МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРАЖЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛИ

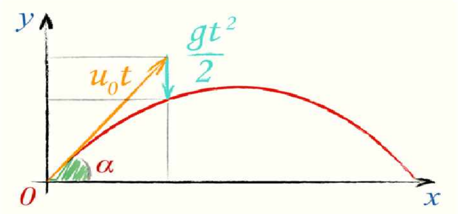
Щербакова Е.А., Маданбекова А.Б.,
рук., Джаманбаев М.Дж.
Кыргызский государственный технический университет
им. И. Раззакова, Бишкек,Кыргызская Республика

Цель работы: Создание математической модели, описывающую адаптацию движения одного тела к другому.

Методика исследования: Используются модель движения тела брошенного под углом к горизонту.

Введение: При движении тела под углом к горизонту в полете на него действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Если силой сопротивления пренебречь, то остаётся единственная сила – сила тяжести. Поэтому вследствие **2-го закона Ньютона** тело движется с ускорением, равным ускорению свободного падения; проекции ускорения на координатные оси равны $\mathbf{a_x = 0}$, $\mathbf{a_y = -g}$.

Движение летящего тела можно представить как наложение двух независимых движений: равномерного движения вдоль горизонтальной оси (оси X) и равноускоренного движения вдоль вертикальной оси (оси Y) (рис. 1).



Проекции скорости тела имеют вид :

$\mathbf{v_x=v_{xo} = v_o\cos\alpha,}$

$\mathbf{v_y = v_{yo} - gt = v_o\sin\alpha\text{-}gt}$

В нашем случае тело начинает движение от начала координат

$$\mathbf{x_o = y_o = 0}$$

Тогда $x=\mathbf{v_o t\cos\alpha}$ (1)

$y= \mathbf{v_o\, t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2}$ (2)

С помощью **(1),(2)** определим время полёта брошенного тела к горизонту. Для этого положим координату **y** равной нулю, т.к. в момент приземления высота тела равна нулю. Отсюда получаем формулу для времени полёта:

$\mathbf{t_o = \frac{2v_o\sin\alpha}{g}}$ (3)

Дальность полёта получим из первой формулы **(1).** Дальность полёта – это значение координаты **x** в конце полёта, т.е. в момент времени, равный $\mathbf{t_0}$. Подставляя значение **(3)** в формулу **(1),** получаем: $\mathbf{l = \frac{v_o^2\sin 2\alpha}{g}}$ (4)

Из формулы видно, что наибольшая дальность полёта достигается при значении угла бросания, равном 45^0 . Наибольшую высоту подъёма брошенного тела найдём из формулы **(2).** Для этого нужно подставить в эту формулу значение времени, равное половине времени полёта **(3),** т.к. именно в средней точке траектории высота полёта максимальна получаем:

$\mathbf{h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}}$ **(5)**

Из уравнений (2) можно получить уравнение траектории тела, т.е. уравнение, связывающее координаты **x** и **y** тела во время движения. Для этого нужно из первого уравнения (1) выразить время:

$\mathbf{t = \frac{x}{v_o\cos\alpha}}$ **(6)**

и подставить (5) во второе уравнение. Тогда получим: $\mathbf{y = x\,tg\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2}$ (7)

Это уравнение (6) является уравнением траектории движения. Видно, что это уравнение параболы, расположенной ветвями вниз, о чем говорит знак «-» перед квадратичным слагаемым. Согласно этой модели сформулируем следующие задачи:

Задача №1:Моделирование поражения неподвижной мишени

Построим уравнение траектории движения снаряда выстрелившего под углом к горизонту со скоростью $\mathbf{V_0 = 600}$ **м/ с,** который должен попасть в мишень, находящуюся на расстоянии **L=31 км.**

Решение. Найдём время полёта снаряда **t** и угол ***α*** под которым он должен выстрелить, чтобы попасть в мишень, находящуюся на расстоянии **L=31км**. Для этого из уравнения дальности полета **(4)**

$\mathbf{l = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}}$ найдём угол ***α.***

$\mathbf{\alpha^*=\frac{1}{2}arcsi\,n\left(\frac{lg}{v_0^2}\right)}$ **(8)**

Теперь подставив значения скорости и расстояния в формулу **(8)** получим:

$\mathbf{\alpha^*=\frac{1}{2}arcsi\,n\left(\frac{31000*9{,}8}{600^2}\right)=arcsin\ (0{,}42)=24{,}8°,}$

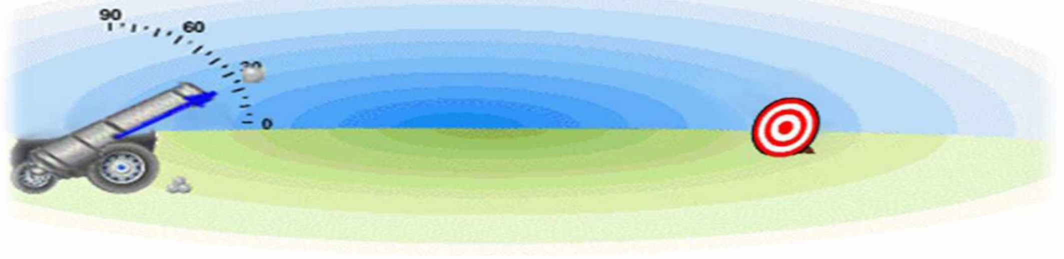
Согласно формулы (3) находим время полёта снаряда:

$\mathbf{t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}=\frac{2*600*0{,}42}{9{,}8}=51{,}4\ c.}$

С помощью прикладной программы Maple построим уравнение траектории полёта снаряда:

$> y := 0.46\cdot x - \frac{9.8}{2\cdot 600^2\cdot 0.90^2}\cdot x^2;$

$$y := 0.46\,x - 0.00001680384088\,x^2$$



Задача 2. Моделирование поражения подвижной цели, движущейся навстречу данной точке

$V_1 = 600\ \ /$

$V_2 = 4{,}2$

ш ни .

$$y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_1^2\cos^2\alpha}x^2$$

α,

$S_1 = v_1 t\cos\alpha$, $S_2 = v_2 t$ L=S_1 + $S_2 = v_1 t\cos\alpha + v_2 t = t\,(v_1\cos\alpha + v_2)$

$$t^* = \frac{L}{v_1\cos\alpha + v_2} \qquad (9)$$

α

(4)

S_1

$$v_1\cos\alpha\frac{L}{v_1\cos\alpha + v_2} = \frac{v_1^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$4v_1^2(1-\cos^2\alpha)(v_1^2\cos^2\alpha + 2v_1v_2\cos\alpha + v_2^2) = L^2g^2$$

$\cos\alpha = t$;

$$v_1^4t^2 - v_1^4t^4 + 2v_1^3v_2t - 2v_1^3v_2t^3 + v_1^2v_2^2 - v_1^2v_2^2t^2 = \frac{L^2g^2}{4}$$

$$(t^2 - t^4)v_1^4 + (2t - 2t^3)v_1^3v_2 + (1 - t^2)v_1^2v_2^2 = \frac{L^2g^2}{4}$$

```
> p := v^4·t^2 − v^4·t^4 + 2·v^3·w·t − 2·v^3·w·t^3 + v^2·w^2 − v^2·w^2·t^2;
p := v^4 t^2 − v^4 t^4 + 2 v^3 w t − 2 v^3 w t^3 + v^2 w^2 − v^2 w^2 t^2
> collect(p, [v, w, t], recursive);
(t^2 − t^4) v^4 + (2 t − 2 t^3) w v^3 + (1 − t^2) w^2 v^2
```

$t_1 = 0{,}47$ и $t_2 = 0{,}88$

$\cos\alpha = 0.47$ и $\cos\alpha = 0.88$

α=arcos(0.47)=61.96⁰

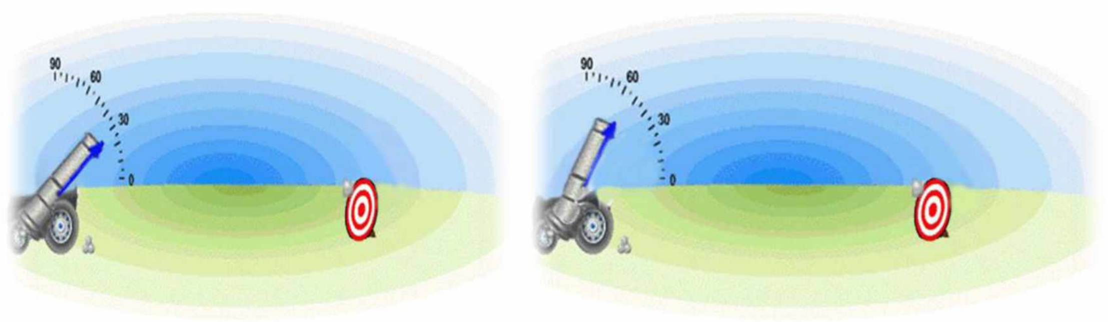
α=arcos(0.88)=28.35

$$t_1 = \frac{31000}{600 * 0{,}47 + 4{,}2} = 108{,}32c. \qquad t_2 = \frac{31000}{600 * 0{,}88 + 4{,}2} = 54{,}38c.$$

tgα: $\mathrm{tg}(61.96) = 1.88$ $\mathrm{tg}(28.35) = 0.54$

α=61.96⁰ и α=28.35⁰

```
> y := 1.88·x − 9.8/(2·600^2·0.47^2)·x^2;
y := 1.88 x − 0.00006161661888 x^2
> solve(y, x);
0., 30511.24898
> y := 0.54·x − 9.8/(2·600^2·0.88^2)·x^2;
y := 0.54 x − 0.00001757633150 x^2
> solve(y, x);
0., 30723.13469
```



Задача №3: Моделирование поражения подвижной цели движущейся навстречу на высоте

Построим уравнение траектории движения снаряда выстрелившего под углом к горизонту со скоростью $V_1 = 600$ м/с, который должен попасть в мишень, движущуюся на встречу на высоте **h** =15 км со скоростью $V_2 = 267$м/с и находящуюся до начала движения на расстоянии **L=31 км.**

Решение. Чтобы построить уравнение траектории движения $y = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_1^2\cos^2\alpha}x^2$

Найдём время столкновения и угол **α**, под которым выстрелил снаряд. Чтобы вывести значение угла α, примем данную высоту **h** для нашей точки как максимальную h_{max} и найдем угол α :

$$h_{max} = \frac{V_1^2\sin^2\alpha}{2g} \qquad \alpha^* = \arcsin\left(\frac{2hg}{V_1^2}\right)^2$$

Мы вывели формулу для вычисления угла α^*, подставим в эту формулу значения **h, l, g** и $\mathbf{V_1}$

:найдем угол и время полета

$$\alpha^* = \arcsin\left(\frac{2*15000*9{,}8}{600^2}\right)^2 = \arcsin(0{,}8) = 53{,}13^0,$$

Найдём время полёта $t = \frac{31000}{600*0{,}6+267} = 49{,}44c.$

С помощью прикладной программы Maple,построим уравнение траектории:

$$> y := 1.34 \cdot x - \frac{9.8}{2 \cdot 600^2 \cdot 0.6^2} \cdot x^2;$$

$$y := 1.34\, x - 0.00003780864198\, x^2$$

Найдём **x** , столкновение снаряда с мишенью найдём по формуле $\mathbf{x = S_1 = v_1 t\cos\alpha}$ (9)

$$\mathbf{x = 600 * 49.44 * 0.6 = 17798.4}\text{м.}$$

Литература

1. Мякишев Г.Я. Физика, Механика, 2004г.