О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

АГЫБАЕВ А.С.
Кыргызский национальный университет Ж. Баласагына

УДК-515.12

Напомним [2], что равномерное покрытие α равномерного пространства (X,U) называется счетно звездным (сильно счетно звездным) равномерным покрытием, если $|St(\alpha,x)| \leq \aleph_0$ для любого $x \in X$ ($|St(\alpha,A)| \leq \aleph_0$ для любого $A \in \alpha$), где $St(\alpha,x) = \{A \in \alpha : A \ni x\}$ ($St(\alpha,A) = \{A' \in \alpha : A \cap A' \neq \varnothing\}$).

Равномерное пространство (X,U) называется счетно звездным [2], если равномерность U имеет базу, состоящей из счетно звездных покрытий. Равномерное пространство (X,U) называется сильно счетно звездным [2], если равномерность U имеет базу, состоящей из сильно счетно звездных покрытий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется счетно звездным, если отображение f имеет базу U_f, состоящую из счетно звездных покрытий.

Напомним [3], что отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется равномерно I -линделёфовым, если для любого равномерного покрытия α пространства (X,U) существуют такие равномерное покрытие β пространства (Y,V) и счетное равномерное покрытие γ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$.

Всякое равномерно I -линделёфово отображение является счетно звездным отображением, обратное утверждение вообще говоря не верно. Действительно, пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение дискретного равномерного пространства (X,U) несчетного веса в любое другое равномерное пространство (Y,V). Тогда отображение f является счетно звездным отображением, базой которого служит система $U_f = \{\lambda\}$, $\lambda = \{\{x\} : x \in X\}$, но очевидно, оно не является равномерно I -линделёфовым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякое равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ счетно звездного пространства (X,U) в любое равномерное пространство (Y,V) является счетно звездным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и (X,U) - счетно звездное пространство. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие пространства (X,U). Тогда существует такое счетно звездное равномерное покрытие $\gamma \in U$ пространства (X,U), что $\gamma \succ \alpha$. Очевидно $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ для любого равномерного покрытия β пространства (Y,V). Следовательно, f - является счетно звездным отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $f:(X,U) \to Y$ является счетно звездным отображением равномерного пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y = \{y\}$, то равномерное пространство (X,U) является счетно звездным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - счетно звездное отображение пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y = \{y\}$, а α - произвольное равномерное покрытие пространства (X,U). Тогда существуют такие равномерное покрытие β пространства

(Y,V) и счетно звездное покрытие $\gamma \in U_f$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. $\gamma \succ \alpha$, так как $f^{-1}\beta \wedge \gamma = \gamma$, где $f^{-1}\beta = \{X\}$. Следовательно, (X,U) является счетно звездным равномерным пространством.

ТЕОРЕМА 1. Если f и (Y,V) - счетно звездны, то (X,U) является счетно звездным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие пространства (X,U). Тогда найдутся такие равномерное покрытие β пространства (Y,V) и счетно звездное покрытие γ пространства (X,U), что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Так как (Y,V) является счетно звездным пространством, то существует такое счетно звездное покрытие λ пространства (Y,V) вписанное в равномерное покрытие β. Очевидно, что $f^{-1}\lambda \wedge \gamma \succ \alpha$. Легко видеть, что $f^{-1}\lambda \wedge \gamma$ является счетно звездным равномерным покрытием пространства (X,U). Следовательно, (X,U) является счетно звездным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется сильно счетно звездным, если отображение f имеет базу U_f, состоящую из сильно счетно звездных покрытий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $f:(X,U) \to Y$ является сильно счетно звездным отображение равномерного пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y = \{y\}$, то (X,U) является сильно счетно звездным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f - равномерно сильно счетно звездное отображение равномерного пространства (X,U) в одноточечное пространство $Y = \{y\}$. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие пространства (X,U). Тогда существуют такие равномерное покрытие $\beta \in V$ пространства (Y,V) и сильно счетно звездное равномерное покрытие $\gamma \in U_f$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Ясно, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma = \gamma$, где $f^{-1}\beta = \{X\}$. Следовательно, равномерное пространство (X,U) является равномерно сильно счетно звездным.

ТЕОРЕМА 2. Если f и (Y,V) - сильно счетно звездны, то (X,U) является сильно счетно звездным пространством. Обратно, если (X,U) является сильно счетно звездным пространством, то равномерно непрерывное отображение $f:(X,U) \to (Y,V)$ является сильно счетно звездным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное покрытие пространства (X,U). Тогда найдутся такие равномерное покрытие β пространства (Y,V) и сильно счетно звездное покрытие пространства $\gamma \in U_f$, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$. Так как (Y,V) является равномерно сильно счетно звездным пространством, то найдется такое сильно счетно звездное покрытие $\lambda \in V$ пространства (Y,V) вписанное в открытое покрытие β. Легко видеть, что $f^{-1}\lambda \wedge \gamma \succ \alpha$, а покрытие $f^{-1}\lambda \wedge \gamma$ является сильно счетно звездным покрытием пространства (X,U). Обратно, пусть $f:(X,U) \to (Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и (X,U) - сильно счетно звездное пространство. Пусть α - произвольное равномерное покрытие пространства (X,U). Тогда найдется такое сильно счетно звездное покрытие $\gamma \in U$, что $\gamma \succ \alpha$. Ясно, что $f^{-1}\beta \wedge \gamma \succ \alpha$ для любого равномерного покрытия $\beta \in V$. Следовательно, f - является сильно счетно звездным отображением.

ТЕОРЕМА 3. Равномерное пространство (X,U) является счетно звездным пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U) является образом некоторого нульмерного равномерного пространства (Y,V) при равномерно открытом отображении f таком, что подпространство $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ равномерного пространства (Y,V) равномерно I -линделёфово для каждого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть (X,U) - равномерно счетно звездное пространство, т.е. U имеет базу A, состоящей из счетно звездных равномерных покрытий. Ясно, что внутреннее пересечение любого конечного числа элементов из A снова является элементом A. Пусть $\alpha \in A$ - произвольное покрытие. Положим $X_\alpha = \{A : A \in \alpha\}$. Таким образом, мы получили множество, точками которого являются все элементы рассматриваемого покрытия. Пусть $\{\{A\}: A \in X_\alpha\} = \psi_{X_\alpha}$. Тогда множество всех покрытий U_a, в каждое из которых можно вписать покрытие ψ_{X_α}, является так называемой дискретной равномерностью. Далее каждое покрытие $\alpha \in A$ наделим этой дискретной равномерностью и рассмотрим произведение $\prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}$ равномерных пространств. Как всегда, для $\xi \in \prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}$ через ξ_α мы обозначим α-ю координату точки ξ . Назовем точку $\xi \in \prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}$ отмеченной, если множество $\cap\{A_\alpha : \alpha \in A\}$ состоит ровно из одной точки, обозначаемой через $\{x\}$. Рассмотрим подмножество $Y = \{\xi \in \prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}: \xi$ - отмеченная точка$\}$ пространства $\prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}$. Положим

$$O(A^\circ_{\alpha_1}, A^\circ_{\alpha_2},...,A^\circ_{\alpha_n}) = \{\xi \in Y : \xi = \{A_\alpha : \alpha \in A\}, A_{\alpha_i} = A^\circ_{\alpha_i}, i = 1,2,...,n\}.$$

Заметим, что $\lambda_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n} = \{O(A^\circ_{\alpha_1}, A^\circ_{\alpha_2},...,A^\circ_{\alpha_n}) : A^\circ_{\alpha_1} \in \alpha_1, A^\circ_{\alpha_2} \in \alpha_2,...,A^\circ_{\alpha_n} \in \alpha_n\}$ - дизъюнктное покрытие пространства (Y,V) и система $B = \{\lambda_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n} : \{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\} \subset A\}$ - база равномерности V индуцированной равномерности из $\prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}$. Каждой точке $\xi = \{A_\alpha : \alpha \in A\}$ поставим в соответствие такую единственную точку $x \in X$, что $\{x\} = \cap\{A_\alpha : \alpha \in A\}$. Таким образом определенное отображение, очевидно, является съюрективным. Отображение f является равномерно открытым, так как образ $\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}}\alpha_i$ каждого открытого равномерного покрытия $\lambda_{\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n}$ является равномерным покрытием. Легко видеть, что подпространство $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ является равномерно I -линделёфовым для каждого $x \in X$. Обратно, пусть f - такое равномерно открытое отображение нульмерного равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (X,U), что подпространство $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ является равномерно I -линделёфовым для каждого $x \in X$. По определению, пространство (Y,V) имеет базу, состоящую из дизъюнктных открытых равномерных покрытий. Тогда ее образ образует базу равномерного пространства (X,U). Легко видеть, что она состоит из счетно звездных покрытий.

ТЕОРЕМА 4. Равномерное пространство (X,U) имеет квазибазу Σ , состоящую из счетно звездных покрытий тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U) является образом некоторого нульмерного равномерного пространства (Y,V) при равномерно факторном отображении f таком, что подпространство $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ равномерного пространства (Y,V) равномерно I -линделёфово для каждого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть равномерное пространство (X,U) имеет квазибазу Σ, состоящей из счетно звездных покрытий. Через A обозначим множество всех внутренних пересечений $\overset{n}{\underset{i=1}{\wedge}}\alpha_i$ всевозможных конечных подсемейств $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}\subset\Sigma$. Очевидно, A является квазибазой равномерности U. Каждое покрытие $\alpha\in A$ наделим дискретной равномерностью и рассмотрим произведение $\prod\{(X_\alpha,U_\alpha):\alpha\in A\}$. Легко видеть, что отображение f нульмерного равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (X,U) равномерно факторно. Так как квазибаза A состоит из счетно звездных покрытий, то $|St(x,\alpha)|\leq\aleph_0$ для любых $\alpha\in A$. Очевидно, что $f^{-1}x=\prod\{St(x,\alpha):\alpha\in A\}$ является равномерно I-линделёфовым для каждого $x\in X$, как произведение дискретных равномерно I-линделёфовых пространств.

Достаточность. Пусть f - равномерно факторное отображение нульмерного равномерного пространства (Y,V) на равномерное пространство (X,U) и прообраз каждого $x\in X$ равномерно I-линделёфово. Равномерное пространство (Y,V) нульмерно, поэтому оно имеет базу A, состоящей из дизъюнктных покрытий. В силу факторности ее образ является квазибазой равномерного пространства (X,U). Так как след каждого дизъюнктного покрытия $\alpha\in A$ на $(f^{-1}x,V_{f^{-1}x})$ является равномерно I-линделёфовым, то fA состоит из счетно звездных покрытий.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990. - 172 с.
2. Борубаев А.А., Канетов Б.Э. О некоторых классах равномерных пространств // Изв. НАН КР. - 2012. - №3. - С. 102-105.
3. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек, 2013. - 160 с.
4. Келли Дж.Л. Общая топология. - М.: Наука, 1981. - 432 с.
5. Пасынков Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств. Отображения и функторы. - М., 1984. - С. 72-102.