ПРОЕКТИВНО ИНДУКТИВНО ЗАМКНУТЫЕ ФУНКТОРЫ И РАЗМЕРНОСТЬ

ЖУРАЕВ Т.Ф.
Ташкентский Государственный Педагогический Университет имени Низами

Все пространства предполагается тихоновскими, все отображения непрерывными. Через Tych обозначается категория всех тихоновских пространств и непрерывные отображения а через Comp обозначает полная подкатегория категории Tych объектами которого является компакты. Необходимые факты и информации относящихся общей топологии и ковариантным функторам можно найти в работах ([1],[2],[3]). В работе [4] автором был определен проективно индуктивно замкнутые функторы (коротко, p.i.c-функтор) и показано, что нормальные финитные функторы является p.i.c –функторами. Для функтора F бикомпакта X и натурального числа k определяется отображения $\pi_{F,\mathrm{X},k} : C(\{k\},\mathrm{X}) \times F(\{k\}) \to F(\mathrm{X})$ равенством $\pi_{F,\mathrm{X},k}(\xi, a) = F(\xi)(a),$ где $\xi \in C(\{k\},\mathrm{X}),$ $a \in F(\{k\})$, $\{k\}$- k -элементное множество с дискретной топологией и $\mathrm{C}(\{k\},\mathrm{X})$ пространство непрерывных отображений с бикомпактно-открытой топологией. Когда, ясно о каком функторе и о каком бикомпакте X идет речь мы будем обозначать отображении $\pi_{F,X,K}$ через $\pi_{X,K}$ или π_K. Различные свойство отображения $\pi_{F,X,K}$ приведены в работах ([5],[6]) А.Ч. Чигогидзе [7] продолжил всякий мономорфный функтор $\mathrm{F} : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$, сохраняющий пересечения на категории Tych следующим образом: для тихоновского пространства X он положил

$$F_\beta(X) = \{a \in F(\beta X) : supp(a) \subset X\}$$

где $supp(a)$ носитель точки a .

ЛЕММА1 ([6]). Каждое непрерывное сохраняющие прообразы функтора F_β отображение $\pi_{F_\beta,X,1}$ является гомеоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эпиморфизм $f : X \to Y$ называется *индуктивно замкнутым*, если существует такое замкнутое подмножество A пространства X такое, что $f(A) = Y$ и $f|_A$ есть замкнутое отображение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ([6]). Функтор F_β назовем *проективно индуктивно замкнутым* (*p.i.c.*), если отображение $\pi_{F_\beta X,K}$ индуктивно замкнуто для каждого тихоновского пространства X и целого положительного числа k .

В дальнейшем нам нужно следующая

ТЕОРЕМА 1 ([6]). *Каждое непрерывное, конечно открытый функтор* F_β *: Tych→Tychявляется p.i.c. - функтором*

Функтор F назовем *конечно открытым*, если для натурального числа k множество $F_K(\{k+1\})$ было открыто в $F_K(\{k+1\})$. Примерами конечно открытых функторов являются финитные функторы т.е. функторы F , для которых множество $F_K(\{k\})$ конечно для всякого натурального число k .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Каждое финитно нормальные функторы, следовательно, функтор* exp_m *является p.i.c - функтором.*

ТЕОРЕМА 2 ([6]). *Пусть* F_β *есть p.i.c - функтор конечной степени. Тогда функтор* F_β *сохраняет класс паракомпактных* $\sum$ *-пространств и класс паракомпактных* p *-пространств.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Для доказательство основного результата для размерности dim в данной работе используется неравенство:

(*) $$\dim\left(\prod_{i=1}^{m} X_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \dim X_i$$

Неравенство $(*)$ для паракомпактных $\sum$ -пространств X_i доказано Б.А. Пасынковым [8]; для паракомпактных p - пространств X_i доказано В.В.Филипповым [9]; для паракомпактных σ - пространств X_i доказано Т. Ф. Жураевым [10].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть F_β есть p.i.c - функтор конечной степени m и X паракомпактное $\sum$ -пространство. Тогда*

(1) $$\dim F_\beta(X) \le m \dim X + \dim F_\beta(\{m\}) \equiv d(m)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\dim X = \infty$, то истинность неравенства (1) тривиальна. Пусть теперь $\dim X = n < \infty$ т.е. размерность X конечна. Докажем это соотношение по индукции для m. Если m=1 то, неравенство (1) верно, так как по лемме 1 ([6]) $F_1(X)$ гомеоморфно произведению $X \times F(\{1\})$ т.е.

$$\dim(X \times F(\{1\})) \le \dim X + \dim F(\{1\})$$

Заметим, что $F(\{1\})$ компактно, следовательно $X \times F(\{1\})$ является паракомпактным $\sum$ -пространством.

Допустим, что для всех $l < k \le m$ неравенство

(1_ℓ) $$\dim F_\ell(X) \le \ell \dim X + \dim F_\beta(\{\ell\}) \equiv \mathrm{d}(\ell)$$

доказано. Теперь докажем неравенство (1_k).

Для положительного целого числа p через S_p обозначим симметрическую группу всех гомеоморфизмов $\sigma \in C(\{p\},\{p\})$. Это множество состоит из $p\,!$ элементов.

Фиксируем $b \in F_\ell(X) \setminus F_{\ell-1}(X)$. Пусть $\sup p(b) = \{x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}\}$ и пусть $b = \pi_\ell(\xi, a) = F(\xi)(a)$. Далее, пусть $h_\xi : \{l\} \to \sup(b)$ биекция определенная формулой: $h_\xi(i) = x_{\xi(i)}$. Через $j : \sup p(b) \to X$ обозначается тождественная инъекция определенная по формуле: $\mathrm{j}(x_i) = x_i$. Допустим $g : \sup(b) \to \{l\}$ биекция определенная равенством $g(x_i) = i$. Имеем композицию

(3₂) $$\sigma_\xi \equiv g \circ j \circ h_\xi : \{\ell\} \to \{\ell\},$$

которая является биекцией определенной композициями биекцией g, j и h_ξ. Из равенства (3_2) вытекает следующее

(3_3) $\xi = j \circ h_\xi$

Далее имеем

(3_4) $\sigma_\xi = g \circ \xi$ и $\xi = g^{-1} \circ \sigma_\xi$,

здесь ξ является биекцией из $\{k\}$ в $\sup(b)$ и инъекцией из $\{k\}$ в $F_K(X)$.

Чтобы продолжить доказательство напомним следующие определения и факты. Пусть X топологическое пространство и G топологическая группа, e нейтральный элемент этой группы G. Пусть $\alpha : G \times X \to X$ непрерывное отображение $\alpha(g,x)$ которое обозначим $g(x)$. Говорят отображение α называется действием группы G на пространстве X если:

(3_5) $e(x) = x$ и $g_2(g_1(x)) = g_2 g_1(x)$

Пусть $b \in F_k(X) \setminus F_{K-1}(X)$ фиксированное точка, следовательно $g^{-1} : \{k\} \to \sup\ p(b)$ есть тожественное отображение. Из (3_4) вытекает что для тождественного отображения σ_ξ имеет место $\xi = \xi_b \in S_k$. Положим $Z = \pi_k^{-1}(\pi_k(X) \setminus \pi_{k-1}(X))$. В пространстве Z определено действие α группы S_k по следующему правилу

$\alpha(\sigma,(\xi,a)) = (\xi \circ \sigma^{-1}, \pi(\sigma)(a))$

или по определению действия

$$(3_6) \qquad \sigma(\xi,a) = (\xi \circ \sigma^{-1}, F(\sigma)(a))$$

Во первых имеет место равенство

$$(3_7) \qquad \alpha(S_K \times Z) = Z$$

Здесь $e(\xi,a) = (\xi,a)$,следовательно

$$(3_8) \qquad \alpha(S_k \times Z) \subset Z$$

С другой стороны, если $\pi_K(\xi,a) = b \in F(X) \setminus F_{K-1}(X)$, тогда $\pi_k(\sigma(\xi,a)) = b$.

Следовательно, имеем

$$\pi_K(\sigma(\xi,a)) = (no\ (3_6)) = \pi_K(\xi \circ \sigma^{-1}, F(\sigma)(a)) = F(\xi \circ \sigma^{-1})(F(\sigma)(a)) = F(\xi \circ \sigma^{-1} \circ \sigma)(a) = F(\xi)(a) = b$$

Из соотношения (3_8) и по только, что показанному имеет место равенство(3_7). Пусть $q : Z \to Z / S_k$ факторное отображение на пространство орбит по действие группы S_k. Для этого отображения имеют место следующие свойства

(3_9) Z / S_k является гомеоморфизмом в $F_K(X) \setminus F_{K-1}(X)$ и

(3_{10}) отображение q и $\pi_k|_Z$ на Zсовпадают.

Далее в силу (3_{10}) имеет место

$$(3_{11}) \qquad \overline{(\xi,a)} = \pi_k^{-1}(b) \text{ для } b = \pi_K(\xi,a) \in F_K(X) \setminus F_{K-1}(X)$$

В этом случае, отображения q и $\pi_k|_Z$ совпадают на топологическом пространстве Z. В этом случае из одной теоремы работы [11] имеет место следующее

(3_{12}) $\pi_k|_Z$ есть открытое отображение

Следовательно имеем

(3_{13}) $|\pi_k^{-1}(b)| = k!$ для каждого $b \in F_K(X) \setminus F_{K-1}(X)$

Заметим, что для каждого $\sigma_1 \neq \sigma_2$ имеет место следующее неравенство $(\xi, \sigma_1^{-1} F(\sigma_1)(a)) \neq (\xi, \sigma^{-1} F(\sigma_2))(a)$ где $\sigma_i \in S_k$.

ЛЕММА 2. *Отображение* $\pi_k|_Z$ *является локальным гомеоморфизмом*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \in F_K(X) \setminus F_{K-1}(X)$. Тогда по (3_{13}) $|\pi_k^{-1}(b)| = k!$. Пусть $\pi_K^{-1}(b) = \{z_i : i \in \{k!\}\}$. Пусть $\{u_i : i \in \{k!\}\}$ открытое дизъюнктное семейство окрестностей точек z_i в пространстве Z. Положим $\pi_k(U_i) = V_i$. Показанному (3_{12}) каждое V_i является открытой окрестностью точки b. Рассмотрим множества $V = \cap\{V_i : i \in \{k!\}\}$ и $W_i = ((\pi_k|_Z)^{-1})(V) \cap U_i$. Заметим, что для этих множеств имеет место равенство

(3_{14}) $\pi_k(W_i) = V$ каждого $i \in \{k!\}$.

Включение $\subset$ тривиально. Допустим, $b \in V$. Тогда ясно что $\pi_k^{-1}(b) \subset (\pi_k|_z)^{-1})(V)$. Во-первых, имеем $\pi_k^{-1}(b^1) \cap (U_i^k)$ не пусто для некоторого $b' \in V_i$, далее $V_i = \pi_k(U_i)$. Следовательно, $\pi_k^{-1}(b_1) \cap (U_i^k)$ тоже непусто, и $b_1 \in V \subset \mathrm{V_i}$. Равенство$(3_{14})$

доказано.Теперьпокажем, что отображение,$\pi_k|_W$ взаимнооднозначно. В самомделе, по равенству (3_{14})множество.$\pi_k^{-1}(b_1)\cap(W_i)$ непусто.

С другой стороны, если $|\pi_k^{-1}(b_1)\cap(W_i)|\geq 2$,тогда $|\pi_k^{-1}(b_1)>k!$. Это противоречит (3_{13}).Значит, $\pi_k|W_i:W_i\to V$ гомеоморфизм, являющийся взаимно однозначным и открытым. Лемма 2 доказана.

Значит, для каждого $b\in F_K(X)\setminus F_{K-1}(X)$ имеется такая открытая окрестность $V=V_b$, что $\pi_k^{-1}(V_b)$ является дизъюнктным открытым семейством $\{W_i^b: i\in\{k!\}\}$. Это семейство имеет следующее свойство:
$\pi_k|W_i^b:W_i^b\ \to V_i$являяется гомеоморфизмом, для каждого $i\in\{k!\}$.

Для доказательства неравенства (3_{1k}) воспользуемся теоремой Даукера [12] и по индуктивному предложению для каждого замкнутого A в $F_K(X)$ множества $A\subset F_K(X)\setminus F_{K-1}(X)$ имеем

(3_{15}) $\dim A\leq k\dim X+\dim F_\beta(\{k\})\equiv d(k)$

С одной стороны имеем

(3_{16}) $\quad \dim(X^k\times F_\beta(\{k\})\leq k\dim X+F_\beta(\{k\}).$

Так как пространства X и $F_\beta(\{X\})$ по условию теоремы паракомпактные $\sum$ -пространства.

С другой стороны, по лемме 2 пространства $F_k(X)\setminus F_{k-1}(X)$ локально гомеоморфны открытому подмножеству произведения $X^k\times F_\beta(\{k\})$. Следовательно, по только, что доказанному семейство $\{U_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ является открытым покрытием множеством$F_k(X)\setminus F_{k-1}(X)$, каждое из которых $\pi_k^{-1}(U_\gamma)$ гомеоморфно произведению $U_\gamma\times\{k!\}\subset X^k\times F_\beta(\{k\})$. Положим через V_γ пересечение $U_\gamma\cap A$. Тогда семейство $\upsilon=\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ есть открытое покрытие пространства A . По теореме 2 ([6]) пространство A паракомпактно, как замкнутое подмножества пространства $F_k(X)$. В этом случае, имеется открытое в A локально конечное вписанное в $\upsilon=\{V_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ покрытые $W=\{W_\delta:\delta\in D\}$.Кроме того, каждое $\pi_k^{-1}(W_\delta)$ гомеоморфно произведению $W_\delta\times\{k!\}\subset X^k\times F_\beta(\{k\})$.

Существует такое замкнутое в А семейство$s=\{s_\delta:\delta\in D\}$ вписанное в υ, что $S_\delta\subset W_\delta$ КаждоеS_δ гомеоморфно замкнутому подмножеству $X^k\times F_\beta(\{k\})$которое замкнуто в $X^k\times F_\beta(\{k\})$. Множество$\pi_k^{-1}(S_\delta)$ гомеоморфно произведению$S_\delta\times\{k!\}$ которое, является дискретным объединением множествS_δ. Следовательнно, по (3_{16})

$$\dim S_\delta\leq\dim(X^k\times F_\beta(\{k!\}))\leq d(k)$$

Это покрытие s локально конечно и$S_\delta\subset W_\delta$.Следовательно, по теореме Даукера [12] о локально конечной сумме имеет место$\dim A\leq d(k)$.

Проверка неравенства (3_{15})закончена. Проверка достоверности неравенства (3_{1k})тоже закончена. Следовательно, индуктивный шаг проверен. Теорема 3 доказана.

Так как паракомпактные σ- пространства и паракомпактные p- пространства сохраняется при замкнутых отображениях из теоремы 3 вытекаютследующие

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* F *есть p.i.c. - функтор конечной степени* m *и X паракомпактное* σ*-пространство и паракомпактное* p *-пространство. Тогда* $\dim F_\beta(X) \leq m \dim X + \dim F_\beta(\{m)$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* F *есть p.i.c.- функтор конечной степени* m *и Xстратифицируемое, следовательно, метризуемое пространства. Тогда* $\dim F_\beta(X) \leq m \dim X + \dim F_\beta(\{m\})$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X называется *слабо счетномерным* , если X является объединением счетного семейства своих замкнутых подмножеств X_i таких, что $\dim X_i < \infty$, для каждого i .

Доказательство следующих двух предложений тривиально

ПРЕДЛОЖЕНИЕ1. *Каждое замкнутое подпространство слабо счетномерного пространства снова является слабо счетномерным.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* Y *есть слабо счетномерное пространство и* m *натуральное число. Если каждое замкнутое подпространство X конечной размерности пространства* Y *удовлетворяет неравенству* $(*)$, *тогда* Y^m *является слабо счетномерным пространством.*

В силу приведенных фактов имеем.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* F *есть p.i.c. - функтор конечной степени,* X *есть слабо счетномерное пространство и принадлежит одному из следующих классов пространств:*

a) $\sum$ *- паракомпактные пространства;*

b) p *- паракомпактные пространства;*

c) σ *- паракомпактные пространства;*

d) стратифицируемые пространства;

e) метризуемые пространства.

Тогда $F_\beta(X)$ *является слабо счетномерным пространством.*

В силу теоремы 1([6]) и теоремы 4 имеем

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* F *сохраняющий прообразы, непрерывный конечно -открытый функтор конечной степени,* X *слабо счетномерна пренадлежит одному из следующих классов:*

a) $\sum$ *- паракомпактные пространство ;*

b) p *- паракомпактные пространство ;*

c) σ *- паракомпактные пространства ;*

d) стратифицируемые пространства ;

e) метризуемые пространства.

Тогда $F_\beta(X)$ *есть слабо счетной размерности пространством.*

Из свойств конечно - открытых функторов, следствия 1 и теоремы 4 имеем

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть* F *нормальный финитный функтор конечной степени,* X *является слабо счетномерным пространством.:*

a) $\sum$ *- паракомпактные пространства;*

b) p *- паракомпактные пространства;*

c) σ *- паракомпактные пространства;*

d) стратифицируемые пространства;

e) метризуемые пространства.

Тогда $F_\beta(X)$ *является слабо счетной размерности пространством.*

Литература:

1. Р.Энгелькинг Общая топология М.Мир. 1986,752с.

2. В.В. Федорчук, В.В. Филлиппов Общая топология. Основные конструкции М. МГУ. 1988. 252с.
3. Е.В. Шепин Функторы и несчетные степени компактов Успехи Мат. Наук - 1981,Т.36.вып. 3, с 3-62.
4. Т.Ф. Жураев On paracompact spaces and projectively inductively closed funcfors App. Gen. Topol. 2002. V43 №1 pp31-44.
5. В. Н. Басманов Ковариантные функторы, ретракты и размерность Докл. Акад Наук СССР, 271, 1983,№5,с 1033-1036.
6. Т.Ф. Жураев On projectively quotient functors. Comment. Math. Univ. jor. Corolinae V.42, №3, 2001, pp. 561-573.
7. А. Ч. Чигогидзе Продолжение нормальных функторов Вест.МТУ, Серия Мат.Мех. 1984, №6, с.40-42.
8. Б.А.Пасынков О размерности прямоугольных произведений Докл. Академ. Наук СССР, 221, 1975, №2, с 291-294.
9. В.В. Филиппов О нормально расположенных пространствах Труды Мат. ин-та Академ Наук СССР, 1983, Т.154, с 239-751.
10. Т.Ф. Жураев Некоторые геометрические свойства функтора вероятностиых мер и его подфункторов. Диссер. Мос. Гос. Ун-то Ломоносова, 1989,С.90
11. Г.Е. Бредон Введение в теорию компактных групп преобразаваний М.Наука,1980,440с.
12. C. H. Dowker Local dimension of normal spaces. Quart. j. Math. 43, 1955, №22, pp 101-120.