ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ ОСНОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЯХ

Купчикова Н.В., Купчиков Е. Е.
Государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Астраханский инженерно-строительный институт»
E-mail: kupchikova79@mail.ru

С помощью методики расчёта линейно-протяжённых конструкций (балок, свай), основанной на свойствах изображений Фурье финитных функций выведена формула определения коэффициента постели по деформации свободного конца сваи с помощью дифференциальных уравнений в обобщённых функциях.

Интегральные преобразования и, в частности, преобразование Фурье, являются мощным современным аппаратом, позволяющим эффективно решать различные задачи физики и механики. За последние двадцать лет интенсивно исследовались и развивались теория и приложения преобразования Фурье обобщенных функций [1-3]. Обобщенные функции являются обобщением классического понятия функции. Множество обобщенных функций состоит из множества обычных функций и множества сингулярных, "необычных" с точки зрения классического анализа функций. Так же, как например, множество действительных чисел состоит из множества рациональных, "обычных" чисел и множества иррациональных,"необычных". Множество рациональных чисел расширяется до множества действительных чисел для того, чтобы сделать выполнимой операцию извлечения корня и взятия логарифма. Необходимость в расширении множества обычных функций до множества обобщенных возникла при решении задач математической физики. На множестве обобщенных функций всегда выполнима операция дифференцирования. Обобщенные функции расширяют возможности классического анализа, например, любую обобщенную функцию можно дифференцировать любое число раз, преобразование Фурье обобщенной функции всегда существует и т.д.

Аппарат преобразования Фурье эффективен в задачах, связанных с решением дифференциальных уравнений с обычными и частными производными и в механике грунтов. Решение этих задач сводится к решению алгебраических уравнений.

$$\frac{d^4u}{dx^4}+4\beta^4u=u'''(0)\delta(x)+u''(0)\delta'(x)+u'(0)\delta''(x)+u(0)\delta'''(x)$$
(2)

Учитывая граничные условия для балки со свободным концом:

$u'''(0)=-\dfrac{P}{EI}$; $u''(0)=\dfrac{M}{EI}=0$; имеем:

$$\frac{d^4u}{dx^4}+4\beta^4u=\frac{P}{EI}\delta(x)+u'(0)\delta''(x)+u(0)\delta'''(x)$$

Благодаря применению обобщенных функций и преобразования Фурье математические выкладки автоматизируются и упрощаются.

Наиболее удобно использовать метод решения, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций для решения задач, представляемых дифференциальными уравнениями с кусочно-постоянными параметрами в механике грунтов. В последние двадцать лет интенсивно исследовались и развивались теория и приложения преобразования Фурье обобщенных функций на кафедре «Тоннели и мосты» Московского государственного под руководством заведующего кафедрой, профессора Е. Н. Курбацкого и подробно изложены в его диссертации «Метод решения задач теории упругости и строительной механики, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций» [4].

В основе метода лежит теорема Винера Пэли Шварца о свойствах изображений Фурье финитных функций: «Изображения Фурье финитных функций целые функции, т.е. функции представимые сходящимися степенными рядами».

В работе [5] изложена методика расчёта свайных фундаментов с концевыми и поверхностными уширениями на действие горизонтальной нагрузки, основанная на свойствах изображений Фурье финитных функций. Определим коэффициент постели по деформации свободного конца сваи с помощью дифференциальных уравнений в обобщённых функциях.

Для достаточно длинных свай, когда влияние граничных условий на нижнем конце сваи можно пренебречь, сваю можно рассматривать как полубесконечную

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения:

$$\tilde{u}(\nu)\left[(-i\nu)^4+4\beta^4\right]=\frac{P}{EI}+u'(0)(-i\nu)^2+u(0)(-i\nu)^3$$
.

Изображение Фурье функции прогиба балки имеет вид:

$$\tilde{u}(\nu)=-\frac{u'(0)\nu^2-u(0)i\nu^3-\dfrac{P}{EI}}{\nu^4+4\beta^4} \qquad (3)$$

Параметры $u'(0)$ и $u(0)$ - аналогичны константам интегрирования, которые можно определить, не выходя из области изображений. Для этой цели найдём корни знаменателя $\nu^4 + 4\beta^4 = 0$:

$$\nu_1 = \sqrt{2}\beta e^{i\frac{\pi}{4}} = \beta(1+i); \qquad \nu_2 = -\sqrt{2}\beta e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\beta(1-i);$$
$$\nu_3 = -\sqrt{2}\beta e^{i\frac{\pi}{4}} = -\beta(1+i); \qquad \nu_4 = \sqrt{2}\beta e^{-i\frac{\pi}{4}} = \beta(1-i).$$
(4)

Учитывая, что функция $u(x) \equiv 0$ при $x < 0$, изображение Фурье этой функции $\tilde{u}(\nu)$ должна быть аналитической функцией во всех точках верхней полуплоскости. Из чего следует, что корни знаменателя, лежащие в верхней полуплоскости должны совпадать с корнями числителя. Из этого условия следуют два уравнения: $u'(0)\nu_1^2 - u(0)i\nu_1^3 - \frac{P}{EI} = 0;\ u'(0)\nu_2^2 - u(0)i\nu_2^3 - \frac{P}{EI} = 0$.

Подставляя в систему уравнений выражения корней знаменателя, $\nu_1 = \sqrt{2}\beta e^{i\frac{\pi}{4}} = \beta(1+i)$ и

$$\nu_2 = -\sqrt{2}\beta e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\beta(1-i) \qquad (5)$$

получим:

$$u'(0)\nu_1^2 - u(0)i\nu_1^3 - \frac{P}{EI} = 0 \qquad (6)$$
$$u'(0)\nu_2^2 - u(0)i\nu_2^3 - \frac{P}{EI} = 0$$

$$iu'(0) - \sqrt{2}iu(0)\beta e^{3i\frac{\pi}{4}} = \frac{P}{2\beta^2 EI} \qquad (7)$$
$$-iu'(0) + \sqrt{2}iu(0)\beta e^{-3i\frac{\pi}{4}} = \frac{P}{2\beta^2 EI}$$

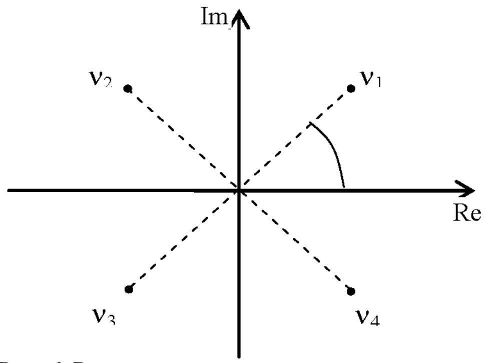

Рис. 1 Расположение корней на комплексной плоскости Складывая левые и правые части уравнений, получим:

$$u(0)\left[\frac{e^{-3i\frac{\pi}{4}} - e^{3i\frac{\pi}{4}}}{2i}\right]\sqrt{2} = \frac{P}{2\beta^3 EI} \qquad (8)$$

$$u(0)\sqrt{2}\sin 3\frac{\pi}{4} = \frac{P}{2\beta^3 EI} \Rightarrow u(0) = \frac{P}{2\beta^3 EI} \qquad (9)$$

Для определения угла поворота подставим поученное выражение для прогиба в уравнение:

$$iu'(0) - \sqrt{2}i\frac{P}{2\beta^3 EI}\beta e^{3i\frac{\pi}{4}} - \frac{P}{2\beta^2 EI} = 0 \qquad (10)$$

Выполнив необходимые алгебраические преобразования, получим:

$$u'(0) = -\frac{P}{2\beta^2 EI} \qquad (11)$$

при x=0 $\qquad u(0) = -\frac{P}{2EI\beta} \qquad (12)$

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{P}{2uEI}} \qquad (13)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \qquad (14)$$

Из уравнений (13, 14) получаем коэффициент постели основания для полубесконечной балки:

$$k = 4EI\sqrt[3]{\left(\frac{P}{u}\frac{1}{2EI}\right)^4} \qquad (15)$$