УДК.539.3

О ЗОНАХ СВЕРХПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ПРОКАТКЕ АЛЮМИНИЕВОГО ЛИСТА

Д.А. Китаева, Е.А. Субботина, Л.И. Васильев
Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет, Россия,
Кыргызско-Российский Славянский Университет, Бишкек, Кыргызская Республика, lina-bishkek@mail.ru

ABOUT SUPERPLASTICITY ZONES WHEN ROLLING ALUMINIUM SHEET

D.A. Kitaeva, E.A. Subbotina, L.I. Vasilyev
**St. Petersburg State Polytechnical University, Russia,*
***Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyz Republic, lina-bishkek@mail.ru*

Двумерная задача прокатки тонколистового алюминиевого сплава в термических диапазонах сверхпластичности решается с привлечением динамической. Показано, что обжатие полосы зависит от физико-математических и геометрических характеристик процесса прокатки, включая условие на контакте прокатываемой полосы и валков.

The two-dimensional problem of rolling of a thin-sheet aluminum alloy in the thermal ranges of superplasticity is solved with attraction of the dynamic. It is shown that sinking of a strip depends on physical and mathematical and geometrical characteristics of process of rolling, including a condition on contact of a rolled strip and rolls.

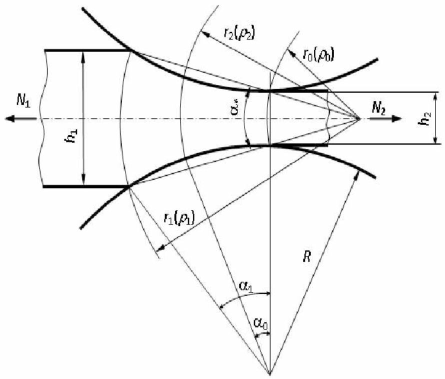

Рис. 1. К постановке задаче

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу определения энергосиловых, термических и кинематических параметров процесса продольной прокатки алюминиевой полосы без уширения. Предполагая, что при прокатке угол захвата валков малый, для решения задачи может быть привлечено [1,2] исследование течения материала в клиновидном сходящемся канале с углом при вершине α_1 (рис.1).

Считается, что процесс прокатки реализуется в изотермических условиях в диапазоне температур, не выходящих за термический интервал сверхпластичности промышленных алюминиевых сплавов [3].

Введем цилиндрическую систему координат $\rho \quad \alpha \quad z$, причем начало координат разместим в вершине клина.

Математическая формулировка задачи включает:

– дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\alpha}{\rho} = 0; \qquad \frac{\partial \tau_{\rho\alpha}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{2\tau_{\rho\alpha}}{\rho} = 0; \tag{1.1}$$

– кинематические соотношения

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{\partial \upsilon_\rho}{\partial \rho}; \quad \dot{\varepsilon}_\alpha = \frac{\upsilon_\rho}{\rho}; \quad \dot{\gamma}_{\rho\alpha} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \upsilon_\rho}{\partial \alpha}; \tag{1.2}$$

– условие несжимаемости в скоростях

$$\dot{\varepsilon}_\rho + \dot{\varepsilon}_\alpha = 0; \tag{1.3}$$

– определяющие соотношения в виде уравнений теории упругопластических процессов малой кривизны [4]

$$\sigma_\rho - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u}\dot{\varepsilon}_\rho; \; \sigma_\alpha - \sigma_0 = \frac{2\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u}\dot{\varepsilon}_\alpha;$$

$$\tau_{\rho\alpha} = \frac{\sigma_u}{3\dot{\varepsilon}_u}\dot{\gamma}_{\rho\alpha}; \; 3\sigma_0 = \sigma_\rho + \sigma_\alpha; \tag{1.4}$$

– уравнение состояния [3] в форме зависимости интенсивности напряжений от интенсивности скоростей деформаций

$$\sigma_u = 1 - m_0 - \beta + (3m_0 + \beta)\dot{\varepsilon}_u - 3m_0\dot{\varepsilon}_u^{\,2} + m_0\dot{\varepsilon}_u^{\,3}. \tag{1.5}$$

Здесь $\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}$ – составляющие тензоров напряжений и скоростей деформаций, отнесенные соответственно к альтернативным внутренним параметрам состояния $\sigma^*, \dot{\varepsilon}^*$, вектор скорости радиального перемещения υ_ρ, отнесен к величине $\dot{\varepsilon}^* b$, где b – ширина листа, все линейные размеры считаются поделенными на величину b $(\rho = r/b; l = \bar{l}/b)$, m_0 –постоянная материала, $\beta = \beta(\xi)$, где ξ – приведенная температура [3].

Граничные условия сформулированы в процессе решения задачи.

2. Кинематика процесса деформации полосы в термическом диапазоне сверхпластичности. Установлено [5], что составляющие напряжений, скоростей перемещений и деформаций будут определены при известном явном виде разрешающей функции $k = k(\alpha)$, для которой получено

$$k(\alpha) = \frac{\upsilon_1 h_1}{\overline{\psi}}(\psi - \cos 2\alpha), \tag{2.1}$$

где υ_1, h_1 – скорость перемещения и толщина полосы на входе в очаг деформации; функции $\psi = \psi(\alpha_1, \chi), \overline{\psi} = \overline{\psi}(\alpha_1, \chi)$ определяются формулами

$$\psi(\alpha_1, \chi) = \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi}\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1; \tag{2.2}$$

$$\overline{\psi} = \frac{\alpha_1 h_1}{\psi\alpha_1 - \sin\alpha_1}; \tag{2.3}$$

причем α_1 – угол захвата; χ – коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально [2].

При известном $k = k(\alpha)$ имеем:

– скорость радиального перемещения

$$\upsilon_\rho = \frac{\upsilon_1 h_1}{\overline{\psi}\rho}(\psi - \cos 2\alpha); \tag{2.4}$$

– функции $\rho_1(\alpha)$, $\rho_2(\alpha)$, ограничивающие в радиальном направлении очаг пластической деформации

$$\rho_1(\alpha) = h_1 \frac{2\psi\alpha - \sin 2\alpha}{2\overline{\psi}\sin\alpha}; \quad \rho_2(\alpha) = (1-\Lambda)h_1 \frac{2\psi\alpha - \sin 2\alpha}{2\overline{\psi}\sin\alpha}; \tag{2.5}$$

– скорости деформаций

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_\rho &= -\frac{\upsilon_1}{\rho^2\overline{\psi}}(\psi - \cos 2\alpha);\\
\dot{\varepsilon}_\alpha &= \frac{\upsilon_1}{\rho^2\overline{\psi}}(\psi - \cos 2\alpha);\\
\dot{\gamma}_{\rho\alpha} &= \frac{2\upsilon_1}{\rho^2\overline{\psi}}\sin 2\alpha.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где Λ – обжатие полосы.

Компоненты тензора напряжений получены интегрированием уравнений равновесия с привлечением зависимости (2.1) и представляются в виде

$$\begin{aligned}
3\sigma_\rho &= (1-m_0-\beta)L^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{k'L'}{2L} - k'' + 4k\right)\ln\frac{\rho}{\rho_2} - 4(1-m_0-\beta)L^{-\frac{1}{2}}k -\\
&- \frac{3m_0+\beta}{2}\left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)(k''-4k) - \frac{4(3m_0+\beta)}{\rho_2^2}k + \frac{3}{4}m_0\left(\frac{1}{\rho_2^4} - \frac{1}{\rho^4}\right)\left(\frac{k'L'}{2L} + k'' - 4k\right)L^{\frac{1}{2}} +\\
&+ \frac{12m_0L^{\frac{1}{2}}}{\rho_2^4}k - \frac{m_0}{6}\left(\frac{1}{\rho_2^6} - \frac{1}{\rho^6}\right)\left(\frac{k'L'}{L} + k'' - 4k\right)L - 4m_0L\frac{k}{\rho_2^6};\\
3\sigma_\alpha &= (1-m_0-\beta)L^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{k'L'}{2L} - k'' + 4k\right)\ln\frac{\rho}{\rho_2}\right] - \frac{3m_0+\beta}{2}(k''+4k)\left(\frac{1}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) +\\
&+ \frac{3}{4}m_0L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k'L'}{2L} + k'' + 12k\right)\left(\frac{1}{\rho_2^4} - \frac{1}{\rho^4}\right) - \frac{m_0}{6}L\left(\frac{k'L'}{2L} + k'' + 8k\right)\left(\frac{1}{\rho_2^6} - \frac{1}{\rho^6}\right);\\
3\tau_{\rho\alpha} &= k'\left[(1-m_0-\beta)L^{-\frac{1}{2}} + \frac{3m_0+\beta}{\rho^2} - \frac{3m_0}{\rho^4}L^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{\rho^6}L\right].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В формулах (2.7) положено

$$\begin{aligned}
k'(\alpha) &= -\frac{2\upsilon_1 h_1}{\overline{\psi}}\sin 2\alpha; \qquad k'' = \frac{4\upsilon_1 h_1}{\overline{\psi}}\cos 2\alpha;\\
L(\alpha) &= \frac{1}{4}(4k^2 + k'^2) = \frac{4}{3}\frac{\upsilon_1^2 h_1^2}{\overline{\psi}^2}(1 + \psi^2 - 2\psi\cos 2\alpha);\\
L'(\alpha) &= \frac{16}{3}\frac{\upsilon_1^2 h_1^2}{\overline{\psi}^2}\psi\sin 2\alpha..
\end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Геометрические параметры процесса прокатки. Естественным представляется предположить, что на входе и выходе из очага деформации продольные усилия обращаются в ноль. Такому утверждению соответствуют равенства

$$N_1 = 2\int\limits_0^{\frac{\alpha_1}{2}} \sigma_\rho \Big|_{\rho=\rho_1} dA = 0;$$
$$N_2 = 2\int\limits_0^{\frac{\alpha_1}{2}} \sigma_\rho \Big|_{\rho=\rho_2} dA = 0, \qquad (3.1)$$

где N_1, N_2 – продольные усилия, приходящиеся на единицу ширины полосы, $dA = \rho d\alpha$.

Второе условие (3.1) после подстановки в него первой формулы (2.7) при $\rho = \rho_2$ и несложных преобразований позволяет получить кубическое уравнение вида

$$a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 = 0. \qquad (3.2)$$

Здесь μ является параметром, обобщающие скоростной и геометрический факторы процесса прокатки и определяемый выражением

$$\mu = \frac{\upsilon_1 \overline{\Psi}}{h_1(1-\Lambda)^2}, \qquad (3.3)$$

где коэффициенты уравнения (3.2) являются функциями угла захвата и равны

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - m_0 - \beta)J_0(\alpha_1); \qquad a_1 = (3m_0 + \beta)J_1(\alpha_1);$$
$$a_2 = -2\sqrt{3}m_0 J_2(\alpha_1); \qquad a_3 = \frac{4}{3}m_0 J_3(\alpha_1), \qquad (3.4)$$

причем

$$J_0(\alpha_1) = \int\limits_0^{\frac{\alpha_1}{2}} H_1(\alpha)H_2(\alpha)H^{-\frac{1}{2}}(\alpha)d\alpha; \qquad J_2(\alpha_1) = \int\limits_0^{\frac{\alpha_1}{2}} H_1(\alpha)H^{\frac{1}{2}}(\alpha)H_2^{-3}(\alpha)d\alpha;$$
$$J_1(\alpha_1) = \int\limits_0^{\frac{\alpha_1}{2}} H_1(\alpha)H_2^{-1}(\alpha)d\alpha; \qquad J_3(\alpha_1) = \int\limits_0^{\frac{\alpha_1}{2}} H_1(\alpha)H(\alpha)H_2^{-5}(\alpha)d\alpha; \qquad (3.5)$$

а через $H_i(\alpha)$ обозначаются зависимости

$$H(\alpha) = 1 + \psi^2 - 2\psi\cos 2\alpha; \qquad H_1(\alpha) = \psi - \cos 2\alpha; \qquad H_2(\alpha) = \frac{2\psi - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha}. \qquad (3.6)$$

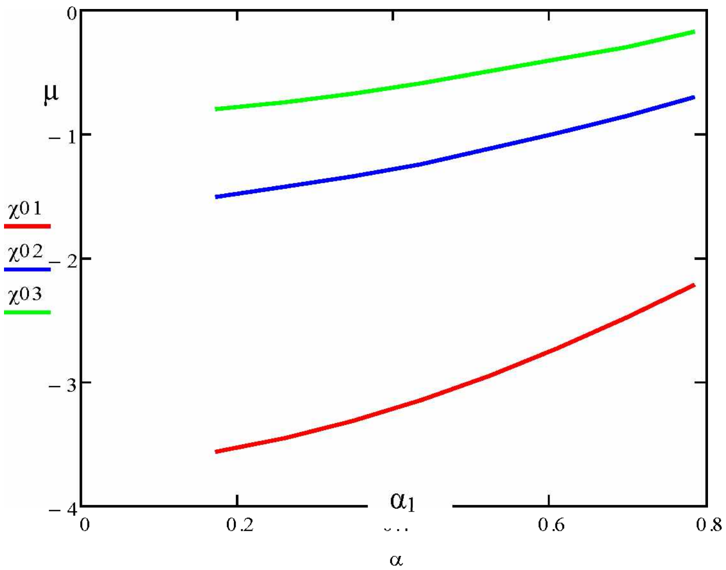

Рис.2. *Графики зависимости параметра* μ *от* α_1 *при* χ

Решение уравнения (3.2) осуществлено численно.

На рис.2 приведены графики зависимости параметра μ от угла захвата полосы α_1 при различных значениях χ.

Расчеты сделаны для сплава АМГ5 при $\beta = -0.04957; m_0 = 0.3333$.

Построенные кривые обнаруживают тенденцию к уменьшению при возрастании угла α_1.

Перейдем теперь к первой формуле (3.1), подставив в него выражение для радиального напряжения (2.7) при $\rho = \rho_1$.

Воспользовавшись принятыми обозначениями (3.3)…(3.6) и учитывая, что $\rho_2 = (1-\Delta)\rho_1$, приходим к следующему трансцендентному уравнению

$$A_0(\alpha_1) + A_0^*(\alpha_1)\ln\sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} + A_1(\alpha_1)\mu_1 + A_2(\alpha_1)\mu_1^2 + A_3(\alpha_1)\mu^3 = 0. \tag{3.7}$$

Здесь

$$\mu = \frac{\upsilon_1\overline{\Psi}}{h_1(1-\Lambda)^2}, \tag{3.8}$$

а коэффициенты при μ_1 определяются интегралами

$$A_0(\alpha_1) = -2\sqrt{3}(1-m_0-\beta)J_0(\alpha_1) - 4(3m_0+\beta)\mu[R_2(\alpha_1)+J_1(\alpha_1)] +$$
$$+ 2\sqrt{3}m_0\mu^2[R_3(\alpha_1)+4J_2(\alpha_1)] - \frac{8}{9}m_0\mu^3[R_4(\alpha_1)+6J_3(\alpha_1)];$$

$$\begin{aligned} &A_0^*(\alpha_1) = 2\sqrt{3}(1-m_0-\beta)R_1(\alpha_1);\\ &A_1(\alpha_1) = (3m_0+\beta)R_2(\alpha_1);\\ &A_2(\alpha_1) = -2\sqrt{3}m_0R_3(\alpha_1);\\ &A_3(\alpha_1) = \frac{8}{9}m_0R_4(\alpha_1); \end{aligned} \tag{3.9}$$

причем

$$\begin{aligned} &R_1(\alpha_1) = \int_0^{\frac{\alpha_1}{2}} \psi H^{-\frac{3}{2}}(\alpha)H_2(\alpha)\sin^2 2\alpha d\alpha - \int_0^{\frac{\alpha_1}{2}} H_3(\alpha)H^{-\frac{1}{2}}(\alpha)H_2(\alpha)d\alpha;\\ &R_2(\alpha_1) = \int_0^{\frac{\alpha_1}{2}} H_3(\alpha)H_2^{-1}(\alpha)d\alpha;\\ &R_3(\alpha_1) = \int_0^{\frac{\alpha_1}{2}} \psi H^{-\frac{1}{2}}(\alpha)H_2^{-3}(\alpha)\sin^2 2\alpha d\alpha + H_3(\alpha)H^{\frac{1}{2}}(\alpha)H_2^{-3}(\alpha)d\alpha;\\ &R_4(\alpha_1) = \int_0^{\frac{\alpha_1}{2}} H(\alpha)H_3(\alpha)H_2^{-5}(\alpha)d\alpha + 2\int_0^{\frac{\alpha_1}{2}} \psi H_2^{-5}(\alpha)\sin^2 2\alpha d\alpha; \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь $H(\alpha), H_1(\alpha), H_2(\alpha)$ определяются формулами (3.6), а

$$H_3(\alpha) = 2\cos 2\alpha - \psi. \tag{3.11}$$

Несложно усмотреть связь между параметрами μ и μ_1, которая может быть записана так

$$\mu = (1-\Delta)^2\mu_1. \tag{3.12}$$

При известных значениях μ решение (3.7) не может иметь любые корни, а должно подчиняться условию (3.12). иными словами, обжатие полосы зависит от физико-математических и геометрических характеристик процесса прокатки, включая условие на контакте прокатываемой полосы и валков.

Литература

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М: Высшая школа, 1969.- 608с.
2. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1979.-119с.

3. Рудской А.И., Рудаев Я.И. Механика динамической сверхпластичности алюминиевых саплавов. – СПб.: Наука. – 218с.

4. Кийко И.А. Пластическое течение металлов/ Научные основы прогрессивной техники и технологий. – М.: Машиностроение, 1985. – 105-133с.

5. Субботина Е.А. «Теория продольной прокатки алюминиевого листа в термомеханических условиях сверпластичности» // Современные проблемы механики сплошных сред. – Бишкек,2013, Вып.17 с.233 – 245.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ГИБКОЙ УПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

Тюреходжаев А.Н., Кырыкбаев Б.Ж.
Казахский национальный технический университет имени К.И.Сатпаева,
Алматы, Республика Казахстан E-mail: Tyurekhodja @ ntu. kz

SOLUTION OF THE TASK ABOUT BENDING OF FLEXIBLE CIRCLE PLATE

Tyurekhodjaev A.N., Kyrykbaev B. Zh ,
Kazakh National Technical University named after Kanysh I. Satpayev,
Almaty, Republic of Kazakhstan E-mail: Tyurekhodja @ ntu. kz

В работе методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений построено аналитическое решение задачи об изгибе гибкой кольцевой упругой пластины,описывающейся нелинейной системой дифференциальных уравнений. Получены закономерности изменения прогиба, угла поворота,напряжений и изгибающих моментов.

В работе рассматриваются гибкие пластины, которые имеют широкие практические приложения в современном машиностроении, атомных реакторах, самолетостроении, моторостроении, судостроении, приборостроении и т.д. Осесимметричный изгиб круглой гибкой упругой пластины описывается нелинейной системой дифференциальных уравнении, аналитическое решение которой представляет значительные математические трудности. В этом случае является целесообразным применение метода частичной дискретизации дифференциальных уравнении.

Рассмотрим гибкую кольцевую пластину постоянной толщины h, подвергающуюся действию распределенной по круговой полосе пластины нагрузки интенсивности $q(r)$.

Основная система дифференциальных уравнений для круглой гибкой пластины имеет следующий вид [1]

$$\begin{aligned} D\frac{d}{dr}\left(\nabla^2 w\right) &= \Psi + \frac{h}{r}\frac{d\Phi}{dr}\frac{dw}{dr}, \\ \frac{d}{dr}\left(\nabla^2 \Phi\right) &= -\frac{E}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$, $\Psi = \frac{1}{r}\int_0^r q(r)[H(r-r_c)-H(r-r_d)]rdr$ – функция нагрузки, распределенная по круговой полосе с радиусами r_c и r_d, $H(r-r_c)$ и $H(r-r_d)$ – единичные функции Хевисайда, Ф – функция напряжения, введенная выражениями $\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}$ и $\sigma_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2}$, соответственно радиальное и тангенциальное напряжения, w – прогиб, Е – модуль упругости, $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ – жесткость пластины, μ – коэффициент Пуассона.

Пользуясь методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений А.Н.Тюреходжаева [2], второе уравнение системы (1) приводим к виду

$$\frac{d^3\Phi}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E}{4r}\sum_{k=1}^{n}(r_k + r_{k+1})\left\{\left[\frac{dw(r_k)}{dr}\right]^2\delta(r-r_k) - \left[\frac{dw(r_{k+1})}{dr}\right]^2\delta(r-r_{k+1})\right\}, \qquad (2)$$

3. Рудской А.И., Рудаев Я.И. Механика динамической сверхпластичности алюминиевых саплавов. – СПб.: Наука. – 218с.

4. Кийко И.А. Пластическое течение металлов/ Научные основы прогрессивной техники и технологий. – М.: Машиностроение, 1985. – 105-133с.

5. Субботина Е.А. «Теория продольной прокатки алюминиевого листа в термомеханических условиях сверпластичности» // Современные проблемы механики сплошных сред. – Бишкек,2013, Вып.17 с.233 – 245.