ЧЕЧЕЙБАЕВ Б.Ч., ЭСТЕБЕСОВА Н.Т
Кыргызский Национальный Университет им.Ж.Баласагына
УДК 681.3.06+004.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯЗЫКОВ ВЫСОКОГО УРОВНЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Составлены программы на языке Паскаль и DELPHI для расчета распределения температуры

Паскаль жана DELPHI тилдеринде температуранын бөлүштүрүлүшүн эсептөө үчүн программалар түзүлгөн

The programs constituted with Pascal and Delphi languages for calculation of distribution of temperature.

В настоящее время одним их основных способов исследования и решения в целом является вычислительный эксперимент. Для численного моделирования разнообразных задач механики сплошных и многофазных сред используются современные методы вычислительной математики: метод крупных частиц Давыдова, метод конечных элементов метод, контрольного объема, метод дробных шагов и.т.д. Поэтому в процессе подготовки высококвалифицированных специалистов в области прикладной математики и физики необходимо научит студентов к самостоятельной подстановке задач и решений к уравнениям математической физики. Известно, что многие явления природы: распределения теплоты в сплошной среде, фильтрационные течения жидкости и газа в изотропных и анизотропных средах, процессы диффузии описываются уравнениями в частных производных второго порядка параболического типа. В действительности уравнения, описывающие происходящих процессов в природе, являются нелинейными. Однако в период обучения студентов в вузах необходимо привить им навыки решения линейных уравнений математической физики, которое являются основополагающими в формировании знаний и умений у студентов.

В связи с развитием информационных технологий в учебном процессе успешно применяются современные пакеты прикладных программ Mathcad, Matlab, Maple и др.

Для численного решения уравнений математической физики с соответствующими начальными краевыми условиями традиционно применяются метод сеток. В данной работе описывается список построения разностных уравнений и условий для решения задач уравнений математической физики параболического типа. Программы алгоритмически состовляются на языках Pascal и Delphi.

Метод сеток для уравнений параболического типа (уравнение теплопроводности)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\mathrm{Z_n} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = -f(x,t) \qquad a^2 = \mathrm{const} > 0 \tag{1}$$

$$u/_{t=0} = \varphi(x) \tag{2}$$

Возьмем прямоугольную сетку $x = mh,\ t = nk\ (m, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$

Используя формулы численного дифференцирования, можно записать уравнение разностный аналог дифференциального уравнения

$$Z_u \approx Z_{m,n}u = \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} - \frac{1}{a^2}\frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{k} \tag{3}$$

Пологая далее $\dfrac{a^2k}{h^2} = r = const,$ (4)

равенство (3) можно записать в виде

$$Z_u \approx Z_{m,n}u = \frac{u_{m+1,n} - u_{m-1,n}}{h^2} + \left(\frac{1}{r} - 2\right)\frac{u_{m,n}}{h^2} - \frac{1}{r}\frac{u_{m,n+1}}{h^2} \qquad (5)$$

Задаче Коши (1), (2) будет соответствовать разностная краевая задача

$$Z_{m,n}u = \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \left(\frac{1}{r} - 2\right)\frac{u_{m,n}}{h^2} - \frac{1}{r}\frac{u_{m,n+1}}{h^2} = -f_{m,n}$$

Эту разностную краевую задачу можно записать в виде

$$u_{m,n+1} = r(u_{m+1,n} + u_{m-1,n}) + (1-2r)u_{m,n} + h^2 r f_{m,n} \qquad (6)$$

$$u_{m,o} = \varphi_m \qquad (7)$$

Отметим, что в частных случаях, т.е. при $\mathrm{r} = \frac{1}{2}$ и $\mathrm{r} = \frac{1}{6}$ уравнение (6) примет вид

$$u_{m,n+1} = \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n}}{2} + \frac{h^2}{2} f_{m,n} \qquad (8)$$

$$u_{m,n+1} = \frac{1}{6}\left(u_{m+1,n} + 4u_{m,n} + u_{m-1,n}\right) + \frac{h^2}{6} f_{m,n} \qquad (8')$$

Уравнение (6) показывает, что независимо от выбора шагов сетки (независимо от значения $r = \frac{a^2 k}{h^2}$), отправляясь от начальных условий (7), можно путем последовательных вычислений можно найти значение $u(x,t)$ в любой точке сетки и тем самым, получить приближенное решения задачи Коши (6), (7). Однако сходимость численного решения $u(x,t)$ при $\mathrm{h} \to 0$ к точному решению задачи Коши и устойчивость счета по формуле (6) самым существенным образом связаны с выбором соотношения шагов сетки по осям x и t. При выборе шагов сетки, подчиненных условию

$$r = \frac{a^2 k}{h^2} < \frac{1}{2}, \qquad (9)$$

погрешность приближенного решения задачи Коши методом сеток, т.е. приближенного равенства $u_{m,n} \approx u$, есть $O(h^2)$ и, в частности, при $f(x,t) = 0$ величина погрешности будет $O(h^6)$, если $r = \frac{1}{6}$.

Решение задач методом сеток для двумерного уравнения теплопроводности

Пусть требуется решить задачу Коши для двумерного уравнения теплопроводности

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = -f\left(x,y,t\right) \qquad (a^2 = const > 0) \qquad (10)$$

$$u/_{t=0} = \varphi(x) \qquad (11)$$

В качестве узлов сетки возьмем точки $x = mh,\ \mathrm{y} = nk,\ t = pk \quad (m,n,p = 0,\pm1,\pm2,...)$. Введем далее разносный аналог дифференциального оператора Лапласа для равномерной сетки:

$$\Delta u = \frac{1}{h^2}\left[u(x+h,y) + u(x,y+h) + u(x-h,y) + u(x,y-h) - 4u(x,y)\right] \qquad (12)$$

Для оператора Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ имеет место равенство $\Delta_h u = \Delta u + O(h^2)$.

Учитывая, что $u\big|_{t+k} - u\big|_t = \frac{\partial u}{\partial t}k + O(k^2) = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{rh^2}{a^2} + O(h^4)$, где r определяется равенством $r = \frac{a^2 k}{h^2}$, для разностного оператора

$$Z_h u = \Delta_h u - \frac{1}{r}\frac{u(x,y,t+k)-u(x,y,t)}{h^2} \qquad (13)$$

имеем $Z_h u = Zu + O(h^2)$ (14)

Естественно теперь искать приближенное решение задачи Коши (10), (11) в виде решения разностной краевой задачи

$$Z_h u = -f_{m,n.p}, \qquad u_{m,n,0} = \varphi_m$$

или в развернутой форме

$$u_{m,n,p+1} = r(u_{m+1,n,p} + u_{m,n+1,p} + u_{m-1,n,p} + u_{m,n-1,p}) + u_{m,n,p}(1-4r) + h^2 r f_{m,n,p} \qquad (15)$$

$$u_{m,n,0} = \varphi_{m,n} \qquad (16)$$

Где $u_{m,n,p}$ и $f_{m,n,p}$ - значение u и f в точке $x = mh,\ у = nk,\ t = pk = p\frac{h^2 r}{a^2}, \varphi_{m,n}$ - значение $\varphi(x,y)$ в точке $x = mh,\ у = nk.$

Пример

Требуется найти температуру $u(x,y,t)$ в центре квадратной пластинки $-\frac{1}{2} < x,\ \ y < \frac{1}{2}$ в момент времени $t = k = \frac{rh^2}{a^2}$, если температура на границе пластинки равно нулю, а начальной момент времени распределение температуры определяется равенством $u\big|_{t=0} = \cos^2 \pi x \cdot \cos^2 \pi y$, принимая при этом $h = \frac{1}{4},\ \ r = \frac{1}{4}$.

Соответствующее разностное уравнение, в силу уравнения (15), запишется в виде

$$u_{m,n,p+1} = \frac{1}{4}(u_{m+1,n,p} + u_{m,n+1,p} + u_{m-1,n,p} + u_{m,n-1,p})$$

Здесь центру квадрата соответствует m=n=0, интересующему нас моменту времени $t = k = \frac{rh^2}{a^2}$ соответствует p=1. Из разностного уравнения имеем $u_{0,0,1} = \frac{1}{4}(u_{1,0,0} + u_{0,1,0} + u_{-1,0,0} + u_{0,-1,0})$.

Подставляя сюда известные значения u из начальных условий, получаем приближенное значение искомой температуры

$$u_{0,0,1} = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Аналогичным образом можно найти температуру во всех точках сетки, лежащих внутри квадрата в различные моменты времени.

Задача

Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{dt} = 0,\quad u\big|_{t=0} = 0,\quad u\big|_{x=0} = b,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ \ b = const,\ \Delta x = h = \frac{1}{10};\ r = \frac{a^2 k}{h^2} = \frac{1}{6};\ k = \Delta t \text{ К}$$

раевые условия: $u_{0,n} = 6,\quad u_{10,n} - u_{0,n} = 0 \quad u_{m,n+1} = \frac{1}{6}(u_{m+1,n} + 4u_{m,n} + u_{m-1,n}) + \frac{h^2}{2} f_{m,n}$

Ниже приводится программа на языке Паскаль для расчета распределения температуры

Язык программирования на языке PASCAL

```
program Teplo;
uses
SysUtilis;
 const h=0.1; a=1;b=10;n=10;m=5;
```

```
type mat=array[0..n,0..m] of real;
var
x,t,k:real;
i,j:integer;
u:mat;
begin
k:=h*h/6;
for i:=0 to n do
begin
x:=i*h;
u[i,0]:=0;
end;
for j:=0 to m do
begin
t:=j*k;
u[0,j]:=b;
u[10,j]:=b;
end;
for i:=1 to n-1 do
begin
for j:=1 to m-1 do
u[i,j+1]:=(u[[i=1,j]+4*u[i,j]+u[i-1,j])/6;
end;
for i:=1 to n-1 do
begin
for j:=1 to m-1 do
Write ('u[',i,',',j,']=',u[i,j]:8:4,' ');
Writeln;
end;
writeln; writeln; writeln;
for i:=1 to n-1 do
begin
for j:=1 to m-1 do
Write ('u[',i,',',j,']=',u[i,j]:3:3,' ');
Writeln;
end;
writeln; writeln; writeln;
for i:=1 to n-1 do
begin
for j:=1 to m-1 do
Write ('u[',i,',',j,']=',u[i,j]:4:4,'    ');
Writeln;
end;
readlin;
end.
```

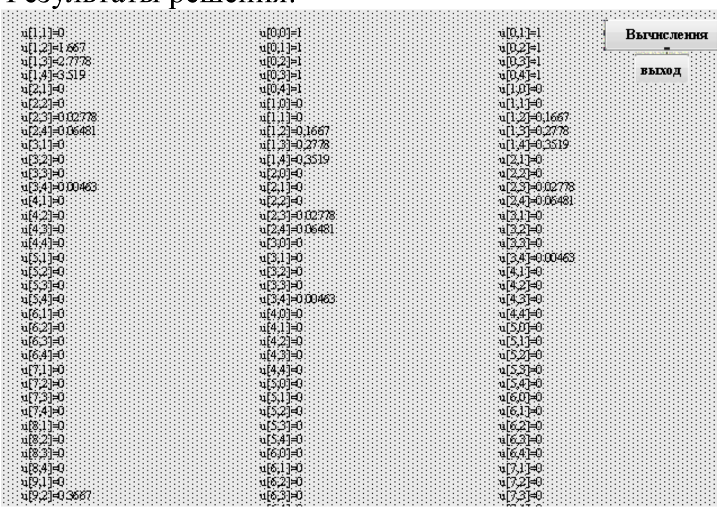
```
u[1,1]=0.0000   u[1,2]=1.6667   u[1,3]=2.7778   u[1,4]=3.5185
u[2,1]=0.0000   u[2,2]=0.0000   u[2,3]=0.2778   u[2,4]=0.6481
u[3,1]=0.0000   u[3,2]=0.0000   u[3,3]=0.0000   u[3,4]=0.0463
u[4,1]=0.0000   u[4,2]=0.0000   u[4,3]=0.0000   u[4,4]=0.0000
u[5,1]=0.0000   u[5,2]=0.0000   u[5,3]=0.0000   u[5,4]=0.0000
u[6,1]=0.0000   u[6,2]=0.0000   u[6,3]=0.0000   u[6,4]=0.0000
u[7,1]=0.0000   u[7,2]=0.0000   u[7,3]=0.0000   u[7,4]=0.0000
u[8,1]=0.0000   u[8,2]=0.0000   u[8,3]=0.0000   u[8,4]=0.0000
u[9,1]=0.0000   u[9,2]=1.6667   u[9,3]=2.7778   u[9,4]=3.5185

u[1,1]=0.000    u[1,2]=1.667    u[1,3]=2.778    u[1,4]=3.519
u[2,1]=0.000    u[2,2]=0.000    u[2,3]=0.278    u[2,4]=0.648
u[3,1]=0.000    u[3,2]=0.000    u[3,3]=0.000    u[3,4]=0.046
u[4,1]=0.000    u[4,2]=0.000    u[4,3]=0.000    u[4,4]=0.000
u[5,1]=0.000    u[5,2]=0.000    u[5,3]=0.000    u[5,4]=0.000
u[6,1]=0.000    u[6,2]=0.000    u[6,3]=0.000    u[6,4]=0.000
u[7,1]=0.000    u[7,2]=0.000    u[7,3]=0.000    u[7,4]=0.000
u[8,1]=0.000    u[8,2]=0.000    u[8,3]=0.000    u[8,4]=0.000
u[9,1]=0.000    u[9,2]=1.667    u[9,3]=2.778    u[9,4]=3.519

u[1,1]=0.0000   u[1,2]=1.6667   u[1,3]=2.7778   u[1,4]=3.5185
u[2,1]=0.0000   u[2,2]=0.0000   u[2,3]=0.2778   u[2,4]=0.6481
u[3,1]=0.0000   u[3,2]=0.0000   u[3,3]=0.0000   u[3,4]=0.0463
u[4,1]=0.0000   u[4,2]=0.0000   u[4,3]=0.0000   u[4,4]=0.0000
u[5,1]=0.0000   u[5,2]=0.0000   u[5,3]=0.0000   u[5,4]=0.0000
u[6,1]=0.0000   u[6,2]=0.0000   u[6,3]=0.0000   u[6,4]=0.0000
u[7,1]=0.0000   u[7,2]=0.0000   u[7,3]=0.0000   u[7,4]=0.0000
u[8,1]=0.0000   u[8,2]=0.0000   u[8,3]=0.0000   u[8,4]=0.0000
u[9,1]=0.0000   u[9,2]=1.6667   u[9,3]=2.7778   u[9,4]=3.5185
```

Программирование на языке DELPHI

```
unit Unit1;
interface
uses
Windows, Messages, SysUtilis, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms, Dialogs, StdCtrls, Buttuns;type
TForm1=class(TForm)
Label1:TLabel;
Label2:TLabel;
Label3:TLabel;
BitBtn1:TBitBtn;
BitBtn2:TBitBtn;
procedure BitBtn1Click(Sender:TObject);
procedure BitBtn2Click(Sender:TObject);
private
{Private declarations}
public
{Public declarations }
end;
var
Form1:TForm1;
implementation
{$R*.dfm}
const h=0.1;a=1;b=1;n=10;m=5;
type mat-array[0..n,0..m]of real;
procedure TForm1.BitBtn1Click(Sender:TObject);
var
x,t,k:real;
i,j:integer;
u:mat;
begin
k:=h*h/6;
for i:=0 to n do
begin
x:=i*h;
u[i,0]:=0
end;
for j:=0 to m do
begin
```

```
t:=j*k;
u[0,j]:=b;
u[10,j]:=b;
end;
for i:=1 to n-1 do
begin
for j:=1 to m-1 do
u[i,j+1]:=(u[i+1,j]+4*u[i,j] +u[i-1,j])/6;
end;
for i:=0 to n do
begin
for j:=0 to m do
Label1.Caption:= Label1.Caption+’u[‘+IntToStr(i)+’,’+ IntToStr(j)+’]=’
+FloatToStrf(u[i,j],ffGeneral,4,4)+#13;
end;
for i:=0 to n do
begin
for j:=0 to m do
Label2.Caption:= Label2.Caption+’u[‘+IntToStr(i)+’,’+ IntToStr(j)+’]=’
+FloatToStrf(u[i,j],ffGeneral,4,4)+#13;
end;
for i:=0 to n do
begin
for j:=0 to m do
Label3.Caption:= Label3.Caption+’u[‘+IntToStr(i)+’,’+ IntToStr(j)+’]=’
+FloatToStrf(u[i,j],ffGeneral,4,4)+#13;
end;
end;
procedure TForm1.BitBtn2Click(sender:TObject);
begin
Form1.Close;
end;
end.
```

Результаты решения:



Литература:

1. Чечейбаев А.Б., Жумаев М.У., Чечейбаев Б.Ч., Тельтаева А.К. Численные методы и программирование на алгоритмических языках PASCAL и Delphi. Бишкек, 2010

2. Культин Н. Основы программирования в Delphi 2008.Санкт-Петербург , 2008