УДК 517.948

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сулайманов Б. Э., Мырзапаязова З.К., Токтогулова А.Ш.
Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова,
Бишкек, Кыргызская Республика

TNE INVERSE PROBLEM FOR integral-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Sulaymanov B. E., Merzahaiazova Z.K., Toktogulova A.Sh.
Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic

Бул жумушта биринчи тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелерге коюлган тескери маселелер каралган Маселенин чечилиш шарттары аныкталган. биринчи тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемелерге коюлган тескери маселенин чечиминин жашашы жана жалгыздыгы жонүндогү теорема далилденген.

В данной работе рассматривается обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Установлено условие разрешимости обратной задачи. Доказана теорема существования и единственности обратных задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Аннотация

In this given work the inverse problem gor integral-differential eouations is Considered for solving the lnverse problem is set.The theorem of existing and unity of inverse problem for nonlinear integral-differential touations is problem

В работе [1] методом дополнительного аргумента исследована прямая задача для систем нелинейных интегро-диференциальных уравнений в частных производных типа Уизема, а в [2-3-8] тем же методом исследованы обратные задачи для дифференциальных уравнений. В [4] методом дополнительного аргумента исследована обратная задача для интегро-дифференциальных уравнений. В [5-7] методом дополнительного аргумента исследованы обратные задачи для дифференциальных, интегро-дифференциальных и систем дифференциальных уравнений типа Уизема. В данной работе изучаются вопрос существования и единственности решения обратной задачи (1)-(3) для интегро-дифференциальных уравнений. Показано эквивалентность обратной задачи (1)-(3) к системе интегральных уравнений.

Рассмотрим обратную задачу:

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,u(t,x))d\xi = f(t,x),\ x\in R,\ t\in[0,T], \quad (1)$$

$$u(0,x)=\varphi(x), \qquad x\in R, \quad (2)$$

$$u(t,x_0)=g(t), \qquad 0\le t\le T, \quad (3)$$

где $a(t,u)$, $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $g(t)$ - известные, а $u(t,x)$, $K(t)$ - неизвестные функции. Выполняется условие согласования

$$g(0)=\varphi(x_0). \quad (4)$$

Предположим выполнение следующих условий:

5.1) $g(t)\in C^2[0,T]$, $\varphi(x)\in \overline{C}^3(R)$, $a(t,u)\in C^{0,3}(Q_T)$, $f(t,x)\in \overline{C}^{0,3}(G)$,

причём существуют такие конечные числа L, M, A, F, что

$$\max\left\{\sup_{0\le t\le T}|g(t)|,\ \sup_{0\le t\le T}|g'(t)|,\ \sup_{0\le t\le T}|g''(t)|\right\}=M,\max\left\{\sup_{x\in R}|\varphi(t)|,\ \sup_{x\in R}|\varphi'(t)|,\ \sup_{x\in R}|\varphi''(t)|\right\}=L,$$

$$\max\left\{\sup_{Q_T}|a(t,u)|,\ \sup_{Q_T}|a_u(t,u)|,\ \sup_{Q_T}|a_{uu}(t,u)|\right\}=A,$$

$$\max\left\{\sup_{G}|f(t,x)|,\ \sup_{G}|f_x(t,x)|,\ \sup_{G}|f_{xx}(t,x)|\right\}=F,$$

5.2) функции $\varphi''(x)$, $f_{xx}(t,x)$, удовлетворяют условию Липшица по переменным x с теми же соответственно константами L, F, а функция $a_{uu}(t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u с константой A, где $Q_T=\{(t,u):\ 0\le t\le T,\ -N\le u\le N\}$, N - конечная постоянная которая определяется ниже,

5.3) $a(t,g(t))\ge\alpha>0$ при всех $t\in[0,T]$.

В (1) заменяя t на ρ, x на $p(\rho,t,x)$, где

$$p(\rho,t,x)=x-\int_\rho^t u(\tau,p(\tau,t,x))d\tau,\ p(t,t,x)=x,\ p_\rho(\rho,t,x)=u(\rho,p(\rho,t,x)),$$

и интегрируя по ρ от 0 до s, полагая $u(s,p(s,t,x))\equiv w(s,t,x)$, получим:

$$w(s,t,x)=\varphi(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)+\int_0^s f(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,x,t)d\tau)d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a(\xi,w(\rho,t,x))d\xi d\rho. \quad (5)$$

В уравнении (5), берем дважды производную по t, и имеем:

$$w_t(s,t,x)=-\varphi'(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)[g(t)+\int_0^t w_t(\tau,t,x)d\tau]-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_x(\xi,w(\rho,t,x))w_t(\rho,t,x)d\xi d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau)[g(t)+\int_\rho^t w_t(\tau,t,x)d\tau]d\rho,$$

$$w_{tt}(s,t,x)=\varphi''(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x)d\tau+\left\{\int_0^t w_t(\tau,t,x)d\tau\right\}^2\right]-$$

$$-\varphi'(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x)d\tau]\right]+$$

$$+\int_0^t f_{xx}(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_\rho^t w_t(\tau,t,x)d\tau+\{\int_\rho^t w_t(\tau,t,x)d\tau\}^2\right]d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x)d\tau]\right]-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_{uu}(\xi,w(\rho,t,x))w_t^2(\rho,t,x)d\xi d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x)w_{tt}(\rho,t,x)d\xi d\rho.$$

В уравнении (5), полагая $s=t$, получим:

$$u(t,x)=\varphi(x-\int_0^t w(\tau,t,x)d\tau)+\int_0^s f(\rho,x-\int_\rho^t w(\tau,t,x)d\tau)d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a(\xi,w(\rho,t,x))d\xi d\rho. \tag{6}$$

В уравнении (6), полагая $x=x_0$ и, взяв производную по t, имеем:

$$g'(t)=-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]+f(t,x_0)- \tag{7}$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_x(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho.$$

В (5), полагая $x=x_0$,берем производную по t, затем, полагая $s=t$, имеем:

$$w_t(t,t,x_0)=-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]+f(t,x_0)- \tag{8}$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_x(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-\int_0^t f_x(\rho,x_0-$$

$$-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho.$$

Из уравнений (7), (8) следует:

$$w_t(t,t,x_0)=g'(t)-f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a_x(\xi,g(t))d\xi. \qquad (9)$$

В уравнении (7), взяв производную по t, имеем:

$$g''(t)=-\varphi''(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g^2(t)+2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]+\left\{\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2-$$

$$-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[2g'(t)+f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi-\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]+$$

$$+f_t(t,x_0)-\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))w(\tau,t,x_0)d\xi-\int_0^t\int_\rho^t K(\xi)a_{uu}(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t^2(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-$$

$$+\int_0^t f_{xx}(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g^2(t)+2g(t)\int_\rho^t w_t(\tau,t,x)d\tau+\{\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\}^2]d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[2g'(t)+f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+$$

$$+\int_\rho^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho-f_x(t,x_0)g(t). \qquad (10)$$

Уравнение (10) разрешая относительно $K(t)$, имеем:

$$K(t)=\frac{1}{a(t,g(t))}\left\{\varphi''(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.+\left\{\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2\right]-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x_0)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau\right]+f_t(t,x_0)+g''(t)- \qquad (11)$$

$$-\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))w_t(t,t,x_0)d\xi-\int_0^t\int_0^\rho K(\xi)a_{uu}(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t^2(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\right.$$

$$+\int_0^t f_{xx}(\rho x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau+\right.$$

$$\left.\left.+\left\{\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2\right]d\rho+f_t(t,x_0)-\int_0^t\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x_0))w_{tt}(\rho,t,x_0)d\xi d\rho\right\}.$$

В уравнении (5), полагая $x=x_0$, имеем:

$$w(s,t,x_0)=\varphi(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)+\int_0^s f(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)d\rho-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a(\xi,w(\rho,t,x_0))d\xi d\rho. \tag{12}$$

В уравнении (12), берем дважды производную по t, и имеем:

$$w_t(s,t,x_0)=-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]- \tag{13}$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_x(\xi,w(\rho,t,x_0))w_t(\rho,t,x_0)d\xi d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)[g(t)+\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau]d\rho,$$

$$w_{tt}(s,t,x)=\varphi''(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau+\left\{\int_0^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\right\}^2\right]-$$

$$-\varphi'(x_0-\int_0^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]\right]+$$

$$+\int_0^t f_{xx}(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[g^2(t)+2g(t)\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau+\{\int_\rho^t w_t(\tau,t,x_0)d\tau\}^2\right]d\rho-$$

$$-\int_0^t f_x(\rho,x_0-\int_\rho^t w(\tau,t,x_0)d\tau)\left[2g'(t)-f(t,x_0)+\int_0^t K(\xi)a(\xi,g(t))d\xi+\int_0^t w_{tt}(\tau,t,x_0)d\tau]\right]-$$

$$-\int_0^s\int_0^\rho K(\xi)a_u(\xi,w(\rho,t,x_0)w_{tt}(\rho,t,x)d\xi d\rho. \tag{14}$$

Система уравнений (5), (6), (8), (11), (12), (13), (14), определяет замкнутую систему для нахождения неизвестных функций $w(s,t,x)$, $u(t,x)$, $w_t(t,t,x_0)$, $K(t)$, $w(s,t,x_0)$, $w_t(s,t,x_0)$, $w_{tt}(s,t,x_0)$.

ЛЕММА 1. Существует и явно определяется из исходных данных величина T>0 такая, что при выполнении условий 5.1), 5.2), 5.3), (4), система нелинейных интегральных уравнений (5), (6), (8), (11), (12), (13), (14), имеет единственное ограниченное решение.

Лемма доказывается методом последовательных приближений.

ЛЕММА 2. Если вектор-функция $V(s,t,x)$ - решение системы (5), (6), (8), (11), (12), (13), (14), то функции $u(t,x)$, $K(t)$ удовлетворяют задаче (1) - (3), и наоборот.

Лемма доказывается методом последовательных приближений.

ТЕОРЕМА. Если выполняются условия 5.1), 5.2), 5.3), (5.4), то найдется T>0 такое, что обратная задача, (1) - (3) имеет единственное решение $\{u(t,x), K(t)\}$ из класса $\overline{C}^{1,1}([0,T]\times R)\times C[0,T]$.

Доказательство теоремы следует из лемм.

Литература

1. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории системы нелинейных интегро- дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема// ДАН. -1992. –Т. 325, -№ 6. – С. 1111-1115.

2. Асанов А., Сулайманов Б. Э. Нелинейная обратная задача для дифференциальных уравнений типа Уизема// Вестник КГНУ, 2001. –Сер.3. -Вып.5. -С. 102-106.

3. Асанов А., Сулайманов Б. Э. Обратная задача для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка// Труды международной конференции «Современной технологии и управление качеством в образовании, науке и производстве: опыт адаптации и внедрения». –Бишкек: Вестник КТУ им. И. Раззакова, –2001. -№5. –С. 221-225.

4. Асанов А., Сулайманов Б.Э. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений //Труды международной научной конференции, посвященной 70-летию академика Иманалиева М. И.,

“Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике”. –Бишкек: Вестник КГНУ им Ж. Баласагына, 2001. -Сер.3. - Вып. 6. - С. 74-79.

5. Асанов А., Сулайманов Б.Э. The inverse problem for differential equation of the whitham.// Обратные и некорректные задачи прикладной математики: Тр. 13 - Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2005года. Том 3: ИСЭМ СО РАН –2005, -С. 207-211.

6. Асанов А., Сулайманов Б.Э., Токтогулова А.Ш. Об одной обратной задаче для систем дифференциальных уравнений типа Уизема// Материалы международной научно технической конф. «Иновации в образовании, науке и технике» посв. 100-летию первого проректора ФПИ-КГТУ проф. Сухомлинова Том 2, Бишкек, 2006,

7. Сулайманов Б.Э., Тологонов К.Т., Сенирбаева Э.К. Об однойобратной задаче для интегро-дифференциальных уравнений типа Уизема// Материалы международной научно технической конф. «Иновации в образовании, науке и технике» посв. 100-летию первого проректора ФПИ-КГТУ проф. Сухомлинова Том 2, Бишкек, 2006.

8. Обратная задача для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных|| Вестник ТарГУ им. Дулати, «природопользование и проблемы антропосферы» – Тараз: ТарГУ, 2002. Вестник ТарГУ, №2(6), -С. 32-46.

УДК:004.94:532.517.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПАКЕТЕ OPENFOAM

Жайнаков А. Ж., Калеева А. К., Курбаналиев А. Ы.
Институт горного дела и горных технологий им. У. И. Асаналиева
Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова,
Бишкек, Кыргызстан, jainakov-41@mail.ru
Кызыл-Кийский гуманитарно-педагогический институт Баткенского государственного университета, г. Кызыл-Кия, Кыргызстан, kurbanaliev@rambler.ru
Кызыл-Кийский гуманитарно-педагогический институт Баткенского государственного университета, г. Кызыл-Кия, Кыргызстан, Kaleeva79@mail.ru

Во многих инженерных и практических задачах (обтекание автомобиля, движение турбины или крыла самолета) отрыв турбулентного потока играет существенную роль. Для моделирования такого класса течений в инженерных целях обычно применяются методы, основанные на усредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье-Стокса. В данной работе рассматриваются 5 классических RANS–моделей турбулентности.

Цель работы и постановка задачи. Целью данной работы является оценка различных RANS–моделей турбулентности, основанные на линейной и нелинейной вихревой вязкости и имплементированных в пакет OpenFAOM[1]. В качестве тестовых задач выбраны две задачи. Первой задачей является стационарное турбулентного течения в трехмерном канале с внезапным расширением и небольшим конфузорным выходом, геометрия которого соответствует работе [2]. Вторая задача взята из надежных и информативных экспериментальных данных классической базы Европейского сообщества исследований течений, турбулентности и горения ERCOFTAC[3] и соответствует экспериментальной работе[4].

Математическая модель. В качестве исходных уравнений для описания стационарных турбулентных течений использовалась система осредненных по Рейнольдса уравнений Навье-Стокса, которая для несжимаемого течения при отсутствии массовых сил имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\overline{u_i}) = 0\,;\; \frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{u_i}\,\overline{u_j} + \rho\overline{u_i'u_j'}) = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} \qquad (1)$$

где $\overline{u_i}$ – компоненты средней скорости, ρ – плотность, $\overline{p}$ – среднее давление, $\overline{\tau_{ij}} = \mu\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)$ – тензор вязких напряжений, связанный с молекулярной вязкостью μ, а $\rho\overline{u_i'u_j'}$ – напряжения Рейнольдса, требующие моделирования. При наличии внешних сил систему этих уравнений необходимо дополнить соответствующими членами. Учет влияния турбулентных пульсаций на характеристики среднего течения производится на основе классических RANS–моделей турбулентности[5, с.66].

“Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике”. –Бишкек: Вестник КГНУ им Ж. Баласагына, 2001. -Сер.3. - Вып. 6. - С. 74-79.

5. Асанов А., Сулайманов Б.Э. The inverse problem for differential equation of the whitham.// Обратные и некорректные задачи прикладной математики: Тр. 13 - Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2005года. Том 3: ИСЭМ СО РАН –2005, -С. 207-211.

6. Асанов А., Сулайманов Б.Э., Токтогулова А.Ш. Об одной обратной задаче для систем дифференциальных уравнений типа Уизема// Материалы международной научно технической конф. «Иновации в образовании, науке и технике» посв. 100-летию первого проректора ФПИ-КГТУ проф. Сухомлинова Том 2, Бишкек, 2006,

7. Сулайманов Б.Э., Тологонов К.Т., Сенирбаева Э.К. Об однойобратной задаче для интегро-дифференциальных уравнений типа Уизема// Материалы международной научно технической конф. «Иновации в образовании, науке и технике» посв. 100-летию первого проректора ФПИ-КГТУ проф. Сухомлинова Том 2, Бишкек, 2006.

8. Обратная задача для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных|| Вестник ТарГУ им. Дулати, «природопользование и проблемы антропосферы» – Тараз: ТарГУ, 2002. Вестник ТарГУ, №2(6), -С. 32-46.