

УДК 517.968.22

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ
ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ**

Сейдакнат кызы Э.

Исследованы вопросы построения приближенного решения задачи нелинейного граничного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, и доказана их сходимость.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; оптимальное управление; система нелинейных интегральных уравнений; приближенное решение; сходимость.

**APPROXIMATE SOLUTION OF THE BOUNDARY VECTOR
CONTROL PROBLEM FOR THE THERMAL PROCESSES
DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Seidakmat kyzy E.

The article investigates questions of construction of the approximate solutions of the nonlinear boundary optimal control problem for the thermal processes, described by Volterra integro-differential equations, and proves their convergence as well.

Key words: boundary value problem; the functional; the optimal control; system of nonlinear integral equations; approximate solution; convergence.

I. Постановка задачи оптимизации и ее полное решение

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad \beta > 0, \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи [1]

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (2)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$v_x(t, 0) = p_1 [t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = p_2 [t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t \leq T,$$

Здесь функция $v(t, x)$, $(t, x) \in Q = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ описывает состояние управляемого процесса, ядро $K(t, \tau)$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0 = \sup_{(t, \tau) \in D} |K(t, \tau)|, \quad D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T\}, \quad (5)$$

$\xi(x) \in H(0,1)$, $g(t,x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0,1)$ – заданные функции, $\bar{u}(t) = u_1(t), u_2(t)$, $\bar{u}(t) \in H^2(0,T)$ – вектор-функция управления, функции $p_1[t, \bar{u}(t)]$, $p_2[t, \bar{u}(t)] \in H(0,T)$ нелинейно зависят от вектор-функции управления и по функциональной переменной $\bar{u}(t)$ и удовлетворяют условию

$$D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in [0, T], \quad (6)$$

λ – параметр; постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени, $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Решение краевой задачи определяется по формуле

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x),$$

где $v_n(t)$ – решение линейного интегрального уравнения

$$v_n(t) = \lambda \int_0^t K_n(t, s) v_n(s) ds + a_n(t), \quad (7)$$

с ядром

$$K_n(t, s) = \int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau, \quad (8)$$

и свободным членом

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (g_n(\tau) + p_2[\tau, \bar{u}(\tau)] z_n(1) - p_1[\tau, \bar{u}(\tau)] z_n(0)) d\tau. \quad (9)$$

Коэффициенты Фурье $v_n(t)$ определяются по формуле [2]

$$v_n(t) = \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \quad (10)$$

где резольвента $R_n(t, s, \lambda)$ ядра $K_n(t, s)$ имеет вид

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad K_{n,i+1}(t, s) = \int_s^t K_n(t, \eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

и удовлетворяет оценке

$$|R_n(t, s, \lambda)| \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_n(t-s)}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_n T}{\lambda_n^2}}. \quad (12)$$

Оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения [3]:

$$\beta D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n^*(t, 0) \\ G_n^*(t, 1) \end{pmatrix} \int_0^T (G_n(\tau, 0), G_n(\tau, 1)) \begin{pmatrix} p_1(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \\ p_2(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \end{pmatrix} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n^*(t, 0) \\ G_n^*(t, 1) \end{pmatrix} h_n, \quad (13)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) - \int_0^T G_n(\tau) g_n(\tau) d\tau; \quad (14)$$

$$G_n(t)z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, s, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(s-t)} ds \right) = G_n(t, 1); \tag{15}$$

$$G_n(t)z_n(0) = -z_n(0) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, s, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(s-t)} ds \right) = G_n(t, 0);$$

$$G_n^*(t)z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) = G_n^*(t, 1), \tag{16}$$

$$G_n^*(t)z_n(0) = -z_n(0) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) = G_n^*(t, 0),$$

удовлетворяющие дополнительному условию

$$\Pi_{u_1}(\cdot, u_1, u_2) < 0, \quad \left(\Pi_{u_1}(\cdot, u_1, u_2) \Pi_{u_2}(\cdot, u_1, u_2) - \left(\Pi_{u_2}(\cdot, u_1, u_2) \right)^2 \right) > 0. \tag{17}$$

Оптимальное управление имеет структуру [4]

$$u^0(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\tilde{\theta}(t)$ является единственным решением нелинейного интегрального уравнения

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{G}[\tilde{\theta}(t)] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(\tau, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n. \tag{19}$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$ определяется по формуле

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left(e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, u^0(\tau)]) d\tau \right) ds + \right. \\ \left. + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, u^0(\tau)]) d\tau \right] z_n(x), \tag{20}$$

а минимальное значение функционала (1) вычисляется по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_1^T [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_1^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt. \tag{21}$$

Найденная тройка $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$ определяет решение задачи нелинейной оптимизации.

II. Приближенное решение задачи оптимизации

На практике не всегда удается найти точное решение уравнения (19). Поэтому в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $\theta_k(t)$ уравнения (18), где число k определяется из неравенства [5]

$$\|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}_k(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|\bar{G}[\tilde{\theta}_0(t)] + \tilde{h}(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2}. \tag{22}$$

Согласно структуре оптимального управления k – е приближение находим по формуле

$$\bar{u}_k(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}_k(t), \beta], \quad k = 1, 2, 3 \dots \tag{23}$$

Лемма 2.1. k -е приближение оптимального управления удовлетворяет оценке

$$\|u^0(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|\bar{G}[\tilde{\theta}_0(t)] + \tilde{h}(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2}, \tag{24}$$

и сходится к оптимальному управлению $u^0(t)$ по норме пространства $H^2(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\|u^0(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2} \leq \|\tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}_k(t), \beta]\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \|\bar{G}[\tilde{\theta}_0(t)] + \tilde{h}(t) - \tilde{\theta}_0(t)\|_{H^2},$$

из которого следует утверждение леммы.

Подставляя в (20) приближенное управление $\bar{u}_k(t)$, находим k -е приближение $v_k(t, x)$ оптимального процесса $v^0(t, x)$, т. е.

$$v_k(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left(e^{-\lambda_1^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_1^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right) ds + e^{-\lambda_1^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_1^2 (t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right] z_n(x). \tag{25}$$

Лемма 2.2. k -е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\|v^0(t, x) - v_k(t, x)\|_{H^2} \leq 2 \sqrt{T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right)} p_0 \|u^0(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2}, \tag{26}$$

и сходится к оптимальному процессу $v^0(t, x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Согласно (24) и (25), непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} & \|v^0(t, x) - v_k(t, x)\|_{H^2}^2 = \\ & = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left(e^{-\lambda_1^2 (t-\tau)} + \lambda \int_{\tau}^t R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_1^2 (s-\tau)} ds \right)^2 (z_n^2(0) + z_n^2(1)) d\tau \|\bar{p}[\tau, u^0(\tau)] - \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 dt \leq \\ & \leq 4T \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \lambda^2 T^2 \left[\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right]^2 \right) p_0^2 \|u^0(t) - \bar{u}_k(t)\|_{H^2}^2 < \infty \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

При исследовании сходимости оптимального процесса необходимо учитывать сходимость по резольвенте, так как приближение оптимального процесса имеет вид

$$v_k^m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left(e^{-\lambda_1^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_1^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right) ds + e^{-\lambda_1^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_1^2 (t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right] z_n(x) \tag{27}$$

и определяются двумя индексами $k, m = 1, 2, 3, \dots$. Поскольку

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \text{ и } R_n^m(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s),$$

то сходимость m -го приближения резольвенты $R_n(t, s, \lambda)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$, следует из неравенства

$$R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} |\lambda|^{i-1} |K_{n,i}(t, s)| \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{m!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right)^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}. \tag{28}$$

Лемма 2.3. k, m -е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_{H^2} \leq \\ & \leq \sqrt{\frac{3}{2} \left[\|\psi(x)\|_{H^2}^2 + T \|g(\tau, x)\|_{H^2}^2 + 2T \|p[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 \right]} \lambda T \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < \infty \end{aligned}$$

и сходится к процессу $v_k(t, x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Согласно (27) и (28), непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|v_k(t, x) - v_k^m(t, x)\|_{H^2}^2 &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t [R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda)] \left(e^{-\lambda_1^2 s} \psi_n + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^s e^{-\lambda_1^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right) ds \right]^2 dt \leq \\ &\leq 3 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\lambda_1^2} \right)^2 \left\{ \lambda^2 T \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{m!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right)^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 4T \|\bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 \right] \right\} dt \leq \\ &\leq \frac{3}{4} \lambda^2 T^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \cdot \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 4T \|\bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 \right], \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Поскольку $v_k^m(t, x)$ определяется как сумма бесконечного функционального ряда, то не всегда удается ее найти. Поэтому на практике целесообразно использовать приближение вида

$$\begin{aligned} v_k^{m,r}(t, x) &= \sum_{n=1}^r \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left(e^{-\lambda_1^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_1^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right) ds + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\lambda_1^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_1^2 (t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right] z_n(x), \end{aligned}$$

которое назовем k, m, r -м приближением оптимального процесса.

Лемма 2.4. k, m, r -е приближение оптимального процесса при $r \rightarrow \infty$ сходится к функции $v_k^m(t, x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\begin{aligned} &\|v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x)\|_{H^2}^2 = \\ &= \int_0^T \sum_{n=r+1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t, s, \lambda) \left(e^{-\lambda_1^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_1^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right) ds + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\lambda_1^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_1^2 (t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, \bar{u}_k(\tau)]) d\tau \right]^2 dt \leq \\ &\leq 3 \left[\lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 4T \|\bar{p}^2[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 4T \|\bar{p}^2[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 \right] \right] \leq \\ &\leq 3 \left[1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right] \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau, x)\|_H^2 + 4T \|\bar{p}^2[\tau, \bar{u}_k(\tau)]\|_{H^2}^2 \right] < \infty, \end{aligned}$$

которое справедливо при каждом фиксированном $k = 1, 2, 3, \dots$, так как остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$.

Лемма 2.5. k, m, r -е приближение оптимального процесса при $k, m, r \rightarrow \infty$ сходится к функции $v^0(t, x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} & \left\| v^0(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_{H^2}^2 \leq \left\| v^0(t, x) - v_k(t, x) + v_k(t, x) - v_k^m(t, x) + v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_{H^2}^2 \leq \\ & \leq \left\| v^0(t, x) - v_k(t, x) \right\|_{H^2}^2 + \left\| v_k(t, x) - v_k^m(t, x) \right\|_{H^2}^2 + \left\| v_k^m(t, x) - v_k^{m,r}(t, x) \right\|_{H^2}^2 \xrightarrow{k, m, r \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 2.1–2.4.

Поскольку оптимальный процесс имеет приближения $v_k(t, x)$, $v_k^m(t, x)$ и $v_k^{m,r}(t, x)$, то будем различать три вида приближенных значений функционала (1):

$$\begin{aligned} J[\bar{u}_k(t)] &= \int_0^1 [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_{1k}^2(t) + u_{2k}^2(t)) dt, \\ J_m[\bar{u}_k(t)] &= \int_0^1 [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_{1k}^2(t) + u_{2k}^2(t)) dt, \\ J_m^r[\bar{u}_k(t)] &= \int_0^1 [v_k^{m,r}(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_{1k}^2(t) + u_{2k}^2(t)) dt. \end{aligned}$$

Лемма 2.6. k -е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$|J[u^0] - J[\bar{u}_k]| \leq C_1 \left\| v^0(T, x) - v_k(T, x) \right\|_{H^2} + C_2 \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \varphi_0(\beta) \left\| \bar{G}[\tilde{\theta}_0(t)] + \tilde{h}(t) - \tilde{\theta}_0(t) \right\|_{H^2}, \quad (29)$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные и сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} |J[u^0] - J[\bar{u}_k]| &\leq \int_0^1 \left\{ [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx + \\ &+ \beta \int_0^T \left\{ u_1^2(t) - u_{1k}^2(t) + u_2^2(t) - u_{2k}^2(t) \right\} dt \leq \\ &\leq \left\| v^0(T, x) + v_k(T, x) - 2\xi(x) \right\|_{H^2} \left\| v^0(T, x) - v_k(T, x) \right\|_{H^2} + \\ &+ \beta \left\| u^0(t) + \bar{u}_k(t) \right\|_{H^2} \left\| u^0(t) - \bar{u}_k(t) \right\|_{H^2} \leq \\ &\leq C_1 \left\| v^0(T, x) - v_k(T, x) \right\|_{H^2} + C_2 \left\| u^0(t) - \bar{u}_k(t) \right\|_{H^2}, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 2.1–2.2.

Лемма 2.7. m -е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$|J[\bar{u}_k] - J_m[\bar{u}_k]| \leq C_3 \left\| v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right\|_H, \quad (30)$$

где C_3 – положительные постоянные и сходится к значению функционала $J[\bar{u}_k(t)]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} |J[\bar{u}_k] - J_m[\bar{u}_k]| &\leq \int_0^1 \left\{ [v_k(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx \leq \\ &\leq \left\| v_k(T, x) + v_k^m(T, x) - 2\xi(x) \right\|_H \left\| v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right\|_H \leq C_3 \left\| v_k(T, x) - v_k^m(T, x) \right\|_H, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно лемме 2.3.

Лемма 2.8. r -е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$|J_m[\bar{u}_k] - J_m^r[\bar{u}_k]| \leq C_4 \left\| v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x) \right\|_H, \quad (31)$$

где C_4 – положительное постоянное и сходится к значению функционала $J_m[\bar{u}_k]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} |J_m[u_k] - J_m^r[u_k]| &\leq \int_0^1 \left\{ [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k^{m,r}(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx \leq \\ &\leq \|v_k^m(T, x) + v_k^{m,r}(T, x) - 2\xi(x)\|_H \|v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)\|_H \leq C_4 \|v_k^m(T, x) - v_k^{m,r}(T, x)\|_H, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммы 2.4.

Лемма 2.9. k, m, r – е приближенное значение функционала при $k, m, r \rightarrow \infty$ сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\begin{aligned} |J[u^0] - J_m^r[u_k]| &\leq |J[u^0] - J[u_k] + J[u_k] - J_m[u_k] + J_m[u_k] - J_m^r[u_k]| \leq \\ &\leq |J[u^0] - J[u_k]| + |J[u_k] - J_m[u_k]| + |J_m[u_k] - J_m^r[u_k]| \xrightarrow{k, m, r \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

которое справедливо согласно леммам 2.6–2.8.

Литература

1. Владимирова В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимирова // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. Краснов М.В. Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
3. Сейдакмат кызы Э. Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / Сейдакмат кызы Э. // Вестник КГУ им. И. Арабаева. Сер. физика, математика и информатика. Бишкек, 2014. С. 292–296.
4. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
5. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.