УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ОРТОТРОПНЫХ СРЕД

Закирьянова Г.К.
Институт математики и математического моделирования МОН РК
Алматы, Казахстан,
E-mail: zakir@math.kz, gulmzak@mail.ru

FUNDAMENTAL AND GENERALIZED SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF ORTHOTROPIC MEDIUM DYNAMICS

G.K. Zakiryanova
Institute of Mathematics and mathematical modeling, SC MES RK
Almaty, Kazakhstan,
E-mail: zakir@math.kz, gulmzak@mail.ru

В работе рассматривается анизотропная упругая модель среды, распространение волн в которых подчинено более сложным закономерностям, чем в изотропной среде, а напряженно–деформированное состояние среды существенно зависит от степени ее анизотропии. Для систем уравнений движения таких сред даны условия на волновых фронтах. Приведено построение фундаментальных и обобщенных решений для ортотропных сред.

We consider the model of anisotropic elastic medium. Law of wave propagation for such mediums is more difficult than for isotropic medium and stress-strain state essentially depends from degree of its anisotropy. For motion equations system for such medium the conditions on wave front are given. The construction of fundamental and generalized solutions for orthotropic medium are presented.

Изучение динамических процессов в сплошных средах, связанных с возникновением, распространением и дифракцией волн, возникающих под действием разнообразных внешних и внутренних источников естественного или искусственного происхождения, относится к актуальным проблемам механики и математической физики и связано с решением краевых задач для систем гиперболического и смешанного типа. Особое место в таких исследованиях занимают случаи распространения волн от сосредоточенного источника. С помощью получаемых при этом фундаментальных решений можно строить решения при действии в среде произвольных распределенных массовых сил. При этом для учета реальных свойств среды используются различные модели. Наиболее изученной является линейно упругая изотропная модель. В работе рассматривается анизотропная упругая среда, которая по своим характеристикам ближе к реальным средам. Распространение волн в такой среде подчинено более сложным закономерностям, чем в изотропной среде: в анизотропных средах с сильной анизотропией упругих свойств имеет место наличие лакун – подвижных невозмущенных областей, ограниченных волновыми фронтами и расширяющихся с течением времени.

1. Уравнения движения анизотропной упругой среды. Рассматривается анизотропная (ортотропная) упругая среда, уравнения движения которой описываются системой гиперболических уравнений вида:

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j(x,t) + G_i(x,t) = 0, \tag{1}$$

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t) = C_{ij}^{ml}\partial_m, \partial_l - \rho\delta_{ij}\partial_t^2, \;\; i,j,m,l = \overline{1,N}$$

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij} \tag{2}$$

где ρ – плотность среды, u_i – компоненты вектора перемещений, массовая сила G – локально-интегрируемая вектор – функция, δ_{ij} – символ Кронекера, $\partial_x = (\partial_1,...,\partial_N)$, $\partial_i = \partial / \partial x_i$, $\partial_t = \partial / \partial t$, $(x,t) \in R^{N+1}$. В физических задачах $N = 2$ соответствует плоской деформации, $N = 3$ – пространственному случаю. Матрица упругих констант C_{ij}^{ml} обладает свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов (2) и условию строгой гиперболичности: $W(n,v) = C_{ij}^{ml} n_m n_l v^i v^j > 0 \;\; \forall n \neq 0, \;\; v \neq 0$. Здесь и далее в произведении по одноименным индексам проводится суммирование в указанных выше пределах их изменения (подобно тензорной свертке).

Уравнения (1) строго гиперболические. Решения таких уравнений могут иметь характеристические поверхности, на которых сами решения, либо их производные терпят разрыв [1]. В физических задачах они описывают ударные волны, что характерно для внешних воздействий, имеющих ударный характер и представляемых разрывными или сингулярными функциями.

Перемещения $u(x,t)$ – решение системы уравнений (1) в пространстве $R^4(x,t)$, непрерывные, дважды дифференцируемые функции почти всюду, за исключением, быть может, характеристической поверхности F в R^4, которым соответствуют подвижные волновые фронты F_t в R^3. При переходе через волновой фронт выполняются следующие условия на скачки:

$$\left[u_i(x,t)\right]_{F_t} = 0, \;\; i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

$$\left[u_{i,t}\, n_l + c u_{i,l}\right]_{F_t} = 0, \;\; i,l = \overline{1,N} \tag{4}$$

$$\left[\sigma_i^l n_l + \rho c u_{i,t}\right]_{F_t} = 0, \;\; i,l = \overline{1,N} \tag{5}$$

здесь $\sigma_i^l(x,t) = C_{ij}^{ml} u_{j,m}(x,t)$, $u_{i,m} = \partial_m u_i$, $u_{i,t} = \partial_t u_i$, c – скорость движения волнового фронта определяется решением характеристического уравнения системы (1):

$$\det\left\{C_{ij}^{ml}\nu_m\nu_l - \rho\nu_t^2\delta_{ij}\right\} = 0$$

где $(\nu, \nu_t) = (\nu_1,...,\nu_3,\nu_t)$ – вектор характеристической нормали, связанный со скоростью c соотношением

$$c = \nu_t / \|\nu\|, \;\; \|\nu\| = \sqrt{\nu_j \nu_j}\,.$$

Скачок функции f на поверхности F_t определяется соотношением $\left[f(x,t)\right]_{F_t} = f^+(x,t) - f^-(x,t) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0}\left(f(x + \varepsilon n, t) - f(x - \varepsilon n, t)\right)$, $x \in F_t$, где $n(x,t)$ – единичный вектор нормали к F_t, направленного в сторону распространения фронта волны: $n = \nu / \|\nu\|_N$.

Условия непрерывности касательных производных перемещений на фронте волны (4) являются следствием условия непрерывности перемещений при переходе через волновой фронт (3). Условие (6) – условие сохранения импульса на фронтах [2], связывает скачок скоростей на фронте волны со скачком напряжений. Поэтому такую поверхность называют фронтом ударной волны. Предполагается, что число волновых фронтов конечно, и каждый фронт почти всюду является поверхностью Ляпунова размерности на единицу ниже размерности пространства.

2. Фундаментальные решения анизотропной среды. Фундаментальные решения системы уравнений (1) есть ее решения, соответствующие действию импульсных сосредоточенных сил вида $G_i(x,t) = \delta_i^k \delta(x,t)$, описываемых δ – функцией Дирака (индекс k указывает направление действия силы). Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородной системы уравнений. Особое место среди них занимает тензор Грина $U_i^j(x,t)$, удовлетворяющий условиям:

$$U_{jk}(x,t) = 0 \;\; \text{при} \;\; t < 0, \; |x| > c_{\max}\, t,$$

$$U_{jk}(x,0)=0 \quad \text{при } x\neq 0.$$

Для построения тензора Грина удобно воспользоваться преобразованием Фурье, которое приводит систему (1) к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$L_{ij}(i\xi,i\omega)\overline{U}_j^k(\xi,\omega)+\delta_i^k=0 \tag{6}$$

здесь $(\xi,\omega)=(\xi_1,...,\xi_N,\omega)$– параметры преобразования Фурье, соответствующие переменным (x,t), $L_{ij}(\xi,\omega)$ – однородные полиномы второго порядка, соответствующие дифференциальным операторам в (1). Разрешая систему (6), получим трансформанту матрицы Грина, которая, в силу однородности дифференциальных полиномов, имеет вид

$$\overline{U}_{jk}(i\xi,i\omega)=-\frac{Q_{jk}(i\xi,i\omega)}{Q(i\xi,i\omega)}=\frac{Q_{jk}(\xi,\omega)}{Q(\xi,\omega)}$$

где $Q_{jk}(\cdot)$ – алгебраические дополнения элемента с индексом (k,j) матрицы $\{L(i\xi,i\omega)\}$, $Q(\cdot)$ – символ оператора L: $Q(i\xi,i\omega)=(-1)^N\det\{L_{ij}(\xi,\omega)\}$.

Для строго гиперболических систем уравнений второго порядка в N+1- мерном пространстве тензор Грина представим в виде [3]:

– в случае простых корней c_q $(q=1,N)$ характеристического уравнения

$$U_{jk}(x,t)=\sigma_N H(t)\sum_{q=1}^{M}\int_{\|e\|=1}A_{jk}(e,c_q)\times$$

$$\times\left\{\left((e,x)+c_q(e)t-i0\right)^{1-N}-\left((e,x)-c_q(e)t-i0\right)^{1-N}\right\}dS(e)$$

$\sigma_N=(2\pi i)^{-N}(N-2)!$, $A_{jk}(e,c_q)=Q_{jk}(e,c_q)/\left(c_q Q_{mm}(e,c_q)\right)$, $H(t)$ – функция Хевисайда

– в случае корней кратности m_q –

$$U_{jk}(x,t)=\sigma_N H(t)\sum_q m_q\int_{R^N}Q_{jk}^{(m_q-1)},_\omega(e,c_q)\left(Q^{(m_q)},_\omega(e,c_q)\right)^{-1}\times$$

$$\times\left\{\left((e,x)+c_q(e)t-i0\right)^{1-N}-\left((e,x)-c_q(e)t-i0\right)^{1-N}\right\}dS(e)$$

(здесь верхний индекс в скобках означает порядок производной по параметру ω).

Рассмотрим частный случай анизотропных сред – ортотропные среды. Используя наряду с тензорной матричную форму записи закона Гука с введением векторов σ_α, ε_β и матрицы $C_{\alpha\beta}$ $\left(\alpha,\beta=\overline{1,6}\right)$: $\sigma_\alpha=C_{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha$, запишем фундаментальные решения для таких сред. Здесь $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6)=$ $(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{23},\sigma_{13},\sigma_{12})$, аналогично вводится ε_β. Закон Гука для ортотропных сред, находящихся в условиях плоской деформации, имеет вид $\sigma_{11}=C_{11}u_1,_1+C_{12}u_2,_2$, $\sigma_{12}=C_{66}u_1,_2$, $\sigma_{22}=C_{21}u_1,_1+C_{22}u_2,_2$.

Тензор Грина в этом случае представляет собой сумму вычетов дробно–рациональных функций:

$$U_j^k(x,t)=\frac{1}{\pi t}\operatorname{Im}\sum_{\substack{q=1\\ \operatorname{Im}\zeta_q>0}}^{2}\frac{Q_{jk}\left(\zeta_q,1,(x_1\zeta_q+x_2)/t\right)}{Q,_\zeta\left(\zeta_q,1,(x_1\zeta_q+x_2)/t\right)} \tag{7}$$

где $Q_{jj}=-L_{kk}$, $Q_{jk}=L_{jk}$, $j\neq k$, $Q=Q_{11}Q_{22}-Q_{12}^2$, $Q_{11}(\xi_1,\xi_2,\omega)=C_{66}\xi_1^2+C_{22}\xi_2^2+\rho\omega^2$, $Q_{22}(\xi_1,\xi_2,\omega)=C_{11}\xi_1^2+C_{66}\xi_2^2+\rho\omega^2$, $Q_{12}(\xi_1,\xi_2,\omega)=-(C_{12}+C_{66})\xi_1\xi_2$. Формула (7) ранее получена R.G.Payton [4], однако предельный переход при интегрировании им осуществлен иначе.

В выражении (7) суммируются вычеты дробно–рациональных функций в верхней полуплоскости, что требует знания значений корней ζ_q полинома Q:

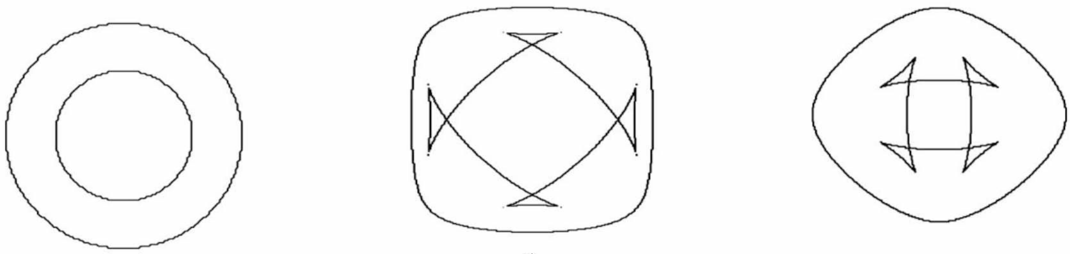
$$Q(\zeta,1,x_1\zeta + x_2) = 0$$

Корни этого уравнения четвертой степени являются комплексно сопряженными, поэтому мы всегда имеем два корня, удовлетворяющих условию $Im\zeta \geq 0$. В случае изотропной среды $C_{ij}^{ml} = \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} + \mu(\delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{jm}\delta_{il})$ (λ, μ – упругие константы Ламе) имеем: $\zeta_1 = -\left(x_1x_2 + c_1t\sqrt{r - c_1^2t^2}\right)/\left(x_1^2 - c_1^2t^2\right)$, $\zeta_2 = -\left(x_1x_2 + c_2t\sqrt{r - c_2^2t^2}\right)/\left(x_2^2 - c_2^2t^2\right)$, где $r = \sqrt{x_ix_i}$, $c_1 = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho}$, $c_1 = \sqrt{\mu/\rho}$. Тензоры Грина для изотропной среды, находящейся в условиях плоской и пространственной деформаций, построены в [5].

Тензор Грина $U_i^j(x,t)$ порождает тензор фундаментальных напряжений, компоненты которого определяются по закону Гука

$$S_{ij}^k(x,t) = \frac{H(t)}{\pi t}C_{ij}^{ml}\,\mathrm{Im}\sum_{\substack{q=1\\ \mathrm{Im}\,\zeta_q > 0}}^{2}\frac{Q_{mk,x_l}Q,_{\zeta} - Q_{mk}\left(Q,_{\zeta}\right),_{x_l}}{\left(Q,_{\zeta}\right)^2}$$

При исследовании гиперболических уравнений с постоянными И.Г. Петровским был обнаружен факт существования лакун – компонент дополнения к поверхности фронта волны, в которых фундаментальные решения обращаются в ноль (сильные лакуны) [6]. Пример сильных лакун дает, в частности, система уравнений (1) в пространстве четной размерности. Лакуны, координаты которых удовлетворяют условиям $\mathrm{Im}\zeta_q(x_1,x_2,t) = 0,\ q = 1{,}2$, возникают при определенных константах уравнений (1), соответствующих сильно анизотропным средам. Для таких сред картины волновых фронтов резко отличаются от классического фронта как в случае изотропных сред и имеют сложную негладкую форму:



а) *б)* *с)*

Рис.1

Из рисунка 1 видно, что, в отличие от изотропных сред (например, алевролит $C_{11} = 6{,}75$, $C_{12} = 1{,}6875$, $C_{22} = 6{,}75$, $C_{66} = 2{,}5312 * 10^{10}$ н/м^2, рис.1*а*) для ортотропных топаза $C_{11} = 28.2$, $C_{12} = 13.1$, $C_{22} = 34.9$, $C_{66} = 12.6$ (рис.1*б*) и калия–пентабората $C_{11} = 5.82$, $C_{12} = 2.29$, $C_{22} = 3.59$, $C_{66} = 0.57$ $C_{66} = 0{,}57$ (рис.1*c*) имеет место наличие лакун (изображены треугольными областями).

Тензор Грина $U_i^j(x,t)$ имеет особенности на подвижных волновых фронтах порядка $O(t^2 - r^2/c_q^2)^{-\alpha}$, $q = 1{,}2$. Значение α зависит от степени анизотропии среды. В общем случае $\alpha < 1$.

3. Обобщенные решения. Представленный выше тензор Грина позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние сред при действии в них различных массовых сил. Для регулярных массовых сил $G_k(x,t)$ компоненты поля перемещений есть следующие интегральные представления:

$$u_i(x,t) = \int_0^\infty d\tau \int_{R^N} U_{ik}(x - y, t - \tau)G_k(y,\tau)dV(y)$$

Задачи, связанные с исследованиями волновых процессов при действии импульсных источников различного типа, возникают, например, при изучении процессов распространения волн от очагов землетрясений. Для удаленного очага землетрясения, расстояние до которого существенно превышает его размеры, используются модели сосредоточенных источников в виде сингулярных обобщенных функций с точечным носителем (поль, диполь, мультиполь и др.) [7]. Поле перемещений при этом имеет вид свертки тензора Грина $U_j^k(x,t)$ с соответствующей функцией $G_k(x,t)$:

$$u_j(x,t) = U_j^k(x,t) * G_k(x,t), \quad j,k = \overline{1,N},$$

которую следует брать по правилам определения свертки в теории обобщенных функций. Так, поле перемещений в окрестности очага землетрясения хорошо описывается сосредоточенной нагрузкой, приложенной в точке y, с осевой симметрией, представляющей собой плоский центр расширения (если образован положительными диполями) – сжатия (если образован отрицательными диполями): $G_i(x,y,t) = -0{,}5D\dfrac{\partial \delta(x-y,t)}{\partial x_i}$, D – величина момента диполя. Поле перемещений запишется в виде

$$u_i(x,t) = -0{,}5D\frac{\partial}{\partial x_k}U_i^k(x-y,t)$$

т.е. оно определяется производными тензора Грина. Эта модель очага генерирует сферически – симметричную продольную волну.

Литература

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979, 320с.
2. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ленинград: Наука, 1978. Вып. XVIII. 248 с.
3. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка// Дифференциальные уравнения, 2001.Т.37, №4. с.488–494
4. Payton R.G. Two–dimensional anisotropic elastic waves emanating from a point source // Proc. Camb. Phil. Soc. 1971. Vol. 70. P. 191 – 210.
5. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Ш.М. Айталиев, Л.А. Алексеева, Ш.А. Дильдабаев, Н.Б. Жанбырбаев; Отв. ред. П.И. Перлин.– Алма-Ата: Гылым, 1992. 228 с.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными.– М.: Государственное изд-во физико–математической литературы, 1961. 400 с.
7. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. 518 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАЗЕМНОГО СООРУЖЕНИЯ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИИ

Дуйшеналиев Т.Б., Сарсенов Б.Т.
Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова,
г. Бишкек, sarsenovbak@mail.ru
Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, Bishkek, sarsenovbak@mail.ru

Рассмотрена модельная задача для исследования процессов распространения и дифракции сейсмических волн в земной коре вследствие сброса тектонических напряжений на глубинных трещинах, и их воздействия на наземные сооружения. Решена контактная нестационарная краевая задача для упругого полупространства, на границе которого находится упругое тело с условиями жесткого сцепления на контактной поверхности. Исследуется процесс дифракции и преломления волн, порождаемых сбросом напряжений на горизонтальной трещине в упругом полупространстве. Для решения задачи используется численный метод бихарактеристик. Исследовано напряженно-деформированное состояние поверхностного включения при преломлении сейсмических волн в зависимости от его расстояния от эпицентра при сбросе вертикальных напряжений на трещине.

Для решения нестационарных задач в упругих средах одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый Г.Т. Тарабриным [1]. В настоящей работе используется метод, развитый для решения контактных задач взаимодействия упругих тел с угловыми точками в условиях плоской деформации [2,3]. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Для моделирования процесса сброса напряжений на трещине используются сингулярные обобщенные функции по методу, предложенному в [4].

Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругого полупространства и упругого тела при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещине с использованием физико-механических параметров, типичных для горных пород и строительных сооружений. Построены осциллограммы скоростей перемещений дневной поверхности и упругого тела и

$$u_j(x,t)=U_j^k(x,t)*G_k(x,t), \quad j,k=\overline{1,N},$$

которую следует брать по правилам определения свертки в теории обобщенных функций. Так, поле перемещений в окрестности очага землетрясения хорошо описывается сосредоточенной нагрузкой, приложенной в точке y, с осевой симметрией, представляющей собой плоский центр расширения (если образован положительными диполями) – сжатия (если образован отрицательными диполями): $G_i(x,y,t)=-0{,}5D\dfrac{\partial\delta(x-y,t)}{\partial x_i}$, D – величина момента диполя. Поле перемещений запишется в виде

$$u_i(x,t)=-0{,}5D\frac{\partial}{\partial x_k}U_i^k(x-y,t)$$

т.е. оно определяется производными тензора Грина. Эта модель очага генерирует сферически – симметричную продольную волну.

Литература

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979, 320с.
2. Петрашень Г.И. Основы математической теории распространения упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Ленинград: Наука, 1978. Вып. XVIII. 248 с.
3. Алексеева Л.А., Закирьянова Г.К. Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка// Дифференциальные уравнения, 2001.Т.37, №4. с.488–494
4. Payton R.G. Two–dimensional anisotropic elastic waves emanating from a point source // Proc. Camb. Phil. Soc. 1971. Vol. 70. P. 191 – 210.
5. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Ш.М. Айталиев, Л.А. Алексеева, Ш.А. Дильдабаев, Н.Б. Жанбырбаев; Отв. ред. П.И. Перлин.– Алма-Ата: Гылым, 1992. 228 с.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными.– М.: Государственное изд-во физико–математической литературы, 1961. 400 с.
7. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. 518 с.