

УДК 517.968.22

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ВОЛЬТЕРРОВО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ**

А.К. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э.

Исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейного граничного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; оптимальное управление; система нелинейных интегральных уравнений.

**SOLUTION OF THE BOUNDARY VECTOR CONTROL PROBLEM
FOR THE THERMAL PROCESSES
DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

A.K. Kerimbekov, Seidakmat kyzy E.

The article deals with the investigated questions of solvability of the nonlinear boundary optimal control problem for the thermal processes, described by Volterra integro-differential equations. The sufficient conditions for the unique solvability of the optimization problem have been established.

Key words: boundary value problem; the functional; the optimal control; system of nonlinear integral equations.

1. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad \beta > 0 \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи [1–3]:

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$v_x(t, 0) = p_1[t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t \leq T,$$

$$v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = p_2[t, \bar{u}(t)], \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Здесь $\xi(x) \in H(0, 1)$, $g(t, x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0, 1)$ – заданные функции, $\bar{u}(t) = u_1(t)$, $u_2(t)$, $\bar{u}(t) \in H^2(0, T)$ – вектор-функция управления, функции $p_1[t, \bar{u}(t)]$, $p_2[t, \bar{u}(t)] \in H(0, T)$ нелинейно зависят от вектор-функции управления и по функциональной переменной $\bar{u}(t)$ удовлетворяет условию

$$D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u_1} & \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial p_2}{\partial u_1} & \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (5)$$

ядро $K(t, \tau)$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0 = \sup_{(t, \tau) \in D} |K(t, \tau)|, \quad D = \{0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq \tau \leq T\}, \quad (6)$$

λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$, T , – фиксированный момент времени, $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Подробное исследование краевой задачи было приведено в статье [4].

Оптимальное управление, согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [5], определяется из следующих соотношений

$$\begin{cases} \Pi_{u_1}(\cdot, u_1, u_2) = -\omega(t, 0) \frac{\partial p_1}{\partial u_1} + \omega(t, 1) \frac{\partial p_2}{\partial u_1} - 2\beta u_1 = 0, \\ \Pi_{u_2}(\cdot, u_1, u_2) = -\omega(t, 0) \frac{\partial p_1}{\partial u_2} + \omega(t, 1) \frac{\partial p_2}{\partial u_2} - 2\beta u_2 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\Pi_{u_{u_1}}(\cdot, u_1, u_2) < 0, \quad \begin{vmatrix} \Pi_{u_{u_1}}(\cdot, u_1, u_2) & \Pi_{u_{u_2}}(\cdot, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_{u_1}}(\cdot, u_1, u_2) & \Pi_{u_{u_2}}(\cdot, u_1, u_2) \end{vmatrix} > 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} & \Pi[t, v(t, x), \omega(t, x), u_1(t), u_2(t)] = \\ & = -\omega(t, 0) p_1[t, u_1(t), u_2(t)] + \omega(t, 1) p_2[t, u_1(t), u_2(t)] - \beta(u_1^2(t) + u_2^2(t)), \end{aligned}$$

а функция $\omega(t, x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned} & \omega_t + \omega_{xx} + \lambda \int_t^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau = 0; \quad 0 < x < 1; 0 \leq t < T \\ & \omega(T, x) + 2[v(T, x) - \xi(x)] = 0; \quad 0 < x < 1 \\ & \omega_x(t, 0) = 0; \quad \omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) = 0; \quad 0 \leq t < T \end{aligned} \quad (9)$$

и имеет вид

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda) [v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds - 2[v_n(T) - \xi_n] e^{-\lambda_n^2(T-t)} \right) Z_n(x), \quad (10)$$

$$v_n(T) = \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(T). \quad (11)$$

С учетом (10) и (11) перепишем условия оптимальности (7).

$$\begin{aligned} & \beta D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n^*(t, 0) \\ G_n^*(t, 1) \end{pmatrix} \int_0^T (G_n(\tau, 0), G_n(\tau, 1)) \begin{pmatrix} p_1(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \\ p_2(\tau, u_1(\tau), u_2(\tau)) \end{pmatrix} d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n^*(t, 0) \\ G_n^*(t, 1) \end{pmatrix} h_n, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) - \int_0^T G_n(\tau) g_n(\tau) d\tau; \quad (13)$$

$$G_n(t)z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, s, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(s-t)} ds \right) = G_n(t, 1); \tag{14}$$

$$G_n(t)z_n(0) = -z_n(0) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, s, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(s-t)} ds \right) = G_n(t, 0);$$

$$G_n^*(t)z_n(1) = z_n(1) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) = G_n^*(t, 1); \tag{15}$$

$$G_n^*(t)z_n(0) = -z_n(0) \left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T L_n(s, t, \lambda_n) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right) = G_n^*(t, 0).$$

II. Исследование разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений векторного оптимального управления

Для исследования однозначной разрешимости уравнения (12) сначала его перепишем в виде

$$\beta D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{u}(\tau)) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n, \tag{16}$$

где

$$\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_n(t, 0, 1) = \begin{pmatrix} G_n(t, 0) \\ G_n(t, 1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_n^*(t, 0, 1) = (G_n^*(t, 0), G_n^*(t, 1)),$$

$$\tilde{p}(t, \tilde{u}(t)) = \begin{pmatrix} p_1(t, u_1(t), u_2(t)) \\ p_2(t, u_1(t), u_2(t)) \end{pmatrix}, \quad D^{-1} \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix}$$

* – знак транспонирования.

Нелинейное интегральное уравнение (16) решается согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [6]. Положим

$$\beta D^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = \tilde{\theta}(t). \tag{17}$$

Согласно условию (5) это равенство однозначно разрешается относительно вектор-функции $\tilde{u}(t)$, т. е. имеет место равенство

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}. \tag{18}$$

С учетом (17)–(18) уравнение (16) перепишем в операторной форме

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{G}[\tilde{\theta}(t)], \tag{19}$$

где

$$\tilde{G}[\tilde{\theta}(t)] = -\bar{G}[\tilde{\theta}(t)] + \tilde{h}(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(\tau), \beta]) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n.$$

Далее исследуем вопросы разрешимости уравнения (19).

Лемма 1. $\tilde{h}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n \in H^2(0, T) = H(0, T) \times H(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T \|\tilde{h}(t)\|^2 dt = \int_0^T \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) h_n \right\|^2 dt \leq \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\| \|h_n\| \right)^2 dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2 dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|G_n^2(t, 0, 1)\|^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2 \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (G_n^2(t, 0) + G_n^2(t, 1)) dt \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \leq \\ &\leq 3 \left(\|\xi(x)\|_H^2 + 2 \|\psi(x)\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{(2\lambda_1^2)^2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t, x)\|_H^2 \right) < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2. При выполнении условия $\tilde{p}(t, \tilde{u}(t)) \in H^2(0, T)$, $\forall \tilde{u}(t) \in H^2(0, T)$ оператор $\bar{G}[\theta]$, действующий по формуле

$$\bar{G}[\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) d\tau,$$

является элементом пространства $H^2(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\bar{G}[\theta]\|^2 dt &= \int_0^T \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, 0, 1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1) \tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) d\tau \right\|^2 dt \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \|\tilde{G}_n(t, 0, 1)\|^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \|\tilde{G}_n^*(\tau, 0, 1)\|^2 d\tau \int_0^T \|\tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta])\|^2 dt \leq \\ &\leq 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \|\tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta])\|_{H^2}^2 < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть $\tilde{\theta}(t) \in H^2(0, T)$ и каждая из функций $\tilde{p}[t, \tilde{u}(t)]$ и $\tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]$ по функциональному аргументу удовлетворяет условию Липшица т. е.

$$\|\tilde{p}[t, \tilde{u}(t)] - \tilde{p}[t, \tilde{u}'(t)]\|_{H^2} \leq p_0 \|\tilde{u}(t) - \tilde{u}'(t)\|_{H^2}, \quad p_0 > 0, \quad (20)$$

$$\|\tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}'(t), \beta]\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \|\tilde{\theta}(t) - \tilde{\theta}'(t)\|_{H^2}, \quad \varphi_0(\beta) > 0. \quad (21)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2p_0\varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) < 1 \quad (22)$$

оператор $G[\cdot] = G_0[\cdot] + \hbar$ является сжимающим.

Доказательство. Учитывая вычисления, полученные при доказательстве леммы 2, имеем неравенство:

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}[\tilde{\theta}] - \tilde{G}[\bar{\theta}]\|_{H^2}^2 &\leq 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \|\tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta]) - \tilde{p}(t, \tilde{\varphi}[t, \bar{\theta}(t), \beta])\|_{H^2}^2 \leq \\ &\leq 4 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 p_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|\tilde{\theta}(t) - \bar{\theta}(t)\|_{H^2}^2, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\|\tilde{G}[\tilde{\theta}] - \tilde{G}[\bar{\theta}]\|_{H^2} \leq \gamma \|\tilde{\theta}(t) - \bar{\theta}(t)\|_{H^2},$$

где $\gamma = 2p_0\varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{|\lambda| TK_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) < 1$.

Следовательно, оператор $\tilde{G}[\cdot]$ является сжимающим [7].

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. $\bar{p}[t, \bar{u}(t)] \in H^2(0, T), \quad \forall \bar{u}(t) \in H^2(0, T);$
2. $D\left(\frac{\bar{p}(t, \bar{u})}{\bar{u}}\right) \neq 0, \quad \forall t \in [0, T];$
3. $\|\tilde{p}[t, \tilde{u}(t)] - \tilde{p}[t, \tilde{u}(t)]\|_{H^2} \leq p_0 \|\tilde{u}(t) - \tilde{u}\|_{H^2}, \quad p_0 > 0;$
4. $\|\tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] - \tilde{\varphi}[t, \bar{\theta}(t), \beta]\|_{H^2} \leq \varphi_0(\beta) \|\tilde{\theta}(t) - \bar{\theta}(t)\|_{H^2}, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$

Тогда, при выполнении условия

$$\gamma = 2p_0\varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{|\lambda|TK_0M_0}{2\lambda_1^2}\right) < 1,$$

операторное уравнение (19) имеет единственное решение $\bar{\theta}(t) \in H^2(0, T)$.

Доказательство. Согласно Леммам 1 и 2 операторное уравнение (19) можно рассматривать в пространстве $H^2(0, T)$. Согласно Лемме 3 оператор $G(\theta)$ является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство $H^2(0, T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме [7] о принципе сжимающих отображений оператор $\tilde{G}[\tilde{\theta}(t)]$ имеет единственную неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (19) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (19) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. n -е приближение решения находится по формуле

$$\tilde{\theta}_n(t) = \tilde{G}[\tilde{\theta}_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \tilde{\theta}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_n(t),$$

где $\tilde{\theta}_0(t)$ произвольный элемент пространства $H^2(0, T)$ и удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{\theta}_0(t) - \theta_n(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|\tilde{G}[\theta_0(t)] - \theta_0(t) + \tilde{h}(t)\|_{H^2} \tilde{\theta}(t). \quad (23)$$

Если принять, то эта оценка (23) примет вид

$$\|\tilde{\theta}_0(t) - \theta_n(t)\|_{H^2} \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|\tilde{G}[\theta_0(t)]\|_{H^2}.$$

Найденное решение $\tilde{\theta}(t)$, подставляя в формулу (18) решение нелинейного интегрального уравнения (17) находим по формуле

$$u^0(t) = \tilde{\varphi}[t, \tilde{\theta}(t), \beta] = \begin{pmatrix} \varphi_1[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \\ \varphi_2[t, \theta_1(t), \theta_2(t), \beta] \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$ определяется по формуле

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) \left(e^{-\lambda_1^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_1^2 (s-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, u^0(\tau)]) d\tau \right) ds + \right. \\ \left. + e^{-\lambda_1^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_1^2 (t-\tau)} (g_n(\tau) + z_n^*(0, 1) \bar{p}[\tau, u^0(\tau)]) d\tau \right] z_n(x),$$

а минимальное значение функционала вычисляется по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^0(T, x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T (u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt.$$

Управление $u^0(t)$ может претендовать на “оптимальность” лишь тогда, когда на этом управлении выполняется второе условие оптимальности (18). Проверка выполнения условия оптимальности в виде (18), сопряжено с некоторыми трудностями (порой даже непреодолимые). Это связано с присутствием функции $\omega(t, 0)$ и $\omega(t, 1)$, т. е. решения сопряженной краевой задачи. В этой связи второе условие оптимальности преобразуем к виду удобного для проверки этого условия.

С этой целью рассмотрим матрицу Гесса функции $\Pi(u_1, u_2)$

$$G(\Pi(\cdot, u_1, u_2)) = \begin{pmatrix} \Pi_{u_1 u_1}(\cdot, u_1, u_2) & \Pi_{u_1 u_2}(\cdot, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_2 u_1}(\cdot, u_1, u_2) & \Pi_{u_2 u_2}(\cdot, u_1, u_2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} -\omega(t,0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} + \omega(t,1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} - 2\beta & -\omega(t,0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} + \omega(t,1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \\ -\omega(t,0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} + \omega(t,1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} & -\omega(t,0) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} + \omega(t,1) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} - 2\beta \end{pmatrix} = \\
 &= \left\{ -\omega(t,0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} + \omega(t,1) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} \right\} - 2\beta E = \\
 &= \{ -\omega(t,0) \Gamma[p_1(u_1, u_2)] + \omega(t,1) \Gamma[p_2(u_1, u_2)] \} - 2\beta E = \\
 &= | \text{Заменяем вектор по формуле (3.3.1)} | = \\
 &= (\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)]) 2\beta \left(D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \tilde{u}(t) - 2\beta E = \\
 &= 2\beta \left((\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)]) \left(D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right)^{-1} \tilde{u}(t) - E \right) = \\
 &= 2\beta \left(\frac{1}{D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix}} (\Gamma[p_1(u_1, u_2)], \Gamma[p_2(u_1, u_2)]) \begin{pmatrix} \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 & -\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 \\ -\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_1 & \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \end{pmatrix} - E \right) = \\
 &= 2\beta \left(\frac{1}{D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix}} \left\{ \left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} \end{pmatrix} + \left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial p_2}{\partial u_2} u_1 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix}} \left\{ \left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_1 + \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} \end{pmatrix} + \left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2} u_1 + \frac{\partial p_1}{\partial u_1} u_2 \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \end{pmatrix} \right\} - E \right).
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_{u_1}(\cdot, u_1, u_2) = \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} \right] \frac{1}{D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix}}^{-1};$$

$$P_{u_2}(\cdot, u_1, u_2) = \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1 \partial u_2} \right] \frac{1}{D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix}};$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{u_1}(\cdot, u_1, u_2) &= \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2 \partial u_1} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2 \partial u_1} \right] \frac{1}{\left| D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right|}; \\
 \Pi_{u_2}(\cdot, u_1, u_2) &= \left[\left(-u_2 \frac{\partial p_2}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial p_2}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2} + \left(u_2 \frac{\partial p_1}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2} \right] \frac{1}{\left| D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right|} - 1,
 \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\left| D \begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\partial p_1}{\partial u_1} \frac{\partial p_2}{\partial u_2} - \frac{\partial p_1}{\partial u_2} \frac{\partial p_2}{\partial u_1} \neq 0$ (25)

Матрица Гесса функции $\Pi(u_1, u_2)$ является симметричной, т. е.

$$\Pi_{u_1 u_2}(\cdot, u_1, u_2) = \Pi_{u_2 u_1}(\cdot, u_2, u_1).$$

Согласно критерию Сильвестра, в критической точке максимум функции $\Pi(u_1, u_2)$ достигается при выполнении условий

$$\Pi_{u_1 u_1}(\cdot, u_1, u_2) < 0, \quad (26)$$

$$\begin{vmatrix} \Pi_{u_1 u_1}(\cdot, u_1, u_2) & \Pi_{u_1 u_2}(\cdot, u_1, u_2) \\ \Pi_{u_2 u_1}(\cdot, u_1, u_2) & \Pi_{u_2 u_2}(\cdot, u_1, u_2) \end{vmatrix} = \left(\Pi_{u_1 u_1}(\cdot, u_1, u_2) \Pi_{u_2 u_2}(\cdot, u_1, u_2) - \left(\Pi_{u_1 u_2}(\cdot, u_1, u_2) \right)^2 \right) > 0. \quad (27)$$

Таким образом, оптимальность векторного управления $\bar{u}^0(t)$ можно проверить согласно новым условиям (26)–(27), которые так же назовем условиями оптимальности.

Найденная тройка $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. Владимирова В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимирова // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. Тихонов А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 64 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. Сейдакмат кызы Э. Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / Сейдакмат кызы Э. // Вестник КГУ им. И. Арабаева. Сер. физика, математика и информатика. Бишкек, 2014. С. 292–296.
5. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
6. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
7. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.