ИСМАИЛОВ Б.И., РАМАТОВ К.С.
Национальная академия наук Кыргызской Республики[1],
Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова[2]

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ НДС ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ

Важнейшей структурной характеристикой массива горных пород является трещиноватость, сложившаяся в результате исторического развития его геологии. Трещины в горных породах различают по геометрии, морфологии, возрасту, генезису и механизму образования. Под системой трещин понимают совокупность трещин, примерно параллельных друг другу. Несколько систем или хаотически ориентированных трещин образуют пространственную сеть трещин. Основными параметрами этой сети являются густота трещин, их ширина и протяженность в плоскости обнажения, угол и азимут падения плоскости трещин [6].

Геометрические параметры трещин, в первую очередь их протяженность, несут информацию об их прочностных характеристиках. В работе [3] предлагаются следующие зависимости прочностных свойств c_1 и φ_1 по трещинам от свойств вмещающих пород c_0, φ_0 и протяженности трещин L. Для трещин очень большой протяженности (L>50 м), например, крупных тектонических нарушений, сцепление $c_1=0$, а угол внутреннего трения $\varphi_1 << \varphi_0$; для тектонических трещин (50м < L < 500м) сцепление $c_1<0{,}01<c_0$, угол внутреннего трения $\varphi_1 < \varphi_0$; для литогенных трещин и трещин тектонического происхождения (30м < L < 50м) сцепление $0{,}01c_0 < c_1 <0{,}1c_0$; для трещин небольшой протяженности (L<30 м) сцепление c1 в несколько раз меньше сцепления c_0, а угол внутреннего трения $\varphi_1 \approx \varphi_0$; для трещин, заполненных материалом, прочностные характеристики определяются материалом заполнителя.

Рассмотрим в условиях плоской деформации однородный и изотропный породный массив, содержащий тектонические нарушения. Применение прямого метода граничных элементов (ПМГЭ) к такой среде не оптимально с точки зрения вычислительного процесса [2]. Более эффективным оказывается применение специальных форм граничных интегральных уравнений (ГИУ), позволяющих использовать ту особенность контактных задач, что усилия на соприкасающихся границах остаются непрерывными и зависят только от линейных комбинаций предельных значений разрыва смещений. Это почти вдвое снижает число неизвестных и существенно упрощает расчеты. Пусть в массиве расположена выработка произвольной формы, вблизи которой имеется произвольная трещина **c** (рис.1.).

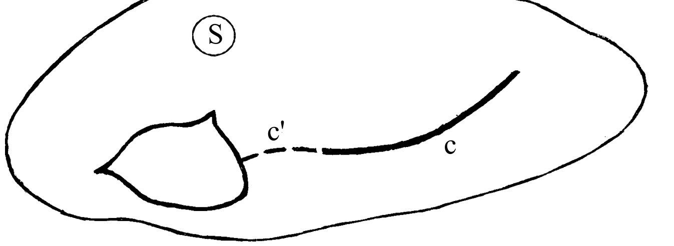

Рис. 1. Трещина вблизи выработки

Сделаем мысленный разрез ñ′, соединяющий трещину **c** с контуром выработки S. Тогда границу неограниченного массива можно представить состоящей из контура S и поверхностей c'^{+}, c'^{-} и c^{+}, c^{-}, где знаками "+" и "-" обозначены разные берега трещины c' и **c** соответственно. ГИУ для такого массива имеет вид [4]

$$c_{ij}u_j(\xi) = \int_s [U_{ij}(x,\xi)p_j(x) - P_{ij}(x,\xi)u_j(x)]ds + \int_{c^+} P_{ij}(x,\xi)\Delta u_j(x)dc\,. \qquad (1)$$

Здесь $u_j(x)$ и $p_j(x)$ - компоненты векторов смещений и нагрузок (усилий) соответственно; ξ- точка приложения нагрузки, x - точка поля; $\Delta u_j = u_j^+ - u_j^-$ - разность смещений площадок, расположенных на разных берегах трещины; второй интеграл вычисляется только по положительному берегу трещины; интеграл по разрезу $\tilde{n}'$ пропадает, т.к. на разрезе выполняются условия совместности деформаций, т. е. $p_j^+ = -p_j^-$ и $u_j^+ = u_j^-$; Тензоры U_{ij} и P_{ij} являются фундаментальными сингулярными решениями теории упругости [2].

Соотношения (1) не дают замкнутой системы уравнений, так как на поверхности **c** неизвестными являются разрывы смещений Δu_j. Построим дополнительное ГИУ, для чего из (1) найдем нагрузки, действующие на поверхности. Для этого, продифференцировав (1) с помощью закона Гука, найдем напряжения в теле. Поскольку дифференцирование проводится по координате ξ, а функции u_j и p_j зависят только от x, то, меняя местами операции дифференцирования и интегрирования, получим

$$\sigma_{kj}(\xi) = \int_S \left[T_{ijk}(x,\xi)p_i(x) - E_{ijk}(x,\xi)u_i(x)\right]ds + \int_{c^+} E_{ijk}(x,\xi)\Delta u_i(x)dc. \qquad (2)$$

Для получения явного выражения тензоров T_{ijk} и E_{ijk} необходимо продифференцировать тензоры U_{ij} и P_{ij} по координате ξ. После несложных преобразований находим:

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= -\frac{2\mu c_1}{r}\left[(1-2\nu)\left(\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}\right) + 2r_{,i}\,r_{,j}\,r_{,k}\right], \\ E_{ijk} &= \frac{c_2}{r^2}\left\{\begin{aligned} &2\left[\nu\left(r_{,k}\,\delta_{ij} + r_{,j}\,\delta_{ik}\right) + c_3 r_{,i}\,\delta_{jk} - r_{,i}\,r_{,j}\,r_{,k}\right]r_{,s}\,n_s + \left(2c_3 r_{,j}\,r_{,k} - c_4\delta_{jk}\right)n_i + \\ &+ \left(2\nu r_{,i}\,r_{,j} + c_3\delta_{ij}\right)n_k + \left(2\nu r_{,i}\,r_{,k} + c_3\delta_{ik}\right)n_j \end{aligned}\right\}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где c_1, c_2, c_3 и c_4 – постоянные, зависящие от упругих характеристик массива. Уравнение (2) с учетом (3) дает напряжения внутри тела.

Устремляя сингулярную точку ξ к поверхности с и используя связь поверхностной нагрузки с напряжениями $p_i = \sigma_{ij}n_j$, будем иметь

$$p_j^+ = n_k^+\left[\int_S \left(T_{ijk}p_i - E_{ijk}u_i\right)ds + \int_{c^+} E_{ijk}\Delta u_i dc\right]. \qquad (4)$$

Соотношение (4) дает дополнительные выражения для получения полностью замкнутой системы уравнений. Применяя далее обычную процедуру дискретизации поверхности тела граничными элементами, внутри которых перемещения u_i и нагрузки p_i выражаются через их значения в узловых точках u_i^α и p_i^α с помощью функций формы, граничные интегральные уравнения можно свести к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [2]. При прямом вычислении интегралов в уравнении (2) от функции E_{ijk}, имеющей сингулярность $1/r^2$, возникают математические трудности, так как интегралы с такой особенностью являются расходящимися. Выделим ε - окрестность вблизи точки сингулярности и разобьем интеграл от функции E_{ijk} на два интеграла - вне ε-окрестности и внутри нее:

$$\int_C E_{ijk}\Delta u_i dc = \int_{C-\varepsilon} E_{ijk}\Delta u_i dc + \int_\varepsilon E_{ijk}\Delta u_i dc. \qquad (5)$$

Для достаточно малой величины ε функцию $\Delta u_i(x)$ можно принять постоянной и равной $\Delta u_i(\xi)$, тогда $\int_\varepsilon E_{ijk}\Delta u_i dc = \Delta u_i(\xi)\int_\varepsilon E_{ijk}dc$. При этих условиях справедливо уравнение $\oint E_{ijk}dc = 0,$ которое является следствием применения дифференциального оператора к интегральному уравнению равновесия $\oint E_{ijk}dc = D_k \oint P_{ij}dc$. Здесь интеграл берется по произвольному контуру, охватывающему сингулярную точку,следовательно, интеграл по отрезку, проходящему через сингулярную точку, заменяется интегралом по полуокружности радиуса ε :

$$\int E_{ijk}dc = -\int_{\rho=\varepsilon} E_{ijk}dc.$$

Поскольку $E_{ijk} = \varepsilon_{ijk}/r^2$, где ε_{ijk} - регулярная функция, то последний интеграл может быть вычислен аналитически:

$$\int_{\rho=\varepsilon} \frac{\varepsilon_{ijk}(\varphi)}{\rho^2}\rho d\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\pi} \varepsilon_{ijk}(\varphi)d\varphi.$$

При этом выражение (5) примет вид

$$\int_c E_{ijk}\Delta u_i dc = \int_{c-\varepsilon} E_{ijk}\Delta u_i dc - \frac{\Delta u_i(\xi)}{\varepsilon}\int_0^{\pi} \varepsilon_{ijk}(\varphi)d\varphi.$$

Так как при вычислении первого интеграла выделяется слагаемое, аналогичное последнему, но противоположное по знаку, то они уничтожаются и интеграл от функции E_{ijk} можно вычислять обычными методами, не обращая внимания на сингулярность. В результате приходим к интегралу от сингулярной функции с особенностью $1/r^2$, получившему название конечно-частного интеграла, который эффективно применяют при решении граничных интегральных уравнений для задач с криволинейными трещинами.

Из приведенных решений следует, что конечный результат не зависит от места расположения точки ξ на поверхности трещины. Это, в свою очередь, свидетельствует о правильности исходного интегрального уравнения и возможности применения конечно-частных интегралов при решении задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с трещинами. При этом подынтегральная функция в сингулярных конечно-частных интегралах терпит разрыв, и аппроксимация ее с помощью полиномов не может дать хороших результатов. К тому же конечно-частные интегралы от положительных функций отрицательны. Остановимся подробнее на их вычислении.

После разбиения поверхности c^+ на граничные элементы и введения локальных координат приходим к необходимости вычислять интеграл вида

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{f(r)}{r^2}d\eta. \qquad (6)$$

Здесь η - локальная координата, f(r)- регулярная функция. Пусть сингулярной точке ξ (r=0) соответствует локальная координата η_o. Умножив и разделив подынтегральную функцию в последнем выражении на $(\eta-\eta_o)^2$, приходим к следующему интегралу:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(\eta-\eta_0)^2}\left[\frac{(\eta-\eta_0)^2}{r^2} f(r)\right]d\eta. \qquad (7)$$

При этом функция $F = f(r)\frac{(\eta-\eta_0)^2}{r^2}$ регулярна на отрезке (-1,1); в окрестности точки η_o ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$F(\eta) = F_0 + F_1(\eta-\eta_0) + F_i(\eta-\eta_0)^i, \qquad (8)$$

где F_0 и F_1 - соответственно значения самой функции F и ее производной в точке η_o.

Подставляя разложение (8) в интеграл (7), а также используя свойства конечно-частного интеграла и понимая второй интеграл в смысле главного значения, получим

$$I = -\frac{2}{1-\eta_0^2}F_0 + F_1 \ln\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} + \int_{-1}^{1} F_i(\eta-\eta_0)^{i-2}d\eta. \qquad (9)$$

Функция $F_i(\eta-\eta_0)^{i-2}$ регулярна, интеграл от нее можно вычислять стандартными численными методами.

Предлагаемая ГЭ-модель позволяет легко определять НДС произвольных областей, содержащих трещины.

Численная реализация изложенной модели может иметь вид, показанный на рис. 2.

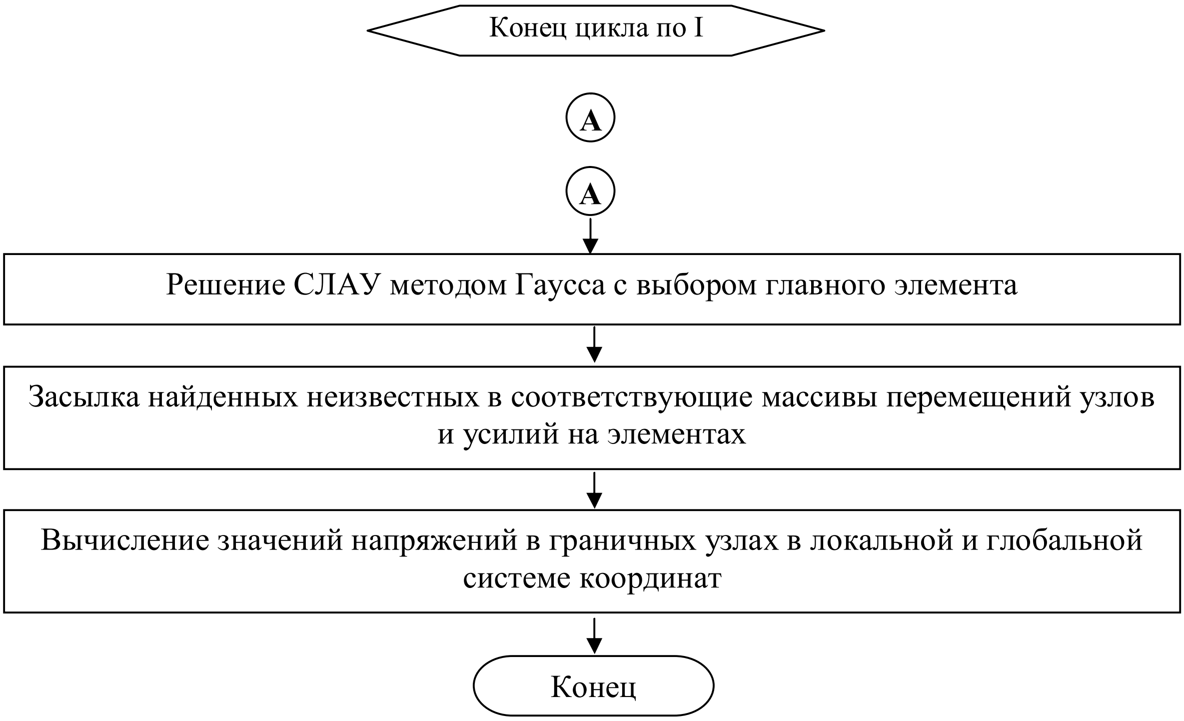

Рис. 1. Алгоритм численной реализации ГЭ – моделирования задачи исследования НДС массива с трещинами

Для реализации описанного метода решения геомеханических задач разработано программное обеспечение “BEMGEO” (аббревиатура, образованная от “Boundary element method in geomechanics”) с использованием известной в современном информационном мире среде разработки Visial FORTRAN 6.0 – программного продукта в составе комплекса Visial Studio 6.0.

Программа “BEMGEO” позволяет исследовать НДС массива (конечного или бесконечного) с различными структурными особенностями (блочная неоднородность, трещиноватость, анизотропия), находящегося в условиях действия естественного поля напряжений и нарушенного проведением горных работ.

По требованию ПО осуществляется дискретизация границ рассматриваемого массива с помощью квадратичных граничных элементов, не обязательно равных между собой по длине, при условии сгущения элементов по мере приближения к угловым узлам, а также точкам, в которых происходит разрыв в значениях нагрузок (усилий).

Литература:

1. Айтматов И.Т. Геомеханика рудных месторождений Средней Азии.- Фрунзе: Илим, 1987. – 247 с.
2. Кожахметов К.Х. Метод граничных элементов в задачах геомеханики. – Бишкек: «Кыргызстан», 2000. – 291 с.
3. Мартынов Ю.И. Оценка интенсивности трещиноватости массива горных пород в геомеханике // Инж. геология, 1985, №1, с. 94-100.
4. Раматов К.С. Гранично-элементная модель расчета напряженно-деформированного состояния однородного массива горных пород с тектоническими трещинами // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И.Раззакова, № 17, 2009, с. 208-212.
5. Руппенейт К.В. Деформируемость массивов трещиноватых горных пород. - М.: Недра, 1975. – 223 с.
6. Чернышев С.Н. Трещины горных пород. - М.: Наука, 1983. – 240 с.