П Е Д А Г О Г И К А

Панков П.С., член-корр. НАН КР, профессор МУК
Найманова А.Б., докторант МУК

ИНДУКТИВНОЕ ИЗУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Выдвигается гипотеза: Если давать учащемуся, имеющему необходимые предварительные знания (пререквизиты), соответствующим образом подобранную серию задач, то он может за приемлемое время самостоятельно установить основные математические факты и найти доказательства некоторых из них. Примеры такого изложения приводятся.

The following hypothesis is stated. Humans having prerequisite knowledge being given a series of happily composed tasks can themselves guess basic mathematical facts and can find proofs of some of them. Examples of such statement are given.

Введение

При традиционном изложении математических дисциплин сначала дается определение какого-либо нового понятия, далее приводятся примеры, доказываются (или сообщаются) теоремы, а потом уже предлагаются задачи на проверку знания и понимания этого определения.

Вместе с тем, при применении методики «опережающего обучения», предложенной Л.С.Выготским, нами было установлено, что многие факты и теоремы математики, а также некоторые законы механики для некоторых учащихся являются очевидными. И их изложение, как нового материала, вызывает у таких учащихся только отрицательную реакцию.

Таким образом, задачи на некоторые правила и теоремы можно предлагать до изложения соответствующей темы.

Нами предлагается следующая

Гипотеза. Если давать учащемуся, имеющему необходимые предварительные знания (пререквизиты), соответствующим образом подобранную серию задач и опровергать примерами неправильные ответы, то он может за приемлемое время самостоятельно установить основные математические факты и найти доказательства некоторых из них.

Таким образом, предлагается следующий путь изложения нового материала:

1) Представление задачи со случайными исходными данными (для случайности можно спрашивать такие данные у самих учащихся);
2) Получение ответов от учащихся;
3) Отбор правильных ответов;
4) Подбор примеров, опровергающих неправильные ответы;
5) Задание: сформулировать полученный индуктивно результат в общем виде;
6) Обсуждение предложенных формулировок;
7) Сообщение о формулировке в общепринятых терминах и обозначениях;
8) Предложение о доказательстве данного факта (с соответствующими наводящими вопросами).

Используется следующий индуктивный принцип:

Если некоторая «естественная» закономерность имеет место для случайно выбранного элемента множества (или нескольких элементов), то она также имеет место для всех элементов множества (кроме, может быть, «особых» или «крайних» случаев).

В данном контексте важно, хотя и не вполне определено понятие «естественности». Его можно пояснить только на примерах.

Возьмем два случайных числа: 3 и 5. Здесь разность между ними – четное число. Понятно, что это не всегда будет так, и никакой закономерности здесь нет.

Но для этих чисел мы замечаем, что 3+3+3+3+3 (5 слагаемых) = 5+5+5 (3 слагаемых).

А здесь можно надеяться, что аналогичные тождества будут и для других пар чисел.

Также отметим, что при измерении интеллекта (IQ) успешно используются задания, в которых не дается никаких определений, а только требуется найти ответ. К такому же типу относятся известные задачи «указать четвертый (пятый) лишний» без указания критерия отбора (хотя мы считаем такие задачи методически неудачными).

Мы считаем, что успешное решение задачи типа, ранее неизвестного для учащегося, может быть использовано для формирования понятия, нового для учащегося.

Пример 1: Вычитание (для детей 4-5 лет)

В непрозрачный мешок вкладываются 4-6 шариков, а потом извлекаются 1-2 шарика. Нужно сказать или показать на пальцах, сколько всего шариков в мешке.

Эта методика отличается от обычной методики «счетных палочек» тем, что ответ нужно не увидеть, а именно понять (вообразить).

«Как назвать действие, которое мы совершаем?»

Пример 2: Понятие предела.

1) Дано: $b_1=40$, $b_2=60$, $b_3=49$, $b_4=51$, $b_5=49.9$, $b_6=50.1$. Найти b_{100} с точностью 0.001.

2) Дано: $d_1=40$, $d_2=60$, $d_3=70$, $d_4=75$, $d_5=77.5$. Найти d_{100} с точностью 0.001.

3) Дано: $v_1=6$, $v_{k+1}=(7- v_k)/2$, $k=1,2,3,\ldots$ Найти v_{1000} с точностью 0.000000001. Как обосновать такой результат?

«Как назвать полученное вами число по отношению к последовательности? У всех ли последовательностей есть такие числа?»

1. Классификация творческих заданий

В [1] мы предложили следующую классификацию таких заданий.

Определение 1. «Неявные» задания – это такие задания, в которых дается некоторая ситуация, предмет, объект, отражающие изучаемые понятия в неявном виде, и предлагается дать ответ. При этом задание может быть полностью «неявным» – вопрос не формулируется вообще, и «неявным-наводящим» - вопрос формулируется, но в формулировке нет никаких упоминаний сущности необходимых понятий.

Определение 2. «Аналоговые» задания – это такие задания, в которых дается несколько примеров условий и ответов, дается условие такого же типа и предлагается дать ответ.

При этом примеры могут быть более или менее однотипными. Чем менее однотипными являются примеры, тем более творческий подход требуется от учащегося.

Для стимулирования всех учащихся к работе, чтобы более слабые не смотрели на более сильных и не ждали, пока те догадаются, можно давать всем различные задания одинаковой степени сложности.

2. «Неявные» задания

Предлагается следующая классификация видов задания:

2.1. Спрашивается ответ (в форме математического объекта) непосредственно.

2.2. Ответ спрашивается не в форме математического объекта, а в форме связей между имеющимися (заданными) объектами.

2.3. Предлагается выбрать ответ из нескольких заданных, при этом правильный ответ заметно отличается от остальных.

В последнем виде еще имеются следующие подразделения:

- правильный ответ является точным;

- правильный ответ является близким (или наиболее близким) к точному. Понятно, что последний тип является очень сложным для реализации.

В форме 2.4 еще можно выделить «однородные» ответы (таких же типов, как исходные данные) и «неоднородные» ответы (учащийся должен самостоятельно сформировать тип ответа, а потом уже его дать). Понятно, что последнее значительно сложнее.

3. «Аналоговые» задания.

Как отмечено выше, примеры должны подбираться очень тщательно, чтобы

- они охватывали все существенные стороны задания;
- чтобы в них не было какой-либо закономерности, не предусмотренной преподавателем;

По нашему опыту, также следует подчеркивать, что порядок примеров не имеет значения – каждый из них является отдельным.

Также можно классифицировать задания по способу представления математических объектов в задании и в ответе: - графический; - числовой; - алгебраический.

4. Порядок выполнения заданий

Переходим теперь к выполнению заданий. Если никто из учащихся не может выполнить задание, то можно добавить еще примеры в аналоговое задание и новые подробности в неявное задание. Если же кто-то из учащихся дал ответ, не соответствующий замыслу преподавателя, но опирающийся на данные, содержащиеся в задании, то нужно постараться понять причину и также привести дополнительные примеры, опровергающие предположение учащегося.

Для повышения интереса учащихся, некоторые исходные данные для последующих заданий можно тоже спрашивать у учащихся. Как показывает опыт, предложение учащемуся сказать (или изобразить) случайные исходные данные для еще неизвестной задачи является формой поощрения и ценится учащимися.

После решения задания и составления словесных формулировок требуется перейти к непосредственному изложению нового материала в той форме, в которой учащиеся должны его запомнить, то есть в принятой терминологии и системе обозначений. При этом нужно помнить о следующем.

1) Многие способные учащиеся спешат с выводами.

Пример 3. Связь обыкновенных и десятичных дробей. (Здесь удобно использовать калькулятор).

Какие несократимые правильные дроби можно представить в виде конечной десятичной дроби?

Некоторые сразу скажут: «знаменатель должен быть четным». Нужно предлагать такие ответы, как задание другим учащимся:

«Существуют ли обыкновенные дроби с нечетным знаменателем, точно переводящиеся в десятичную систему?»

«Существуют ли обыкновенные дроби с четным знаменателем, переводящиеся в периодические десятичные дроби?».

2) Для учащихся, которые только сейчас в результате большого умственного напряжения сформулировали новое понятие или нашли математическую закономерность (в особенности впервые в жизни, в первом знакомстве с этой методикой) может явиться большим разочарованием, что все это уже давно известно.

3) Существующие математическая терминология и система обозначений складывались исторически, еще не были официально утверждены, имеют ряд неудобств, неточностей, двусмысленностей. Поэтому предложенные учащимся термины и формулировки могут быть даже более точны, чем существующие. Также, термины на различных (кыргызском и русском) языках для одного и того же понятия могут не соответствовать один другому в общеязыковом смысле.

Вследствие вышеизложенного, предлагается, по крайней мере, в течение данного занятия упоминать формулировку, данную учащимся, наряду с существующей. Также предлагается упоминать о недостатках существующей терминологии, но отмечать, что изменить ее практически уже невозможно.

В связи с предлагаемым методом возникает понятие «доступности» - понимает ли учащийся данную формулу или правило. Косвенным способом проверки недоступности известного математического факта является следующий. Если спросить учащихся в старших классах или в вузе, помнят ли они данный математический факт, то большинство отвечают, что помнят. Но если после этого предложить воспроизвести его, то большинство или ошибутся, или скажут, что забыли.

Также нами обнаружен следующий парадокс. Учащиеся, имеющие бóльшие способности к математике, до некоторого уровня опережают других учащихся, а потом начинают отставать. Это происходит потому, что до данного уровня способным учащимся излагаемые математические факты доступны, и они даже не обращают внимания на объяснения преподавателя. Дальнейшие математические факты – уже недоступны, а слушать объяснения и заучивать непонятное они не привыкли. Также, интуитивное понимание правил действий вызывает отторжение алгебры.

Пример 4. Формула площади прямоугольной трапеции.

Многие учащиеся самостоятельно выводят формулу: если $a>b$, то $S=b*h+(a-b)*h/2$. Но они отторгают формулу $S=(a+b)*h/2$, потому что первое действие $(a+b)$ не имеет наглядного эквивалента.

5. Заключение

Авторы выражают благодарность преподавателям, которые также применяли данную методику и сообщали полученные результаты, и учащимся и студентам, которые давали ответы по данной методике.

Как показал наш опыт преподавания, такой подход вызывает значительный интерес у учащихся и повышает мотивацию к учебе, некоторые учащиеся оказались способными сами создать понятия, которые ранее традиционно излагались в виде нового материала. Наличие калькуляторов (в том числе в сотовых телефонах) у многих учащихся способствует успешному решению поставленных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Панков П.С., Эгембердиев Ш.А., Джаналиева Т.Р. Методика аналоговых и неявных заданий для повышения мотивации к учебе // Вестник Международный университет Кыргызстана, 2008, № 2(17). – С. 82-84.

2. Pankov P.S. Independent learning for Open society // Collection of papers as results of seminars conducted within the frames of the program «High Education Support». Bishkek: Foundation «Soros-Kyrgyzstan», 1996. - Issue 3, pp. 27-38.