МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАЗЕМНОГО СООРУЖЕНИЯ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИИ

Дуйшеналиев Т.Б., Сарсенов Б.Т.
Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова,
г. Бишкек, sarsenovbak@mail.ru
Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, Bishkek, sarsenovbak@mail.ru

Рассмотрена модельная задача для исследования процессов распространения и дифракции сейсмических волн в земной коре вследствие сброса тектонических напряжений на глубинных трещинах, и их воздействия на наземные сооружения. Решена контактная нестационарная краевая задача для упругого полупространства, на границе которого находится упругое тело с условиями жесткого сцепления на контактной поверхности. Исследуется процесс дифракции и преломления волн, порождаемых сбросом напряжений на горизонтальной трещине в упругом полупространстве. Для решения задачи используется численный метод бихарактеристик. Исследовано напряженно-деформированное состояние поверхностного включения при преломлении сейсмических волн в зависимости от его расстояния от эпицентра при сбросе вертикальных напряжений на трещине.

Для решения нестационарных задач в упругих средах одним из наиболее удобных в приложениях методов является метод бихарактеристик с использованием идей метода расщепления, развитый Г.Т. Тарабриным [1]. В настоящей работе используется метод, развитый для решения контактных задач взаимодействия упругих тел с угловыми точками в условиях плоской деформации [2,3]. Принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения полосы и полуплоскости. Для моделирования процесса сброса напряжений на трещине используются сингулярные обобщенные функции по методу, предложенному в [4].

Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругого полупространства и упругого тела при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещине с использованием физико-механических параметров, типичных для горных пород и строительных сооружений. Построены осциллограммы скоростей перемещений дневной поверхности и упругого тела и дифракционные картины полей скоростей и напряжений при отражении и преломлении ударных волн. Исследовано влияние параметров массива, глубины трещины и характера возникающих ударных волн на напряженно-деформированное состояние среды и упругого тела. Также изучено напряженно-деформированное состояние упругого тела (сооружения) в зависимости от расстояния до эпицентра.

Постановка контактной задачи. Рассмотрим составную неоднородную упругую среду: полупространство $x_1 \geq 0$ упругой однородной изотропной среды D_1 с плотностью ρ_1 и коэффициентами Ламе λ_1 и μ_1, а также упругое изотропное прямоугольное тело D_2 с высотой d_1 и шириной $2d_2$, расположенное на упругом полупространстве D_1, и с плотностью ρ_2, коэффициентами Ламе λ_2, μ_2 в условиях плоской деформации при сбросе напряжений на горизонтальной трещине S, которая расположена на глубине L ($x_1 = L$, $|x_2| \leq d$) (рис.1).

В начальный момент времени среда находятся в состоянии покоя

$$\mathbf{u}^{(k)} = 0,\ \dot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0\ \ (k = 1,2), \qquad (1)$$

при свободных от воздействующих нагрузок на границе полупространства и включения:

$$\sigma_{1j}^{(1)} = 0\ (j=1,2),\ при\ x_1 = 0,\ |x_2 - d_3| > d_2, \qquad (2)$$

$$\sigma^{(2)}_{1j}=0\ (j=1,2),\ при\ x_1 = -d_1,\ |x_2 - d_3| \leq d_2, \qquad (3)$$

$$\sigma^{(2)}_{2j}=0\ (j=1,2),\ при\ |x_2 - d_3| = d_2,\ 0 \leq x_1 \leq d_1 \qquad (4)$$

А условия на контактной границе отвечают требованиям полного сцепления :

$$v^{(1)}_i = v^{(2)}_i,\ \ \sigma^{(1)}_{1j} = \sigma^{(2)}_{1j}\ \ (i,j=1,2),\ при\ x_1 = 0,\ |x_2 - d_3| \leq d_2. \qquad (5)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(k)}$ - компоненты тензора напряжений k–ой среды, $v_j^{(k)}$ - компоненты скоростей перемещений этих сред. Так как на бесконечности отсутствуют источники колебания, то очевидным является требование, чтобы на бесконечности выполнялись условия затухания:

$$u_j \to 0,\ \sigma_{ij} \to 0\ \ (i,j=1,2) \quad при\ \ \|x\| \to \infty.$$

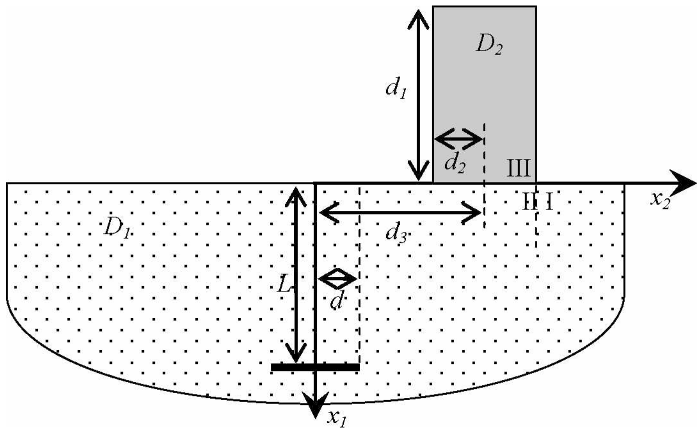


Рисунок 1 – Расчетная область

При описанных условиях необходимо исследовать напряженно – деформированное состояние неоднородной среды $D_1 \cap D_2$ при $t > 0$

Определяющие уравнения. Для описания движения упругой среды используются две системы дифференциальных уравнений:

$$\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)} = \rho_k \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2} \qquad (i,k,\beta = 1,2), \qquad (6)$$

и соотношения обобщенного закона Гука:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \lambda_k u_{\beta,\beta}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_k (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \qquad (i,j,k,\beta = 1,2) \qquad (7)$$

Здесь по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование от 1 до 2 (тензорная свертка), $F^{(k)}_i$ - компоненты объемной силы.

Для моделирования сброса напряжений на трещине в полупространстве введена объемная сила, компоненты $F_i^{(1)}$ которой определяются сингулярной обобщенной функцией – простым слоем на горизонтальной трещине S [4].

Решение задачи удобно отыскивать в безразмерном пространстве переменных и искомых параметров, которые получаются после введения обозначений [3]

$$c_1^{(k)}=\frac{c_1^{(k)*}}{c_1^{(m)*}};\quad c_2^{(k)}=\frac{c_2^{(k)*}}{c_1^{(m)*}};\quad x_i=\frac{x_i^*}{L^*};\quad t=\frac{t^*c_1^{(m)*}}{L^*};$$

$$\rho_k=\frac{\rho_k^*}{\rho_m^*};\quad v_i^{(k)}=\frac{\dot{u}_i^{(k)*}}{c_1^{(m)*}};\quad \sigma_{ij}^{(k)}=\frac{\sigma_{ij}^{(k)*}}{\rho_m^*\left(c_1^{(m)*}\right)^2};\quad F_i^{(k)}=\frac{F_i^{(k)*}L^*}{\rho_m^*\left(c_1^{(m)*}\right)^2};$$

$$\gamma_{11}^{(k)}=\gamma_{22}^{(k)}=\rho_k\left(c_1^{(k)}\right)^2;\quad \gamma_{12}^{(k)}=\gamma_{21}^{(k)}=\rho_k\left(c_2^{(k)}\right)^2;\quad \gamma_{33}^{(k)}=\gamma_{11}^{(k)}-2\gamma_{12}^{(k)}$$

Здесь индекс * придается размерным величинам; индекс m относится к материалу, в котором скорость продольных волн является наибольшей; $c_1^{(k)*}=\sqrt{\dfrac{\lambda_k^*+2\mu_k^*}{\rho_k^*}}$, $c_2^{(k)*}=\sqrt{\dfrac{\mu_k^*}{\rho_k^*}}$ – скорости распространения продольных и поперечных волн в k-той среде; L^* –характерный линейный размер; t – время.

После введения безразмерных величин, из уравнений (6), (7) после простых преобразований можно получить $(i, j, k = 1, 2)$:

$$\rho_k\dot{v}_i^{(k)}=\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)}+F_i^{(k)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}=\gamma_{ij}^{(k)}(v_{i,j}^{(k)}+v_{j,i}^{(k)})\frac{1}{(1+\delta_{ij})}+\gamma_{33}^{(k)}(v_{\beta,\beta}^{(k)}-v_{i,j}^{(k)})\delta_{ij} \tag{11}$$

Уравнения (11) представляют собой линейную неоднородную гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Её характеристические поверхности в трехмерном пространстве $(x_1;\ x_2;\ t)$ представляют собой конусы с осями, параллельными оси времени. Система уравнений (11) имеет два семейства характеристических конусов. Эти конусы совпадают с бихарактеристиками уравнений (11).

Процедуры получения разрешающихся разностных систем уравнений для (11) относительно неизвестных σ_{ij} и v_i $(i,j=1,2)$ в узловых точках A исследуемого тела в момент времени $t_n+\tau$ различны для внутренних и граничных точек исследуемой области (подробно см. [2, 3, 5]).

Разработанная методика решения динамических задач позволяет определить скорости v_i и компоненты тензора напряжения σ_{ij} в точке A на каком-нибудь слое времени $t=t_0+\tau$, если известны их значения на предыдущем слое $t=t_0$.

Дифракция преломленных волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине. Расчет был произведен для грунта (D_1) и (D_2) бетона при следующих безразмерных значениях исходных данных: $\rho_1=1$; $c_1^{(1)}=0.964$; $c_2^{(1)}=0.557$; $\rho_2=1$; $c_1^{(2)}=1$; $c_2^{(2)}=0.612$; $\tau=0.025$; $h=0.05$; $d_1=1$; $d_2=0.5$, $L=4.8$; $d=0.45$; d_3 варируется $d_3=0$ и $d_3=5$.

Скачок напряжений на трещине задается в виде

$$P_1(x,t)=20\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-10t}H(t),\quad P_2(x,t)=0,$$

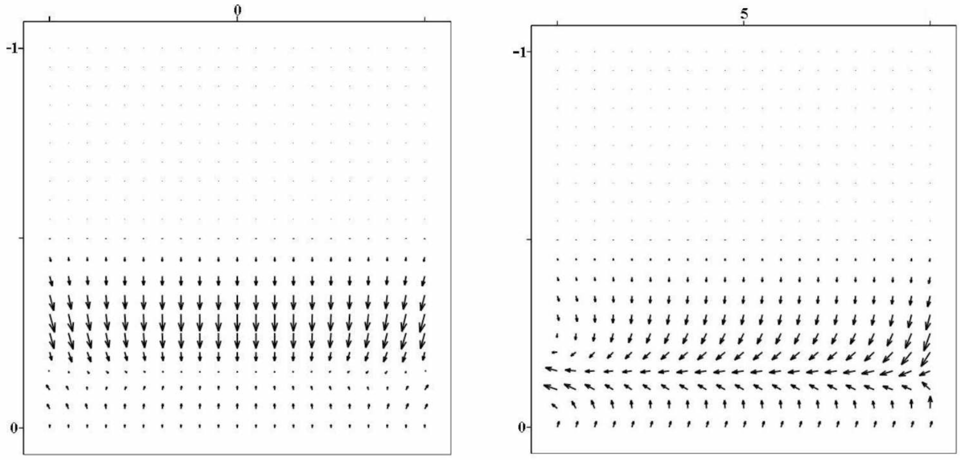
и параметр дельтаобразной функции $\varepsilon = h=0.05$.

Дифракцию упругих волн в упругой полуплоскости при сбросе вертикальных и горизонтальных напряжений на трещинах в отсутствии поверхностных включений мы рассмотрели в [5]. Здесь дадим анализ результатов преломления упругих волн при сбросе вертикальных напряжений на трещине (трещина разрыва) на поверхностном включении с момента времени при разном расстоянии включения от эпицентра: для $d_3=0$ (включение в эпицентре и) и для $d_3=5$ (включение на расстоянии 5 от эпицентра).

На рисунках 2а,б представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны распространились до середины включения. При $d_3=0$ (рис.2а) распространяется только продольная волна, и можно заметить эффект взаимодействия с боковой поверхностью. А при $d_3=5$ (рис.2б) за продольной волной следует и поперечная волна, что соответствует типу воздействия. Здесь тоже заметен эффект взаимодействия, но сильнее с правой стороной. Это объясняется тем, что включение стоит справа от эпицентра.

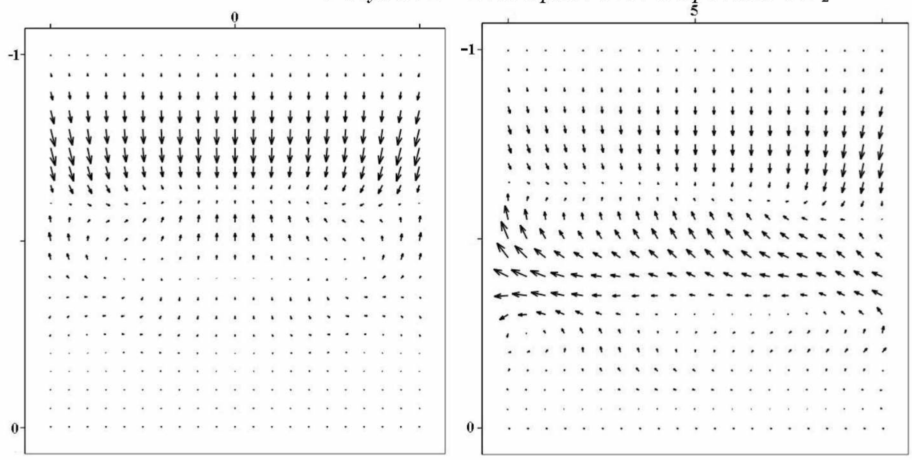
На рисунках 3а,б представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленная волна только добежала до верхнего торца. На рисунке 3а можно заметить, что за продольной волной начинается образование слабых поперечных волн, а на рисунке 3б можно заметить, что отраженная с правой боковой стороны волна подхваченная поперечной волной, добежала до левой стороны.

На рисунках 4а,б представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца. Здесь наблюдается сложная дифракционная картина. На рисунке 4а можно заметить, что верхние угловые точки работают как источники продольной и поперечной волн.



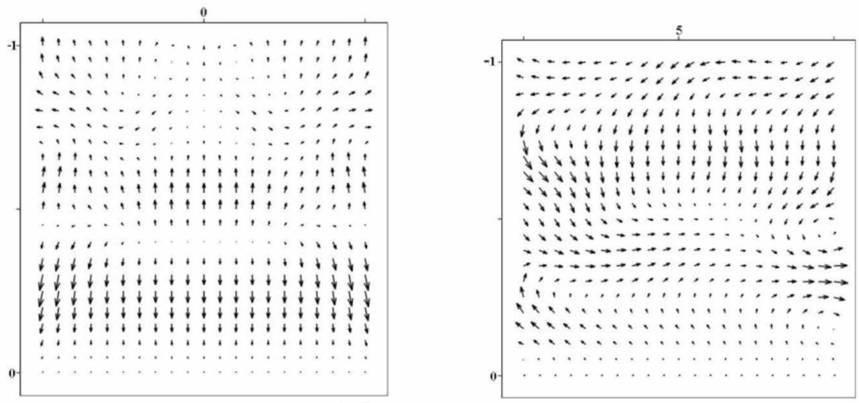
а) d_3=0, t=5.5 б) *d_3=5, t=7.25*

Рисунок 2 - Векторное поле скоростей в D_2



а) d_3=0, t=6 б *) d_3=5, t=7.75*

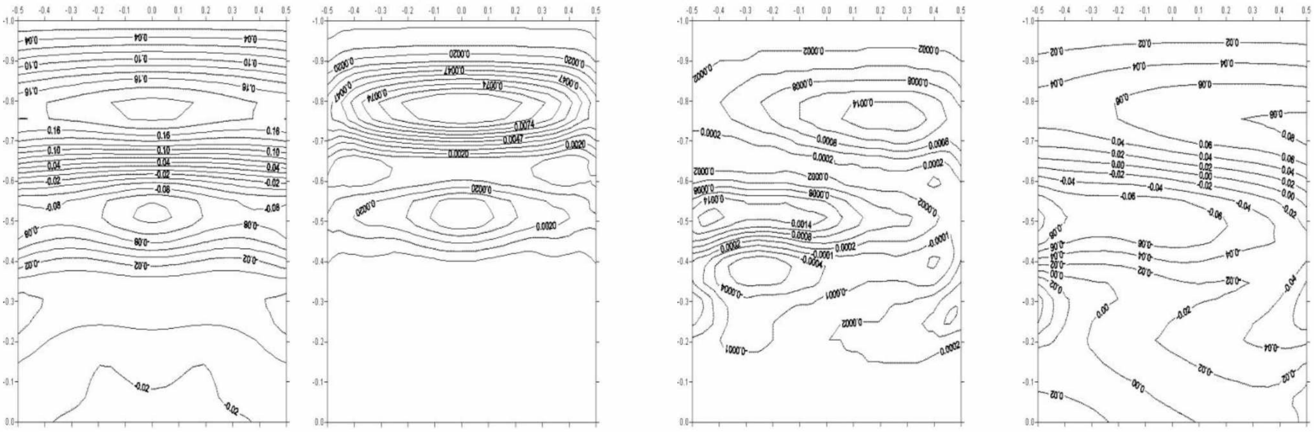
Рисунок 3 - Векторное поле скоростей в D_2 при подходе преломленных волн к верхнему торцу



а) d_3=0, t=7 б) *d_3=5, t=8.75*

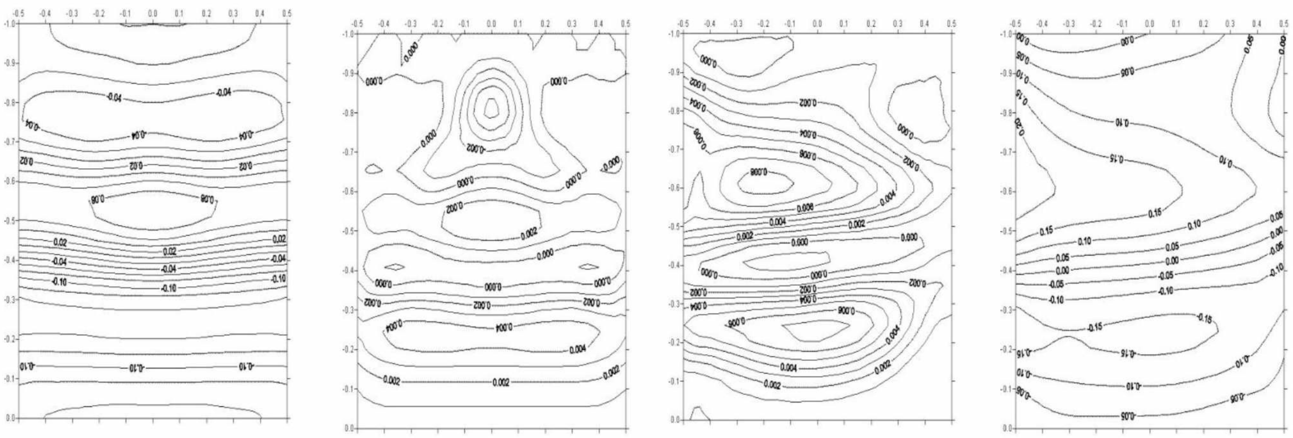
Рисунок 4. - Векторное поле скоростей тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца

На рисунках 5 - 6, представлены изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжений, которые характеризуют распределение давления и интенсивность касательных напряжений в исследуемом теле. Эти инварианты также характеризуют объемные и сдвиговые деформации в теле.



а) d_3=0, t=6 б*) d_3=5, t=7.75*

Рисунок 5-Изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжения в D_2 до отражения преломленных волн от верхнего торца



а) d_3=0, t=7 б) *d_3=5, t=8.75*

Рисунок 6- Изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжения в D_2, когда преломленные волны отразились от верхнего торца

Литература

1. Тарабрин Г.Т. Применение метода бихарактеристик для решения нестационарных задач динамики анизотропных массивов.// М., Строительная механика и расчет сооружений, 1981, № 4, стр. 38 – 43.

2. Джузбаев С.С. Контактное взаимодействие упругих тел при нестационарных динамических нагрузках: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук. - Туркестан, 1997. - 134 с.

3 Джузбаев С.С., Сарсенов Б.Т. Динамическое напряженное состояние полосы при боковом импульсном давлении.// Математический журнал. Алматы. 2003. Том 3. №1(7). стр. 55 – 62 ()

4. Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш. Обобщенное решение уравнений динамики упругой среды с криволинейной трещиной при плоской деформации// Математический журнал, 2007, Т7, №2(25), стр. 19 – 31.

5. Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т. Модель динамики среды в окрестности очага землетрясения // Сб. научн. трудов НИА РК. Методы экспериментальной физики. Алматы. – 2010. – С. 63-73.

УДК 539.3

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Алексеева Л.А.
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,
Алматы, Казахстан, alexeeva@math.kz

Стержневые конструкции широко используются в машиностроении в качестве соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. В процессе эксплуатации они подвергаются переменным механическим и термическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в конструктивных элементах, зависящее от их температуры, и влияющее на их прочность и надежность. Поэтому определение термо-напряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств (в частности, упругости) относится к числу актуальных научно-технических проблем.

Изучение термодинамических процессов методом математического моделирования приводит к краевым задачам для термоупругих сред, которые описываются системами дифференциальных уравнений смешанного гиперболо-параболического типа. Существуют различные модели термоупругих сред. При изучении медленных динамических процессов чаще используется модель *несвязанной термоупругости*, в которой не учитывается влияние движения среды на ее температурное поле.

Быстрые вибрационные процессы в конструкциях влияют на температурное поле в них. При изучении таких процессов следует использовать модель *связанной термоупругости*. Здесь рассмотрены краевые задачи (КЗ) стационарных колебаний термоупругого стержня с использованием этой модели в предположении, что известны действующие на него силы и тепловые источники. На основе метода обобщенных функций построено аналитическое решение краевой задачи при заданных перемещениях и температуре на концах стрежня.

1. Постановка краевых задач. Рассмотрим термоупругий стержень длины $2L$, который характеризуется плотностью ρ, жесткостью EJ и термоупругими константами γ, η и κ [1,2]. Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гиперболо-параболических уравнений вида:

$$\begin{aligned} &\rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma\theta_{,x} + \rho F_1 = 0, \\ &\theta_{,xx} - \kappa^{-1}\theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $u(x,t)$ - компоненты продольных смещений, $\theta(x,t)$ - относительная температура $\left(\theta = T(x,t) - T(x,0)\right)$, T - абсолютная температура, c - скорость распространения упругих волн в стержне, ρ - погонная плотность, $c = \sqrt{\dfrac{EJ}{\rho}}$ Предполагается, что на стержень действует периодическая во времени сила вида

$$F_1(x,t) = F_1(x)\exp(-i\omega t), \qquad (2)$$

а $F_2 = (\lambda_0\kappa)^{-1} W(x,t)$, $W(x,t) = W(x)\exp(-i\omega t)$, где W- количество выделенного (поглощенного) тепла на единицу объема за единицу времени, λ_0 - коэффициент теплопроводности. Символ после запятой обозначает частную производную по указанной в индексе переменной ($u_{,x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ и т.д.).

Термоупругое напряжение в стержне определяется формулой:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma\theta \qquad (3)$$

Краевые условия на концах стержня $\left(x = x_1 = -L,\ x = x_2 = L\right)$ могут быть различными. Здесь сформулируем их для четырех краевых задач, обычно рассматриваемых в классической теории термоупругости [1,2]:

1 КЗ $u\left(x_j, t\right) = w_j \exp\left(-i\omega t\right), \quad \theta(x_j,t) = \theta_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1,2$ $\qquad (4)_1$

2 КЗ $\sigma\left(x_j,t\right)=P_j\exp\left(-i\omega t\right),\quad \theta_{,x}(x_j,t)=q_j\exp(-i\omega t);\quad j=1,2$ (4)$_2$

3 КЗ $u\left(x_j,t\right)=w_j\exp\left(-i\omega t\right),\quad \theta_{,x}(x_j,t)=q_j\exp(-i\omega t);\quad j=1,2$ (4)$_3$

4 КЗ $\sigma\left(x_j,t\right)=P_j\exp\left(-i\omega t\right),\quad \theta(x_j,t)=\theta_j\exp(-i\omega t);\quad j=1,2$ (4)$_4$

$w_j,\theta_j,P_j,\ q_j$ - *комплексные аплитуды*, ω - *частота колебаний*. Наряду с ними можно поставить краевые задачи, когда на одном конце стержня задаются условия одной краевой задачи, а на втором – условия другой. Это прямые краевые задачи.

К обратным задачам отнесем те, для которых из 4-х краевых условий на одном из концов задаются 3 (или 4) условия на перемещения, напряжения, температур и тепловой поток, а на другом лишь одно на одну из этих величин (либо соответственно вообще они неизвестны). Требуется найти решение этих задач.

2. Обобщенное решение краевой задачи. В силу гармоничности по времени действующих сил и граничных условий, решение задачи можно искать в виде $\left(u,\theta\right)=\left(u(x),\theta(x)\right)\exp(-i\omega t)$, где комплексные амплитуды $\left(u(x),\theta(x)\right)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&\rho c^2u_{,xx}+\rho\omega^2u-\gamma\theta_{,x}+\rho F_1(x)=0,\\&\theta_{,xx}+i\omega\kappa^{-1}\theta+i\omega\eta u_{,x}+F_2(x)=0.\end{aligned}\qquad(5)$$

Определим комплексные амплитуды решения, удовлетворяющие (5) и условиям (4) соответственно решаемой КЗ, если $F_1(x),F_2(x)$ принадлежат классу обобщенных функций медленного роста $S'(R^1)$ [3].

Для решения задачи используется метод обобщенных функций, основные идеи которого изложены в [4]. Для этого представим обобщенное решение КЗ в виде

$$\left(\hat{u}(x),\hat{\theta}(x)\right)=\left(u(x),\theta(x)\right)H(L-|x|),$$

где $H(x)$ -- функция Хевисайда, равная 0.5 в точке разрыва, $\left(u(x),\theta(x)\right)$ -- ее классическое решение. Из (4) , используя операцию дифференцирования регулярных кусочно-дифферен-цируемых обобщенных функций [3], получим на $S'(R^1)$:

$$\begin{aligned}&\rho c^2\hat{u}_{,xx}+\rho\omega^2\hat{u}-\gamma\hat{\theta}_{,x}=\rho c^2\left(u(-L)\delta'(x+L)-u(L)\delta'(x-L)\right)+\\&\quad+\rho c^2\left(\left(u_{,x}(-L)\delta(x+L)-u_{,x}(L)\delta(x-L)\right)\right)-\\&\quad-\gamma\theta(-L)\delta(x+L)+\gamma\theta(L)\delta(x-L)-\rho F_1(x)H(L-|x|),\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}_{,xx}+i\omega\kappa^{-1}\hat{\theta}+i\omega\eta\hat{u}_{,x}=i\omega\eta\left(\left(u(-L)\delta(x+L)-u(L)\delta(x-L)\right)\right)+\\&\quad+\theta(-L)\delta'(x+L)-\theta(L)\delta'(x-L)+\\&\quad+\theta_{,x}(-L)\delta(x+L)-\theta_{,x}(L)\delta(x-L)-F_2(x)H(L-|x|),\end{aligned}$$

$\delta(x)$ - функция Дирака. Коротко запишем эту систему в виде

$$\sum_{j=1}^{2}D_{kj}(\partial_x)\hat{u}_j(x)=\hat{G}_k(x,w_1,w_2,u'(-L),u'(L),\theta_1,\theta_2,\theta'(-L),\theta'(L))+\hat{F}_k(x),\quad k=1,2.$$

Требуется определить решение (6) при полученной сингулярной правой части, которая зависит от значений искомых функций в граничных точках и их производных.

Решение системы уравнений (6) имеет вид свертки:

$$\hat{u}_k(x)=\sum_{j=1}^{2}U_k^j(x,\omega)*\hat{G}_j(x,...)+\sum_{j=1}^{2}U_k^j(x,\omega)*\hat{F}_j(x),\quad k=1,2,\qquad(7)$$

где $U_k^j(x,\omega)$ -- матрица фундаментальных решений системы уравнений (4)

$$\sum_{j=1}^{2} D_{kj}(\partial_x)U_j^l(x) = \delta_k^l \delta(x), \quad k,l = 1,2\,, \tag{8}$$

δ_k^l - символ Кронекера. Как известно, если такая свертка существует, то обобщенное решение существует и оно единственно. А если оно регулярное и дифференцируемое, то совпадает с классическим.

Подставляя в (7) правую часть (5) и вычисляя, получим решение задачи в виде

$$u(x)H(|x|-L) = F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2 +$$

$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(p_k - \breve{\gamma}\,\theta_k\right)U_1^1(x-(-1)^k L,\omega) + u_k(\omega)U_{1,x}^1(x-(-1)^k L,\omega)\right\} + \tag{9$_1$}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(q_k + i\omega\eta\, w_k\right)U_1^2\left(x-(-1)^k L,\omega\right) + \theta_k(\omega)U_{1,x}^2\left(x-(-1)^k L,\omega\right)\right\}$$

$$\theta(x)H\left(L-|x|\right) = F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2 +$$

$$+c^2\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left\{\left(p_k - \gamma\theta_k\right)U_2^1(x-(-1)^k L,\omega) + w_k U_{2,x}^1(x-(-1)^k L,\omega)\right\} + \tag{9$_2$}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k + i\omega\eta w_k\right)U_2^2\left(x-(-1)^k L,\omega\right) + \theta_k U_{2,x}^2\left(x-(-1)^k L,\omega\right)$$

Формулы (9) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Однако, для каждой краевой задачи известны только четыре граничных значения комплексных амплитуд, например, для КЗ1 известны только перемещения и температура на концах стержня. Для ее решения надо определить напряжения и тепловые потоки на его концах.

Аналогично для других КЗ. Для определения недостающих краевых значений следует использовать краевые условия, исходя из свойств фундаментальной матрицы $U_k^j(x,\omega)$.

3 Матрица фундаментальных решений и ее свойства. Фундаментальную матрицу $U_k^j(x,\omega)$ удается построить аналитически с помощью обобщенного преобразования Фурье уравнений (8). Она имеет следующий вид:

$$U_1^j(x,\omega) = \frac{\delta_1^j H_0(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{ i\omega\kappa^{-1}\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}}\right) + \left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\right\} - \tag{16}$$

$$-\frac{\gamma\delta_2^j H_0(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right), \quad j=1,2$$

$$U_2^j(x,\omega) =$$

$$= \frac{H_0(x)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left\{ i\omega\eta\delta_1^j\left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2}\right) - \omega^2\left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\delta_2^j + \right.$$

$$\left. + c^2\left(\sqrt{\lambda_1}\sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}\sin x\sqrt{\lambda_2}\right)\delta_2^j\right\}, \quad j=1,2$$

где

$$H_0(x) = H(x) - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2}\left(H(x) - H(-x)\right) \tag{17}$$

(заметим, что риманова поверхность матрицы по ω однолистная, т.к. значения компонент U_k^j не зависят от выбора знака радикалов $\sqrt{\lambda_j}$). U_k^j непрерывны в точке x=0:

$$U_k^j(\pm 0,\omega) = U_k^j(0,\omega) = 0, \quad k, j = 1,2, \tag{18}$$

а ее производные в этой точке терпят разрыв первого рода:

$$\tilde{U}_1^j{}_{,x}(\pm 0,\omega) = \pm\frac{1}{2}\delta_1^j, \tilde{U}_2^j{}_{,x}(\pm 0,\omega) = \pm\frac{c^2}{2}\delta_2^j \tag{19}$$

(верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему – правый).

3 Разрешающие уравнения краевой задачи. Используя (6) и предельные свойства $U_j^i(x,\omega)$ при $x \to \pm 0$ (17), (18), из вида решения (9) получим систему из четырех линейных алгебраических уравнений в левой и правой граничных точках для определения четырех неизвестных функций на концах стержня:

$$0.5u_1 = c^2\left(\breve{\gamma}\theta_2 - p_2\right) + u_2 U_1^1{}_{,x}(-2L,\omega) - \left(q_2 + i\omega\eta u_2\right)U_1^2(-2L,\omega) -$$
$$-\theta_2 U_1^2{}_{,x}(-2L,\omega) + \left(\hat{F}_1 * U_1^1 + \hat{F}_2 * U_1^2\right)_{x=-L}$$
$$0.5u_2 = c^2\left(p_1 - \breve{\gamma}\theta_1\right) + u_1 U_1^1{}_{,x}(2L,\omega) + \left(q_1 + i\omega\eta u_1\right) + \theta_1 U_1^2{}_{,x}(2L,\omega) +$$
$$+\left(\hat{F}_1 * U_1^1 + \hat{F}_2 * U_1^2\right)_{x=L}$$

$$0{,}5\theta_1 = c^2\left(\gamma\theta_2 - p_2\right)U_2^1(-2L,\omega) - c^2 u_2 U_2^1{}_{,x}(-2L,\omega) -$$
$$-\left(q_2 + i\omega\eta u_2\right)U_2^2(-2L,\omega) + \theta_2 U_2^2{}_{,x}(-2L,\omega) + \left(F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\right)\Big|_{x=-L},$$
$$0{,}5\theta_2 = \tag{20}$$
$$+c^2\left\{\left(p_1 - \gamma\theta_1\right)U_2^1(2L,\omega) + u_1 U_2^1{}_{,x}(2L,\omega)\right\} +$$
$$+\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\left(q_k + i\omega\eta u_k\right)U_2^2(2L,\omega) + \theta_1 U_2^2{}_{,x}(2L,\omega) + \left(F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\right)\Big|_{x=L}$$

Разрешающую систему уравнений (20) представим в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \left(U_1^1{}_{,x} - i\omega\eta U_1^2\right)_{(2L)} & -c^2 & \left(\breve{\gamma}c^2 - U_1^2{}_{,x}\right)_{(2L)} & U_1^2(2L,\omega) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -c\left({}^2U_2^1{}_{,x} + i\omega\eta U_2^2\right)_{(2L)} & c^2 U_2^1(2L,\omega) & \left(\gamma c^2 U_2^1 - U_2^2{}_{,x}\right)_{(2L)} & -U_2^2(2L,\omega) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} w_1 \\ p_1 \\ \theta_1 \\ q_1 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} \left(-U_1^1{}_{,x} + i\omega\eta U_1^2\right)_{(-2L)} & c^2 & \left(-\breve{\gamma}c^2 + U_1^2{}_{,x}\right)_{(-2L)} & U_1^2(-2L,\omega) \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ \left(c^2 U_2^1{}_{,x} + i\omega\eta U_2^2\right)_{-2L}, & c^2 U_2^1(-2L,\omega) & \left(-\gamma c^2 U_2^1 + U_2^2{}_{,x}\right)_{-2L} & U_2^2(-2L,\omega) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ p_2 \\ \theta_2 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \tag{21}$$

$$= \left\{F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2\Big|_{x=-L}, F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2\Big|_{x=L}, F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\Big|_{x=-L}, F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\Big|_{x=L}\right\}^T$$

Из этой системы легко построить линейную систему алгебраических уравнений для любой из рассмотренных краевых задач, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть с известными.

Так, например, для КЗ1 неизвестными являются напряжения и тепловые потоки на концах стержня (p_1, p_2, q_1, q_2) . Тогда из (21) получим

$$\left\{M_{ij}(L,\omega)\right\}_{4\times 4}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1(L,\omega) \\ b_2(L,\omega) \\ b_3(L,\omega) \\ b_4(L,\omega) \end{pmatrix} \tag{22}$$

Определитель матрицы M_{ij} определяет спектр собственных термоупругих колебаний стержня, частоты которых должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det\left\{M_{ij}(L,\omega_k)\right\}=0, \quad k=1,2... \tag{23}$$

В силу (16), это сложное трансцендентное уравнение, корни которого можно определять численно с помощью различных стандартных программ.

В случае собственных колебаний существование решений и его единственность определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений. Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера. После определения недостающих граничных функций по формулам (8), (2), определяем перемещения, температуру в стержне.

Для определения термоупругих напряжений подставим решение (9) в (3). В результате получим:

$$\sigma(x,\omega)=\rho c^2\left(\sum_{j=1}^{2}U_1^j{}_{,x}*\hat{G}_j(x,...)+\sum_{j=1}^{2}U_1^j{}_{,x}*\hat{F}_j(x)\right)-\gamma\theta(x,\omega) \tag{24}$$

где все входящие функции определены выше.

Заключение

Полученные решения позволяют определять термонапряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и термоупругих параметрах, а также во всем диапазоне частот колебаний. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных тепловых и силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Нетрудно видеть, что алгоритм решения сохраняется и для обратных краевых задач, если на одном конце стержня задать не два краевых значения, а три, а на другом одно, недостающее для разрешимости системы (21), или даже 4 значения на одном, при неизвестных значениях на другом. Этот класс полуобратных и обратных задач очень важен для практических приложений при изготовлении разнообразных контроллеров для измерительных приборов для конструкций и сооружений, работающих в условиях переменных термических и динамических воздействий.

Литература

1. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости - М.:Мир, 1970 .
2. Новацкий В. Теория упругости –М.:Мир
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М., 1978.
4. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения// Математический журнал. -Т.6 (2006) , №1(19), с.16-32.
5. Алексеева Л.А., Ахметжанова М. М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней // Материаловедение, Бишкек, 2013. – №2, с.46-50.

УДК 663.631

ПРОТАИВАНИЕ МЕРЗЛОГО ГРУНТА С УЧЕТОМ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДЫ ИЗ ВОДОЕМА

Джаманбаев М.Дж.
Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова,
Бишкек, Кыргызская Республика, jamanbaev@mail.ru

Предлагается методика определение глубины протаивания мерзлого грунта под основанием водоема с учетом фильтрации воды из водоема.

Введение. Температурный режим мерзлого грунта зависит от скорости инфильтрации и температуры воды в грунте. Фильтрующаяся вода, омывая грунт или полностью ее, насыщая, влияет на процесс переноса тепла, т.е. заметно увеличивают эффективную теплопроводность грунта и тем самым способствуют увеличению теплового потока из вне в грунт. Поэтому достоверность определения глубины протаивания мерзлого грунта под основанием водоема зависит от учета фильтрации и температуры воды в водоеме и в грунте. Существуют различные математические модели, описывающие температурно-фильтрационный режим грунта. Если происходит просачивание воды в грунте под влиянием разности давлений или под действием собственного веса, то в таких случаях свободная конвекция отсутствует, и температурный режим воды и грунта описываются известными уравнениями теплопереноса и фильтрации

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \beta_v(Q - T);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + v_x\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + v_y\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + v_z\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \alpha^*(T - Q). \qquad (1)$$

где $T(x,y,z,\tau)$- температура грунта; $Q(x,y,z,\tau)$- температура фильтрующей воды; $\tau -$ время; $a_x, a_y, a_z -$ коэффициенты температуропроводности грунта, насыщенного водой по осью; $v_x,\ v_y,\ v_z -$ компоненты скорости фильтрации по осям; $\alpha^* = \frac{\alpha_v}{C_в\,\rho_в}$; $\beta_v = \frac{\alpha_v}{C_г\rho_г}$

α_v - объемный коэффициент теплообмена, характеризующий теплообмен между грунтом и омывающей его фильтрующей жидкостью; удельная объемная теплоемкость воды и грунта; $\rho_в, \rho_г$ - плотности воды и грунта.

Система уравнений (1) описывает изменение температуры фильтрующей воды при прохождении через пористую проницаемую среду и ее отличие от температуры пористой среды. Теплообмен между водой и грунтом характеризуется параметром – коэффициентом объемного теплообмена. При длительном процессе теплопереноса, температуру грунта и температуру фильтрующей воды можно считать равными. Тогда уравнения (1) упрощаются, и сводится к уравнению Фурье-Кирхгофа [1]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{C_г\gamma_г}{C_в\gamma_в}\left(v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad (2)$$

Постановка задачи. Рассматривается процесс протаивания мерзлого грунта под основанием водоема глубиной H под влиянием температуры воды. Изначально грунт глубиной L считается мерзлой. Затем начинается наполнение водоема. Зимой вода на дне водоема не замерзает, т.е. имеет плюсовую температуру. Под влиянием плюсовой температуры начинается процесс протаивание.Температурно-фильтрационный процесс под основанием водоема можно рассматривать как одномерный процесс.

Математическая модель. Поскольку теплоперенос под основанием водоема происходит длительное время (годами) можно предположить, что температура грунта и температура фильтрующейся воды одинаковыми, т.е. принимается модель Фурье-Кирхгофа (2). В зоне талого грунта учитывается фильтрация воды из водоема, а в зоне мерзлого грунта фильтрация не учитывается.

$$\frac{\partial T_T}{\partial t} = a_T \frac{\partial^2 T_T}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial T_T}{\partial x},\ 0 \le x \le h. \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_M}{\partial t} = a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \le x \le L \quad (2)$$

Начально-граничные условия имеют вид:

$t = 0;\ x \in [0, L];\ T_M = f_1(x).$

$x=0,\ T_т = T_в,$

$x=h,\ T_т = T_м = T_0$

$x=L,\ T_м= T_1$,(3)

где соответственно - T_0, T_1 температура таяния мерзлого грунта и температура вечной мерзлоты. Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта описывается уравнением:

$$\lambda_T \left[\frac{\partial T_T}{\partial x}\right]_{x=h} - \lambda_M \left[\frac{\partial T_M}{\partial x}\right]_{x=h} = q_0 w \gamma \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4)$$

где $T_т$ – температура зоны талого грунта, являющаяся решением начально-краевой задачи (1)-(3) ; $T_м$ - температура мерзлого грунта, также являющееся решением начально-краевой задачи (2)-(3); $T_в$- температура воды; $T_п$- температура дна пруда;a_T,a_M,λ_T;λ_M-коэффициенты температуропроводности и теплопроводности грунта в талых и мерзлых грунтах; h - глубина протаивания; w - количество льда в грунте; q_0 - теплота плавления льда,γ - удельный вес грунта, v – скорость фильтрации воды из водоема.

Методика решения аналогична работам [2].Используя идею метода конечных элементов (МКЭ) строится аналитическое решение начально-краевой задачи (1)-(3), удовлетворяющее начальным и граничным условиям задачи отдельно для талой зоны и для мерзлой зоны. В качестве базисных функций для мерзлой зоны используются линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности (2)

$$T_1 1\ (x,t,a) = e^{\uparrow}(-\sqrt{(2\pi/a)}\ x)\ \cos(\sqrt{(2\pi/a)}\ x - 4at),$$

$$[\quad T] {}_1 2\ (x,t,a) = e^{\uparrow}(-\sqrt{(2\pi/a)}\ x)\ \sin(\sqrt{(2\pi/a)}\ x - 4at)\ . \quad (5)$$

Аналитическое решение в мерзлой зоне имеет вид

$$N_i^k(x,t,a) = \frac{T_2(x_j,t,a) * T_1(x,t,a) - T_2(x_{\square},t,a) * T_1(x_j,t,a)}{T_2(x_j,t,a) * T_1(x_i,t,a) - T_2(x_i,t,a) * T_1(x_j,t,a)},$$

$$N_j^k(x,t,a) = \frac{T_2(x_{\square},t,a) * T_1(x_i,t,a) - T_2(x_i,t,a) * T_1(x_{\square},t,a)}{T_2(x_j,t,a) * T_1(x_i,t,a) - T_2(x_i,t,a) * T_1(x_j,t,a)} \quad (7)$$

аналоги функции формы МКЭ т.е. при $x = x_i$, $N_i=1$, $N_j=0$; (k) – номер элемента. Дляпостроение аналитического решения для талой зоны используется преобразование вида

$$T(x,t,a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} U(x,t,a), \quad (8)$$

которое преобразует уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где U(x,t,a) – новая неизвестная функция. Она находится как решение соответствующей краевой задачи через преобразование (8), a–коэффициент температуропроводности. Тогда аналитическое решение начально-краевой задачи (1)-(3) запишется

$$T_T(x,t,a) = e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} \left(N_i(x,t,a)U_i + N_j(x,t,a)U_j\right), \quad (10)$$

где $U_i = T_i e^{\frac{-v_i(x_i - v_i t)}{2a}}$, $U_j = T_j e^{\frac{-v_j(x_j - v_j t)}{2a}}$, N_i, N_j – имеют вид как и (7).

Начальная область мерзлого грунта длиной L разбивается на два элемента. Первый элемент начинается от дневной поверхности до фронта таяния, которая является неизвестной и подвижной. Второй элемент начинается от фронта таяния до вечной мерзлоты глубиныL. В начальный момент наполнения водоема, длина первого элемента (зона таяние) будет очень маленькой по сравнению со второй. С течением времени этот элемент будет увеличиваться т.е.происходят таяние мерзлого грунта под влиянием температуры воды в водоеме, а длина второго элемента будет уменьшатся. Подвижная точка (фронт таяния) находится численно решением обыкновенной дифференциальной уравнении первого порядка (4) методом Рунге-Кутта.

Особенность данной методики решения задачи заключаются в следующем: 1) известность аналитического решение начально-краевой задачи, позволило снять ограничения на шаг по времени в расчете уравнении (4) и принималась равной неделю. Расчеты проводились на период одного года; 2) в отличие от других методов здесь используется только три заданные температуры: на дне водоема поддерживается постоянная температура воды, на фронте таяния - постоянная температура $+0.01C^0$ (температура плавления льда), которая двигается вместе с фронтом таяния и на конце глубины L поддерживается постоянная минусовая температура (вечная мерзлота) $-1.86C^0$; 3) Используя данные температуры в каждые моменты времени на каждом элементе численно находятся коэффициенты температуропроводности как решение трансцендентной уравнении

$$N_i^{(2)}(x,t,b) * T_{\mathbf{B}} + N_j^{(2)}(x,t,b) * T_{\mathbf{0}} = T^*,$$

$$e^{\frac{v(x-vt)}{2a}} (N_1 i^{\uparrow}((1))\ (x,t,a) * U_1 0 + N_1 j^{\uparrow}((1)\ )\ (x,t,a) * U_1(1\ )) = T^{**},$$

где T^*, T^{**} средние значения температуры в середине каждого элемента. Согласно изложенного алгоритма произведен расчет в двух вариантах.

Вариант 1. Процесс протаивания под основанием водоема рассматривается без учета фильтрации воды из водоема. Исходные данные считались равными. $\lambda_{\mathbf{T}} = 1.24,\qquad \lambda_{\mathbf{M}} = 1.54\ .\ \ L = 21m.$ Температура воды на дне водоема считалась равной $+6^0$C. Результаты показывают, что в течении года глубина протаивания достигает 4.51m.

Вариант 2. Процесс протаивание под основанием водоема рассматривается с учетом глубины водоема равной H=8m. и фильтрации воды из водоема. Математически исследуемый процесс моделируется уравнениями (1)- (4). Исходные данные были те же, что и в предыдущем варианте, а коэффициент фильтрации считалась равнымkf=0.0312, пористостьmp=0.22. Скорость фильтрации вычислялась по формуле Дарси. В этом случае глубина протаивание в течении года достигла до 6.45м. График результатов расчета приведены на рис.1. По оси ОУ приведены глубина протаивания, по оси ОХ приведены время в сутках.

Вариант 3. Рассматривается этот же случай, но глубина воды водоема на два метра больше, т.е. глубина считалась равной 10м. В этом случае скорость фильтрации была больше чем в предыдущем варианте и глубина протаивание достигла за один год до 8.58м. Подъем уровня воды в пруде на два метра приводить увеличению зоны таяния мерзлого грунта на 2.13м.

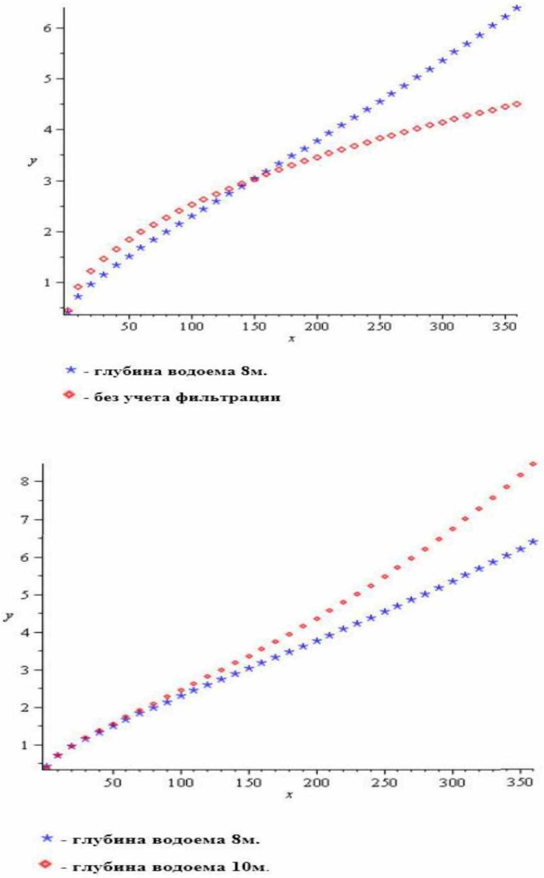


Рис. 1. Глубина протаивания

Вывод. Глубина протаивания под основанием водоема значительно зависит от уровня воды в пруде и от скорости фильтрации воды из водоема.

Литература

1. Джаманбаев М.Дж. Методы решения коэффициентных задач процессов переноса. Известия КГТУ им. И.Раззакова, № 22, с. 99-104. Бишкек-2011.
2. Джаманбаев М.Дж., Кадыркулова С. Методика расчета теплопереноса в горных породах. Известия Кыргызского технического университета им. И. Раззакова, № 7-Бишкек-2005.-с.129 -133.

УДК 532.546.2

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РЕЖИМ ТЕЛА ПЛОТИНЫ И ОСНОВАНИЯ ВОДОХРАНИЛИЩА

ДжаманбаевМ.Дж., Чыныбаев М.К.
Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова,
jamanbaev@mail.ru, chynybaev@gmail.com

В статье приводятся результаты расчетов температурного режима основания водохранилища совместно с телом и основанием плотины.

The article presents the results of calculations of temperature base of tailings together with the body and the base of the dam.

Введение. Из-за неизвестности теплофизических свойств хвоста и размера области расположения хвостов на дне пруда и на верхнем бьефе плотины временно рассмотрено температурный режим области основанияне хвостохранилища, а водохранилища близкой к условиям хвостохранилища.

Математическая модель. Существуют различные математические модели, описывающие температурно-фильтрационный режим грунта. Если происходит просачивание воды в грунте под влиянием разности давлений или под действием собственного веса, то в таких случаях свободная конвекция отсутствует, и температурный режим воды и грунта описываются известными уравнениями теплопереноса и фильтрации

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \beta_v (Q - T);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + v_y \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + v_z \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \alpha^* (T - Q), \qquad (1)$$

где T(x,y,z,τ)- температура грунта; Q(x,y,z,τ)- температура фильтрующей воды; $\tau -$ время; $a_x, a_y, a_z -$ коэффициенты температуропроводности грунта, насыщенного водой, по осьям; $v_x,\ v_y,\ v_z -$ компоненты скорости фильтрации по осьям;

$$\alpha^* = \frac{\alpha_v}{C_в \rho_в};\quad \beta_v = \frac{\alpha_v}{C_г \rho_г}$$

где α_v - объемный коэффициент теплообмена, характеризующий теплообмен между грунтом и омывающей его фильтрирующей жидкостью; удельная объемная теплоемкость воды и грунта; - плотности воды и грунта.

Система уравнений (1) описывает изменение температуры фильтрующей воды при прохождении через пористую проницаемую среду и ее отличие от температуры пористой среды. Теплообмен между водой и грунтом характеризуется параметром – коэффициентом объемного теплообмена. При длительном процессе теплопереноса, температуру грунта и температуру фильтрующей воды можно считать равными. Тогда уравнения (1) упрощаются, и сводится к уравнению Фурье-Кирхгофа [1]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{C_г \gamma_г}{C_в \gamma_в}\left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad (2)$$

Если в начальный момент грунт полностью насыщен водой и фильтрация воды отсутствует и начинается нагрев грунта, то из-за разности температуры воды, в грунте начинается свободная конвекция воды. Такой процесс описывается уравнениями Брикмана[2] и уравнением теплопереноса:

$$\frac{\mu}{k}u + \nabla p - \nabla \cdot \frac{\mu}{\varepsilon}(\nabla u + (\nabla u)^T) = pg\beta(T - T_c)$$
$$\nabla \cdot u = 0 \qquad (3)$$

Вывод. Глубина протаивания под основанием водоема значительно зависит от уровня воды в пруде и от скорости фильтрации воды из водоема.

Литература

1. Джаманбаев М.Дж. Методы решения коэффициентных задач процессов переноса. Известия КГТУ им. И.Раззакова, № 22, с. 99-104. Бишкек-2011.
2. Джаманбаев М.Дж., Кадыркулова С. Методика расчета теплопереноса в горных породах. Известия Кыргызского технического университета им. И. Раззакова, № 7-Бишкек-2005.-с.129 -133.