НАСЛЕДСТВЕННЫЕ КАРДИНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ХАТТОРИ НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ И ПРОСТРАНСТВА СУПЕРРАСШИРЕНИЯ

БЕШИМОВ Р.Б., МУХАМАДИЕВ Ф.Г.

[1]*Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами,*

[2]*Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека*

УДК 512.15

1. Пусть X - топологическое T_1 -пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $\exp X$. Семейство B всех множеств вида

$$O\langle U_1,...,U_n\rangle = \left\{ F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i, F \cap U_i \neq \varnothing,\ i = 1,2,...,n \right\},$$ где $U_1,..., U_n$ - последовательность открытых подмножеств пространства X, порождает топологию на множестве $\exp X$. Эта топология называется топологией Виеториса. Множество $\exp X$ топологией Виеториса называется экспоненциальным или гиперпространством пространства X [1].

В работе [2] введено понятие допустимое продолжение топологических пространств. Напомним это определение.

Определеные 1.1. Пусть τ_1 и τ_2 - две топологии на множестве X. Говорят, что топология τ_2 на множестве X является допустимым продолжением относительно топологии τ_1, если выполнены следующие условия:

(i) $\tau_1 \subseteq \tau_2$;

(ii) τ_1 является π-базой для τ_2, т.е. для каждого непустого элемента $\mathrm{O} \in \tau_2$ существует элемент $V \in \tau_1$ такой, что $V \subset \mathrm{O}$.

Теорема 1.1. Пусть τ_1 и τ_2 - две топологии в T_1-пространстве X, τ_2 является допустимым продолжением относительно топологию τ_1. Тогда топология $\exp\tau_2$ также является допустимым продолжением относительно топологии $\exp\tau_1$ на гиперпространстве $\exp \mathrm{X}$.

Доказательство. Пусть $\tau_1 = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ - топология на X и $\tau_2 = \{V_\beta : \beta \in B\}$ - топология на X. Рассмотрим семейство $R_1 = \{W_\alpha : \alpha \in A\}$ всевозможных конечных объединений элементов τ_1. Пусть $P_\infty(R_1) = \{M \subset R_1 : |M| < \aleph_0\}$ - семейство всех конечных подсемейств семейства R_1. Рассмотрим семейство $R_2 = \{G_\beta : \beta \in B\}$ всевозможных конечных объединений элементов τ_2. Пусть $P_\infty(R_2) = \{M^{'} \subset R_2 : |M^{'}| < \aleph_0\}$ - семейство всех конечных подсемейств семейства R_2. Положим $O(M) = O\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle$, где $O\langle W_1, W_2, \ldots, W_n\rangle$ базисный элемент в $\exp\mathrm{X}$, где $W_i \in R_1$, $i = 1,2,...,n$. Пусть
$\exp\tau_1 = \{O\langle U_1, U_2,...,U_n\rangle : U_i \in \tau_1\}, i = 1,2,...,n$
и $\exp\tau_2 = \{O\langle V_1, V_2,...,V_k\rangle : V_j \in \tau_2\}, j = 1,2,...,k.$

Покажем, что $\exp\tau_1$, $\exp\tau_2$ удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 1.1.

Доказательство (i). Пусть $O\langle U_1, U_2,...,U_n\rangle$ - произвольный элемент из $\exp\tau_1$, где $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \tau_1$. По условию $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Отсюда имеем, что $U_1, U_2,..., U_n \in \tau_2$ тогда $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \in \exp\tau_2$ по определению топологии Виеториса на $\exp\mathrm{X}$.

(ii). Пусть $O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$ - произвольный элемент из $\exp\tau_2$, где $V_1, V_2, \ldots, V_k \in \tau_2$. Из π-базовости системы свойств τ_1 и определения 1.1 имеем, что существуют непустые элементы $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \tau_1$ что $U_1 \subset V_1, U_2 \subset V_2, \ldots, U_k \subset V_k$. Тогда $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_k\rangle \subset O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$. Действительно, пусть $F \in O\langle U_1, U_2, ..., U_k\rangle$ - произвольный элемент. Тогда $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ и $F \cap U_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \ldots, k$. Тем более $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ и $F \cap V_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \ldots, k$. Отсюда имеем $F \in O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$. Значит, $\exp\tau_1$ есть π-база для $\exp\tau_2$. Мы доказали, что топология $\exp\tau_2$ на $\exp X$ есть допустимое продолжение топологии $\exp\tau_1$. Теорема 1.1 доказана.

Пусть $O = O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ - непустой открытый базисный элемент гиперпространства $\exp X$. Под остовом базисного элемента O в X мы будем понимать класс $K(O) = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, где $O = \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ и обозначим через $K(O)$.

Теорема 1.2. Пусть τ_1 и τ_2 - две топологии на пространстве X. Если топология $\exp\tau_2$ есть допустимое продолжение топологию $\exp\tau_1$ на пространстве $\exp X$, тогда топология τ_2 также является допустимым продолжением топологии τ_1.

Доказательство. Пусть $\exp\tau_1 = \{O\langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle : n \in A\}$ и $\exp\tau_2 = \{O\langle V_1, V_2, ..., V_k\rangle : k \in B\}$ - две топологии и топология $\exp\tau_2$ является допустимым продолжением топологии $\exp\tau_1$, где A,B - множество индексов. Рассмотрим остов $\tau_1 = K(\exp\tau_1)\ \{\{U_1, U_2, \ldots, U_n\} : n \in A\}$ для каждого $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \in \exp\tau_1$ и $\tau_2 = K(\exp\tau_2)\ \{\{V_1, V_2, \ldots, V_k\} : k \in B\}$ для каждого $O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle \in \exp\tau_2$. Из π–базовости системы $\exp\tau_1$ для $\exp\tau_2$ имеем, что для каждого элемента $O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle \in \exp\tau_2$ существует элемент $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \in \exp\tau_1$, что $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subset O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$. Теперь покажем, что для каждого $V_i, i = 1, 2, \ldots, k$ существует $U_s, s = 1, 2, \ldots, n$ что $U_s \subset V_i$.

Предположим противное, например для V_i и для каждого $U_1, U_2, \ldots, U_n$ имеем $U_s \not\subset V_1$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Выберем по точке $x_s \in U_i \setminus V_s$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$. Но $F \notin O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$, так как $F \cap V_i \quad \varnothing$. Это противоречит тому, что $O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subset O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle$. Значит, для каждого элемента V из множества τ_2 существует τ_1, что $U \subset V$. Это означает, что система τ_1 есть π–база для системы τ_2. (ii) доказана.

Теперь докажем условие (i) из определения 1.1. Пусть U_s - произвольный непустой элемент из системы τ_1. Тогда существует элемент $O\langle U_1, \ldots, U_s \ldots, U_n\rangle$ из системы $\exp\tau_1$ который содержит элемент U_s.

Из условия теоремы имеем, что $O\langle U_1, \ldots, U_s \ldots, U_n\rangle \in \exp\tau_2$. Тогда $K(O\langle U_1, \ldots, U_s \ldots, U_n\rangle) = \{U_1, \ldots, U_s \ldots, U_n\} \in \tau_2$. Отсюда имеем, что $U_s \in \tau_2$. Из произвольности элемента $U_s \in \tau_1$ имеем, что $\tau_1 \subset \tau_2$. Условие (i) выполнено. Теорема 1.2 доказана.

Объединяя теоремы 1.1 и теоремы 1.2 получим следующую теорему

Теорема 1.3. Пусть τ_1 и τ_2 - две топологии на T_1-пространстве X. Для того, чтобы топология τ_2 была допустимым продолжением относительно топологии τ_1 необходимо и достаточно, чтобы топология $\exp\tau_2$ являлась допустимым продолжением относительно топологию $\exp\tau_1$ на пространстве $\exp X$.

Следствие 1.1. Функтор $\exp$ сохраняет свойство быть допустимым продолжением относительно топологию любого T_1 –пространства X.

2. Система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется *сцепленной*, если любые два элемента из ξ пересекается. По лемме Цорна всякая сцепленная система может быт дополнена до максимальной сцепленной системы (МСС), но такие дополнение, как правила, не однозначны.

Предложение 2.1[1]. Сцепленная система ξ пространства X является МСС тогда и только тогда, когда она обладает следующим свойством полноты:

если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждом элементом из ξ , то $A \in \xi$.

Суперрасширением λX топологического пространства X называется множество λX всех максимально сцепленных систем топологического пространства X, наделенное Волмэновской топологией, открытую базу которой образуют множества вида

$O(U_1, U_2, ..., U_n) = \{\xi \in \lambda X : \forall i \quad 1, 2, ..., n \ \ \exists F_i \in \xi : F_i \subset U_i\}$, где $U_1, U_2, \ldots, U_n$ - открытые множества в X.

Топологическое пространство X естественно вкладывается в λX каждая точка $x \in X$ отождествляется с МСС $\xi_x = \{F \in \exp X : x \in F\}$, где под $\exp X$ понимается пространство замкнутых множеств пространства X с топологией Виеториса [1].

В работе [5] М.Талаат доказал, что

Теорема 2.1 [5]. Для любого Хаусдорфова пространства X имеем, что подпространства $\exp_3^0 X = \{F \in \exp X : |F| = 3\}$ гиперпространства $\exp X$ гомеоморфно подпространству $\lambda_3^0 X = \{\xi \in \lambda X : |\operatorname{supp} \xi| = 3\}$ суперрасширения λX, где $\operatorname{supp} \xi$ – носитель МСС ξ .

Нам необходимы следующие утверждения.

Теорема 2.2 [1]. Пусть X - сепарабельное пространство. Тогда всякий несчетный кардинал является калибром пространства X.

Предложение2.2 [7].а) $e(X) \le s(X) \le \min\{hl(X), hd(X)\}$.

Предложение2.3 [8]. Для любого топологического T_1 – пространства X имеем $c(X) \le wd(X) \le d(X)$.

Теорема 2.3 [6]. Для любого нормального пространства X справедливо $t(\lambda X) \ne t(X)$.

Теорема 2.4. Пусть $A \subset R$ и $\operatorname{int}(R \setminus A) \ne \varnothing$. Тогдадля пространства Хаттори на числовой прямой $(R, \tau(A))$ и пространства суперрасширения λX имеем:

1) $s(R, \tau(A)) \ne s(\lambda(R, \tau(A)))$;

2) $hd(R, \tau(A)) \ne hd(\lambda(R, \tau(A)))$;

3) $h\pi w(R, \tau(A)) \ne h\pi w(\lambda(R, \tau(A)))$;

4) $hsh(R, \tau(A)) \ne hsh(\lambda(R, \tau(A)))$;

5) $hc(R, \tau(A)) \ne hc(\lambda(R, \tau(A)))$;

6) $hk(R, \tau(A)) \ne hk(\lambda(R, \tau(A)))$;

7) $hpk(R, \tau(A)) \ne hpk(\lambda(R, \tau(A)))$;

8) $hpsh\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hpsh\left(\lambda(R,\tau(A))\right)$;

9) $hwd\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hwd\left(\lambda(R,\tau(A))\right)$;

10) $hl\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hl\left(\lambda(R,\tau(A))\right)$;

11) $he\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq he\left(\lambda(R,\tau(A))\right)$.

Доказательство. Пусть $A\subset R$ и $\operatorname{int}(R\setminus A)\neq\varnothing$. Тогда существует точка $a\in R\setminus A$ и окрестность $\left[a,b\right)$, что $\left[a,b\right)\subset R\setminus A$. В $\exp_3^0 R$ рассмотрим следующее множество:

$$Y=\left\{F_t=\left\{a+t,\frac{a+b}{2},b-t\right\}:0<t<\frac{b-a}{2}\right\}.$$

Покажем, что Y –дискретное множество мощности континуума. Пусть $OF_t=\left\langle O_1^t,O_2^t,O_3^t\right\rangle$, где $O_1^t=\left[a+t,\frac{a+b}{2}\right)$, $O_2^t=\left[\frac{a+b}{2},b-t\right)$, $O_3^t=\left[b-t,b\right)$. Покажем, что $OF_t\cap Y=F_t$. На самом деле, пусть множество $F_{t'}$, $a+t'\in OF_t$, так как $a+t'<\frac{b-a}{2}$, то имеем, что $a+t'\in O_1^t$, следовательно $a+t'>a+t$. Но $a+t'\in O_1^t$ следует, что $b-t'\in O_3^t$ значит, $b-t'>b-t$ отсюда имеем, что $a+t'<a+t$. Полученное противоречие доказывает, что $OF_t\cap Y=F_t$, следовательно, Y - дискретное множество мощности континуума c. По определению спрэда, имеем, что $s(\exp_3^0 R)=c$, следовательно $hd(\exp_3^0 R)=c$. По теореме 2.1 [5], имеем, что $hd(\lambda_3^0 R)=c$, значит, $hd(\lambda R)=c$.Мы доказали, что спрэд пространства равно $\aleph_0=s\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq s\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c$. Значит, функтор λ не сохраняет спрэд пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$. Неравенство 1) доказана.

2) В первом пункте мы доказали, что пространство $\lambda(R,\tau(A))$ содержит Y – дискретное множество мощности континуума c. Значит, $\lambda(R,\tau(A))$ не является наследственным сепарабельным пространством, т.е. $\aleph_0=hd\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hd\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c$. Значит, функтор λ не сохраняет наследственной плотности пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$. 2) доказано.

3) В пункте 1) мы доказали, что пространство $\lambda(R,\tau(A))$ содержит дискретное множество мощности континуума. Известно, что множество $\left\{\left[r_1,r_2\right):r_1<r_2,r_1,r_2\in Q\right\}$ является π-базой пространство Хаттори на числовой прямой. Значит, мы имеем $\aleph_0=h\pi w\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq h\pi w\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c$. 3) доказано.

4) Из теоремы 2.2 [3] имеем, что число Шанина пространства Хаттори на числовой прямой счетно. Ясно, что пространство $\lambda(R,\tau(A))$ содержит дискретное множество мощности континуума. Тогда мы имеем $\aleph_0=hsh\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hsh\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c$ - мощность континуума. 4) доказана.

5) Фактически в первом пункте мы доказали неравенство $\aleph_0=hc\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hc\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c$ - мощность континуума. 5) доказана.

6) Ясно, что пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$ наследственно сепарабельно. Тогда в силу теоремы 2.2 [1] всякий несчетный кардинал является калибром пространства $(R,\tau(A))$. Значит, наследственный калибр пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$ равен $hk\left(R,\tau\left(A\right)\right)=c$ - мощность континуума. С другой

стороны, что множество Y есть дискретное множество мощности континуума. Значит, наследственный калибр пространства $hk\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c^{+}$ - следующий кардинал c. Значит, функтор λ не сохраняет наследственный калибр пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$. 6) доказано.

7) Из теоремы 2.2 [1] получим, что калибр и прекалибр пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$ равен мощности континуума, поэтому $hk\left(R,\tau\left(A\right)\right)=hpk\left(R,\tau\left(A\right)\right)=c$ - мощность континуума, а $hk\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=hpk\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c^{+}$ - следующий кардинал c. Значит, функтор λ не сохраняет наследственный калибр и прекалибр пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$. 7) доказано.

8) Из определения число Шанина, число предшанина пространства X и из пунктов 6), 7) вытекает неравенство $hpsh\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hpsh\left(\lambda(R,\tau(A))\right)$. 8) доказана.

9) Пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$ - наследственно сепарабельно, тогда в силу предложение 2.3 [7]пространства $(R,\tau(A))$ - наследственно слабо сепарабельно. Мы показали, что $\lambda(R,\tau(A))$ содержит дискретное подмножество Y мощности континуума. Значит, пространство $\lambda(R,\tau(A))$ не является наследственно слабо сепарабельным, т.е. $\aleph_0$ $hwd\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq hwd\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c$. Значит, функтор λ не сохраняет наследственную слабой плотности пространства Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$. 9) доказано.

10) Известно, что пространство Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$ наследственно линделефа, т.е. каждое подмножество финально компактно. Мы показали, в пункте 1) что пространство $\lambda(R,\tau(A))$ содержит дискретное подмножество Y мощности континуума. Множество Y не является финально компактным подмножеством пространства $\lambda(R,\tau(A))$. Значит, пространство $\lambda(R,\tau(A))$ не наследственно линделефа. Значит, функтор λ не сохраняет наследственное число линделефа пространства $\lambda(R,\tau(A))$. Неравенство 10) доказано.

11) В пункте 1) показали, что спрэд пространство Хаттори на числовой прямой $(R,\tau(A))$ $\lambda(R,\tau(A))=\aleph_0$ - счетен. Из предложения 2.2[7] получим, что экстент пространство Хаттори на числовой прямой $e(R,\tau(A))=\aleph_0$ - счетен. Ясно, что подмножество Y - дискретное подмножество мощности континуума. Известно, что всякое подмножество дискретного подмножество тоже дискретно и замкнуто. Значит, $\aleph_0$ $he\left(R,\tau\left(A\right)\right)\neq he\left(\lambda(R,\tau(A))\right)=c$. Мы доказали неравенство 11). Теорема 2.4 доказана.

Замечание 2.1. Из теоремы Ван Милля о совпадении тесноты и характера для любого нормального пространства X, имеем, что для пространства Хаттори на числовой прямой R имеем

1) $\chi\left(\lambda R\right)\neq\chi\left(R\right)$;

2) $t\left(\lambda R\right)\neq t\left(R\right)$.

Следствие 2.1. Функтор суперрасширение сохраняет пространство Хаттори на числовой прямой.

Пространства NX полных сцепленных систем (ПСС) пространства X было определено А.В.Ивановым [4] следующим образом:

Определение 2.1[4]. Сцепленную систему M замкнутых подмножеств компакта X назовем полной сцепленной системой (ПСС), если для любого замкнутого множества F компакта X условию:

* «Любая окрестность OF множества F содержит некоторое множество $\Phi \in \mathrm{M}$» * влечет $F \in \mathrm{M}$.

Очевидно, что любая МСС ξ является ПСС, следовательно $\lambda \mathrm{X} \subset N\mathrm{X}$.

Пространство $N\mathrm{X}$ ПСС компакта X называется множество $N\mathrm{X}$ всех полных сцепленных систем компакта X, наделенное топологией, открытую базу которой образуют множества вида:

$E = O(U_1, U_2, ..., U_n)\langle V_1, V_2, ..., V_s\rangle = \{\mathrm{M} \in N\mathrm{X}:$ для любого $i = 1,2,..., n$ существует $F_i \in \mathrm{M}$ такое, что $F_i \subset U_i$ для любого $j = 1,2,..., s$ и любого $F \in \mathrm{M}$ имеем $F \cap V_j \neq \varnothing\}$, где $U_1, U_2, ..., U_n, V_1, V_2, ..., V_s$ - непустые открытые в X множества.

Из теоремы 2.4 получим

Следствие 2.2. Пусть $A \subset R$ и $\mathrm{int}(R \setminus A) \neq \varnothing$. Тогдадля пространства Хаттори на числовой прямой $(R, \tau(A))$ и пространства полных сцепленных систем NX имеем:

1) $s\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq s\left(N(R,\tau(A))\right)$;
2) $hd\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hd\left(N(R,\tau(A))\right)$;
3) $h\pi w\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq h\pi w\left(N(R,\tau(A))\right)$;
4) $hsh\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hsh\left(N(R,\tau(A))\right)$;
5) $hc\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hc\left(N(R,\tau(A))\right)$;
6) $hk\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hk\left(N(R,\tau(A))\right)$;
7) $hpk\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hpk\left(N(R,\tau(A))\right)$;
8) $hpsh\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hpsh\left(N(R,\tau(A))\right)$;
9) $hwd\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hwd\left(N(R,\tau(A))\right)$;
10) $hl\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq hl\left(N(R,\tau(A))\right)$;
11) $he\left(R,\tau\left(A\right)\right) \neq he\left(N(R,\tau(A))\right)$.

Следствие 2.3. Функтор полных сцепленных систем N не сохраняет пространство Хаттори на числовой прямой.

Литература:

[1]. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. Москва: Физматлит. 2006. -332 с.

[2]. Chatyrko.V.A., Hattory Y., A poset of topologies on the set of real numders, Comment.Math.Univ.Carolin., 54,2(2013) p. 189-196.

[3]. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва: Наука. 1974. - 424 с.

[4]. Иванов А.В. Кардинальнозначные инварианты и функторы в категории бикомпактов: Дисс. док. физ.-матем. наук. Петрозаводск, 1985. -235 с.

[5]. Махмуд Т. Кардинальнозначные инварианты пространств сцепленных систем: Дисс. канд. физ.- матем. наук. Москва: МГУ, 1993. - 87 с.

[6]. J.Van Mill. Supercompactness and wallman spaces. MCTracts, 1977, v.85.

[7]. Ткачук В.В. Топологические приложения теории игр. МГУ, Москва, 1992. – 112 с.

[8]. Beshimov R.B. Some cardinal properties of topological spaces connected with weakly density / / Methods of Functional analysis and Topology. – 2004. – No. 3 (10). P. 17-22.