)^2$ – квадрат отклонения;

$s_{\{y\}} = \sqrt[2]{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (\overline{y} - y_i)^2}{n-1}}$ – стандартное отклонение;

$r_i = \dfrac{y_i - \overline{y}}{s_{\{y\}}\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}}$ – относительное отклонение;

$(s_{\{y\}})^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}{n-1}$ – дисперсия.

$$r_i = \frac{y_i - \overline{y}}{s_{\{y\}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$ – – относительное отклонение.

При больших значениях числа степеней свободы *r*-распределение весьма близко к нормальному распределению. В этих случаях для проверки однородности наблюдений можно пользоваться трехсигмовым критерием, полагая, что выборочная дисперсия хорошо характеризует генеральную дисперсию. Если ни одно из отклонений при большом числе измерений не превосходит по абсолютной величине, то допустимо считать все наблюдения совместимыми. Критерий r_i применим для оценки любого *i*-го наблюдения. Для оценки специально выбранных наблюдений, минимальных или максимальных, используется распределение максимального отклонения:

$$r_{\max} = \frac{y_{\max} - \overline{y}}{s_{\{y\}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}} \text{ и } r_{\min} = \frac{\overline{y} - y_{\min}}{s_{\{y\}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}}.$$

Коэффициент $r_{\max}$ ($r_{\min}$) для уровня значимости 0,1 и 0,05 и числа степеней свободы 1, равен соответственно 1,414 и 1,412 [3].

Если рассчитанное значение $r_{\max}$ ($r_{\min}$) превышает табличное, то оцениваемый результат может быть отнесен к грубым и не включаться в расчет.

Проверка однородности дисперсий производится с помощью различных статистических критериев. Простейшим из них является критерий Фишера, предназначенный для сравнения двух дисперсий. Критерий Фишера (F-критерий) представляет собой отношение большей дисперсии к меньшей. Полученная величина сравнивается с табличной величиной F-критерия:

$$(s_{\{y\}})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1}.$$

Если полученное значение дисперсионного отношения больше приведенного в таблице для соответствующих степеней свободы и выбранного уровня значимости, это означает, что дисперсии значимо отличаются друг от друга, т. е. что они неоднородны.

Табличная величина для нашего эксперимента F-критерия F < = 5,1 [1].

Если сравниваемое количество дисперсии больше двух и одна дисперсия значительно превышает остальные, можно воспользоваться критерием Кохрена. Этот критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов. При этом подсчитывается дисперсия в каждой горизонтальной строке матрицы

$$(s_{\{y\}})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n-1},$$

а затем из всех дисперсий находится наибольшая $(s_{\{y\}})^2$, которая делится на сумму всех дисперсий. Критерий Кохрена – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий, табличное значение критерия Кохрена для проведенных опытов G=0, 68 [1].

При обработке опытных данных будем использовать математические модели объекта исследования. Под математической моделью мы понимаем уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде можно записать так: $y = F(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$, где F – функция отклика.

Первоначально, пока неизвестно влияние (числовое значение), выберем функцию отклика в виде полинома первой степени:

$$F(x_1 x_2 x_3) = B_0 + B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_1 x_2 + B_5 x_1 x_3 + \\ + B_6 x_2 x_3 \quad B_i (i = 0\text{–}7).$$

Для этого составляются кодированные таблицы 2 и 3 для вычисления коэффициентов регрессии, методика приведена в [1, 4].

Полное число всех возможных эффектов, включая B_0, – линейные эффекты и взаимодействия всех порядков, – равно числу опытов полного факторного эксперимента. Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний, где *к* – число факторов; *m* – число элементов во взаимодействии.

Рассмотрим физический смысл эффекта взаимодействия на следующем примере. Пусть на процесс влияют два фактора: напряжение тока и скважность. Предположим, что напряжение тока связано с количеством закаченной энергии в образец, скважность влияет на переходные процессы в материале. Совмещение влияния этих факторов, есть проявление эффекта взаимодействия.

Коэффициенты B_i учитывают влияние соответствующих факторов (см. таблицу 2).

Подставляя найденные коэффициенты в функцию отклика, получим:

$$F(x) = 0{,}508423 + 0{,}102791x_1 + 0{,}131434x_2 - 0{,}1293x_3 \\ + 0{,}13305x_1x_2 - 0{,}11733x_1x_3 - 0{,}1219x_2x_3.$$

Адекватная линейная модель, которой мы теперь располагаем, имеет вид полинома первой степени. Коэффициенты полинома являются частными производными функции отклика по соответствующим переменным. Их геометрический смысл – тангенсы углов наклона гиперплоскости

Таблица 2 – Кодированная таблица влияния факторов

x0	x1	x2	x3	x1x2	x1x3	x2x3	x1x2x3
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1

Обозначение фактора:

x0 – учитывающий все физико-механические параметры; x1– напряжение (амплитуда) тока; x2 – частота импульсов; x3 – скважность импульсов; x1x2 – комбинация влияния напряжения и частоты; x1x3 – комбинация влияния напряжения и скважности; x2x3 – комбинация влияния частоты и скважности; x1x2x3 – комбинация влияния напряжения и частоты, а также скважности.

Таблица 3 – Вычисление коэффициентов регрессии

Среднее	B0	B1	B2	B3	B4(12)	B5(13)	B6(23)	B7(123)
1,380815	1,380815	1,380815	1,380815	-1,38082	1,380815	-1,38082	-1,38082	-1,38082
0,370584	0,370584	0,370584	0,370584	0,370584	0,370584	0,370584	0,370584	0,370584
0,334884	0,334884	0,334884	-0,33488	-0,33488	-0,33488	-0,33488	0,334884	-0,33488
0,430673	0,430673	-0,43067	0,430673	-0,43067	-0,43067	0,430673	0,430673	0,430673
0,409968	0,409968	-0,40997	-0,40997	0,409968	0,409968	-0,40997	0,409968	-0,40997
0,404528	0,404528	-0,40453	-0,40453	-0,40453	0,404528	0,404528	-0,40453	0,404528
0,377359	0,377359	-0,37736	0,377359	0,377359	-0,37736	-0,37736	-0,37736	-0,37736
0,358577	0,358577	0,358577	-0,35858	0,358577	-0,35858	0,358577	-0,35858	0,358577
	0,508423	0,102791	0,131434	-0,1293	0,13305	-0,11733	-0,1219	-0,11733

к соответствующей оси. Больший по абсолютной величине коэффициент соответствует большему углу наклона и, следовательно, более существенному изменению параметра оптимизации при изменении данного фактора.

Задача интерпретации решается в несколько этапов.

Первый этап состоит в следующем. Устанавливается, в какой мере каждый из факторов влияет на параметр оптимизации. Величина коэффициента регрессии – количественная мера этого влияния. Чем больше коэффициент, тем сильнее влияет фактор. О характере влияния факторов говорят знаки коэффициентов. Знак плюс свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора растет величина параметра оптимизации, а при знаке минус – убывает.

Расположим совокупность факторов в ряд по силе их влияния на параметр оптимизации. В первом приближении рассмотрим влияние частоты импульсов и скважности. Данные факторы явно не связаны между собой. Абсолютные величины примерно равны между собой и составляют соответственно 0,131 – частота, и 0,129 – скважность. Интерпретируя данные коэффициенты можно высказать следующие предположение: частота воздействия влияет на историю развития дефектов (дислокации, микротрещины, а также заполнения дефектов Шотки), а изменение скважности влияет на величину усилий, приводящих к раскрытию и залеживанию указанных выше дефектов.

Интересно рассмотрение комбинации факторов частоты импульсов и скважности в крайних случаях: постоянный ток и отсутствие воздействия электрическим током. Согласно плану эксперимента, нагружение в крайнем положении (напряжение 50 V, частота $20 \cdot 10^3$ Гц, скважность 2) приводит к увеличению исследуемого параметра модуля Юнга, это может быть связанно с ошибкой измерений или в данном режиме проявляются переходные процессы (для этого требуются дополнительные исследования).

Теперь мы получили основу для перехода к следующему этапу.

Теоретические представления имеют обычно общий характер. Кроме того, априорная информация часто основывается на однофакторных зависимостях. При переходе к многофакторному пространству ситуация может изменяться. Поэтому должна быть уверенность, что эксперимент проведен корректно. Достоверность полученных данных проверяется с помощью статистических гипотез. Тогда для преодоления противоречия можно выдвигать различные модели и проверять их экспериментально.

Следующий этап интерпретации сводится к проверке гипотез о механизме явлений, и выдвижению новых гипотез. Получение информации о механизме явлений не является основной, но возможность такого рода следует использовать. Данное исследование посвящено эффектам взаимодействия влияющих факторов.

Литература

1. *Адлер Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. М.: Наука, 1976. 280 с.
2. *Румшиский Л.З.* Математическая обработка результатов эксперимента / Л.З. Румшиский. М.: Высшая школа, 1971. 192 с.
3. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. М.: Высшая школа, 2003. 479 с.
4. *Маркова М.Е.* Планирование эксперимента в условиях неоднородности / М.Е. Маркова, А.В. Лисенков. М.: Наука,1973. 220 с.