



Наурызбаева С.А. - магистрант
Казахский университет технологий и бизнеса,
г. Астана, Казахстан

ШЕКТІ ҰЗЫНДЫҚТЫ СЫРЫҚТЫҢ ЖЫЛУ АЛМАСУ ЖӘНЕ СОЗУШЫ КҮШ ӘСЕРЛЕРІНЕН ҰЗАРУЫ

Рассматриваются и исследуются численным методом конечных элементов вопросы минимизации тепловой энергии в стержне.

Some problems of minimization of heat energy in a rod are considered and investigated by means of numerical method of finite elements.

Мақалада шекті ұзындықтағы сырықтың жылу ағыны және жылу алмасу әсерлерінен сырықтың ұзаруы терең зерттеліп, өндіріс үшін қажетті сәйкес заңдылықтар анықталған. Мұнда үш нүктелі квадраттық шекті элементтер және жылу энергиясын өрнектейтін функционалдың түйін нүктелеріндегі температуралар бойынша минимизациялау әдістері арқылы сандық түрде шешілуі көрсетілген.

Бізге шекті ұзындықты $L(\text{см})$, көлденең қима ауданы ұзындығы бойынша тұрақты $F(\text{см}^2)$, материалының серпімділік модулі $E(\text{кг}/\text{см}^2)$, бүйір беті жартылай жылу өткізбейтін қабатпен қапталған сырық берілсін. Оның $x=0$ нүктесінде $T(x=0) = T_1$ температура, бүйір бетінің $x_1 \leq x \leq x_2$, $x_2 < L$ бөлігінде жылу ағыны беріліп, $x_3 \leq x \leq x_4$, $x_4 < L$ бөлігі арқылы сыртқы ортамен жылу алмассын. Мұнда жылу алмасу коэффициенті $h_1(\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}))$, ал бүйір бетінің сол жақ бөлігін орап тұрған сыртқы ортаның температурасы T_{co1} болсын. Сондай-ақ сырықтың екінші ұшы $x=L$ -дегі көлденең қима ауданы арқылы сыртқы ортамен жылу алмасып, ондағы жылу алмасу коэффициенті $h_2(\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}))$, ал сыртқы ортаның температурасы T_{co2} болсын. Сонымен қатар сырықтың $x=0$ шеті қатаң бекітілген, ал $x=L$ шетіне сырықтың осі бойынша бағытталған $P(\text{кг})$ созушы күш қойылсын.

Осындай әр түрлі жылу көздері мен созушы күш әсерінен сырықтың ұзаруын зерттеу қажет. Мұнда сырықтың бүйір бетінің $0 \leq x \leq x_1$ және $x_4 \leq x \leq L$ бөліктері жылу өткізбейтін қабатпен қапталған. Сырықтың ұзындығы бойынша таралған жылу өрісі әсерінен және P -созушы күш әсерінен сырықтың ұзаруын табу қажет. Ол үшін сырықты ұзындығы бойынша теңдей n үш нүктелі шекті элементтерге бөлеміз. Әрбір шекті элементтің ұзындығы

$\ell = \frac{L}{n}$ -ге тең болады. Сондай-ақ шекті элементтің шегінде, яғни кез келген

$\frac{Li}{n} \leq x \leq \frac{L(i+1)}{n}$, $i = 0..(n-1)$ аралығында температураның таралу заңдылығын үш нүктеден өткен екінші дәрежелі қисық сызық деп қарастырақ, онда осы аралықта

$$T(x) = \varphi_i(x)T_i + \varphi_j(x)T_j + \varphi_k(x)T_k \quad (1)$$

өрнегі орынды болады.

Мұнда $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$ және $\varphi_k(x)$ -үш нүктелі квадраттық шекті элементтің пішін функциялары және олар (1) формуласы арқылы өрнектеледі. Енді әрбір квадраттық шекті элемент



үшін жылу энергиясының өрнегін жазамыз. Сырықтың $(0 \leq x \leq x_1), (x_2 \leq x \leq x_3)$ және $(x_4 \leq x \leq L)$ аралықтарының бүйір беттері жылу өткізбейтін қабатпен қапталғандықтан, бұл аралықтардағы барлық элементтер үшін сәйкес функционалдың көрінісі төмендегідей болады.

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV, \quad \left(i = 1 \dots \frac{x_1}{\ell} \right), \quad i = \left(\frac{x_2}{\ell} \dots \frac{x_3}{\ell} \right), \quad i = \left(\frac{x_4}{\ell} \dots \frac{L}{\ell} - 1 \right), \quad (2)$$

мұнда $V^{(i)}$ - шекті элементтердің көлемдері. Бұл жерде $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2$ -тың өрнегі (1) арқылы табылады, яғни

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 &= \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} T_k \right]^2 = \left[\frac{4x - 3\ell}{\ell^2} T_i + \frac{4\ell - 8x}{\ell^2} T_j + \frac{4x - \ell}{\ell^2} T_k \right]^2 = \\ &= \frac{1}{\ell^4} \left[(16x^2 - 24\ell x + 9\ell^2) T_i^2 + 8(10\ell x - 8x^2 - 3\ell^2) T_i T_j + 2(16x^2 - 16\ell x + 3\ell^2) T_i T_k + \right. \\ &\quad \left. + 8(6\ell x - \ell^2 - 8x^2) T_j T_k + 16(\ell^2 - 4\ell x + 4x^2) T_j^2 + (16x^2 - 8\ell x + \ell^2) T_k^2 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Ал $x_1 \leq x \leq x_2$ аралығында сырықтың бүйір бетіне q -жылу ағыны түсіп тұрғандықтан, бұл аралықтағы барлық

шекті элементтер үшін сәйкес функционалдың өрнегі мынадай болады

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{BB}^{(i)}} q T dS, \quad \left(i = \frac{x_1}{\ell} \dots \frac{x_2}{\ell} \right), \quad (4)$$

мұнда $S_{BB}^{(i)}$ - i -ші элементтің бүйір бетінің аудандары. Сырық $x_3 \leq x \leq x_4$ бөлігінің бүйір беті арқылы сыртқы ортамен жылу алмасады. Мұнда жылу алмасу коэффициенті h_l , ал сыртқы ортаның температурасы

T_{col} . Сондықтан бұл аралықтағы барлық элементтер үшін сәйкес функционалдың өрнегі мынадай болады

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{BB}^{(i)}} \frac{h_1}{2} (T - T_{col})^2 dS, \quad i = \left(\frac{x_3}{\ell} \dots \frac{x_4}{\ell} \right). \quad (5)$$

Сырық $x = L$ нүктесіне сәйкес көлденең қима ауданы бойынша сыртқы ортамен жылу алмасады. Мұнда жылу алмасу коэффициенті h_2 , ал сыртқы ортаның

температурасы T_{col} . Онда ең соңғы n -ші шекті элемент үшін сәйкес функционалдың өрнегі былайша өрнектеледі



$$I_n = \int_{V(n)} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{(2n+1)кка}^{(n)}} \frac{h_2}{2} (T - T_{co})^2 dS, \quad (6)$$

мұнда $S_{(2n+1)кка}^{(n)}$ - n -ші элементтің $(2n+1)$ нүктесінің, яғни ең соңғы нүктесіне сәйкес көлденең қима ауданы.

$$I = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (7)$$

Сырықты теңдей n бөлікке бөлгендіктен жалпы шекті элементтердің $(2n+1)$ түйін нүктелері болып, кез келген көрші екі нүкте ара қашықтығы $\frac{L}{n}$ (см)-ге тең болады.

Енді осы $(2n+1)$ түйін нүктелеріндегі температуралардың мәндері $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{2n+1}$ -лерді табу үшін (7) функцияларын осы T_j -лер ($j=1..2n+1$) бойынша минимизациялап, түйін нүктелеріндегі температуралардың мәндерін анықтау үшін $(2n+1)$ теңдеуден тұратын мынадай алгебралық сызықты теңдеулер жүйесін құрамыз

$$\frac{\partial I}{\partial T_j} = 0, \quad j = 1..(2n+1). \quad (8)$$

Теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешіп, шекті элементтердің түйін нүкте-

ҚОРЫТЫНДЫ

Сырық ұзындығы бойынша жылу өрісінің таралу заңдылығы құрылып, оның созушы P күштің әсерінен қаншалықты созылуын анықтайтын өрнектер алынған. Мұнда жылу өрісі әсерінен берілген сырықтың ұзаруы, оның сол жақ шетінің көлденең қима ауданына түсіп тұрған жылу ағынының мәніне, сырықтың

леріндегі температураның мәндері табылады. Нәтижеде кез келген шекті элементтің кез келген нүктесіндегі температураның мәні (1) формуласы арқылы табылады. Онда L -ұзындықты сырықтың $T = T(x)$ жылу өрісі әсерінен ұзаруы [2] сәйкес былайша анықталады

$$\Delta \ell_T = \int_0^L \alpha T(x) dx, \quad (9)$$

мұнда α ($1/^\circ C$)-сырық материалының жылудан кеңею коэффициенті. Бір шеті бекітіліп, екінші шетінің сырық осі бойынша бағытталған P -созушы күш әсерінен ұзаруы [1] сәйкес

$$\Delta \ell_P = \frac{PL}{EF} \quad (10)$$

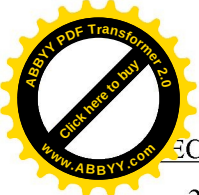
болса, онда берілген сырықтың жалпы ұзаруы $\Delta \ell = \Delta \ell_T + \Delta \ell_P = \int_0^L \alpha T(x) dx + \frac{PL}{EF}$. (11)

ұзындығына, сырық материалының жылудан ұлғаю коэффициенті α -ға және сырықтың оң жақ шетінің көлденең қима ауданының сыртқы ортасының температурасына тура пропорционал, ал сыртқы ортамен жылу алмасу коэффициентінің мәніне кері пропорционал болатындығы көрсетілген.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Розин М.А. Метод конечных элементов в применении к упругим слиткам. - Москва: Стройиздат, 1977. - 129 с.

2. Угодников А.Г., Коротких Ю.Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек. - Киев: Наукова Думка, 1962. - 118 с.



3. Постнов В.А., Харкурин И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Ленинград: Судостроение, 1974. – 344 с.

4. Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Подгюнов А.А. Проблемы автоматизации метода суперэлементов // Применение численных методов в строительной механике корабля / Сборник научных трудов. – Ленинград, 1976. – С. 6-14.

5. Постнов В.А., Дмитриев С.А., Елтышев Б.К., Радионов А.А. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. - Ленинград: Судостроение, 1978. – 126 с.

6. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей. – Ленинград: Машиностроение, 1983. – 212 с.
