Кыргыз Республикасынын билим берүү
жана илим министрлиги
Жалал-Абад мамлекеттик университети

К.С. Алыбаев, Ж.А. Аванова

МАТЕМАТИКА

- Көптүктөр
- Туюнтмалар
- Функциялар
- Теңдемелер
- Барабарсыздыктар

Жалал-Абад – 2012

УДК 51
ББК 22.1
А 59

Жалал-Абад мамлекеттик университетинин окуу-усулдук кеңеши тарабынан сунушталган.

Рецензент: физ.-мат. илим. доктору, проф. Матиева Г.

Алыбаев К.С., Аванова Ж.А.
А 59 Математика. – Жалал-Абад: 2012. – 123 б.

ISBN 978-9967-09-190-0

Окуу колдонмону орто мектептин окуучулары, мугалимдер математика боюнча билимдерди системалаштырууда, ошондой эле колледждердин жана жогорку окуу жайлардын студенттери, окутуучулары пайдаланса болот.

А 1602000000-10

УДК 51

ISBN978-9967-09-190-0 ББК 22.1

Алыбаев Курманбек Сарманович
Аванова Жылдыз Авановна

МАТЕМАТИКА

Редактор: Нарбаев М.Р.

Корректор: Нарымбетов Т.К.

Терүүгө берилди 11.01.12
Басууга кол коюлду 27.03.12
Көлөмү 7.3 б.т.
Нускасы 300
Жалал-Абад мамлекеттик университетинин басмаканасы
Жалал-Абад шаары, Ленин көчөсү 57

Мазмуну

Кириш сөз

Азыркы учурда орто мектептин математика курсу боюнча окуу материалдары негизинен окуу китептерде гана жайгашкан. Математика боюнча өз билимдерин системалаштырууну ошондой эле өз алдынча даярданууну максат кылгандар үчүн мындай жагдай бир топ ыңгайсыздыктарды пайда кылаары талашсыз. Окуу колдонмону жазуудагы биринчи максат аталган маселени чечүү болуп эсептелди.

Экинчи жактан мектеп математикасы боюнча (окуу китептерден сырткаркы) окуу китебинин же колдонмонун жоктугу түрткү болду.

Аталган окуу колдонмо элементардык математика боюнча авторлор максат кылып койгон окуу колдонмолордун биринчи гана бөлүгү.

Бул бөлүк өз ичине көптүктөр, туюнтмалар, функциялар, теңдемелер, барабарсыздыктар түшүнүктөрүн жана алар менен байланышкан түрдүү математикалык теорияларды камтыйт.

Окуу колдонмодо негизги көңүл өзгөрүлмө чондуктарга, алар аркылуу түзүлгөн туюнтмаларга, өз ара байланыштарына жана алардын кабыл алууга мүмкүн болгон маанилерине бурулат.

Туюнтмалар, мында катышкан белгилерге, амалдарга кара-та түрлөргө бөлүнгөн.

Функциялардын бир, бир нече өзгөрүлмөлүү учурлары каралган.

Айрыкча өз алдынча иштөөнү талап кылган жагдайлар көп кездешет.

Окуу колдонмо жетишээрлик сандагы мисалдар жана маселелерди өз ичине камтыйт. Алар ар кандай окуу колдонмолордон, окуу китептерден алынды, айрымдары авторлор тарабынан түзүлдү.

Колдонмо боюнча сын-пикирлерди, ойлорду alybaevkurmanbek@rambler.ru дареги боюнча жөнөтүүнү суранабыз.

Авторлор

1. Көптүктөр

1.1. Көптүк түшүнүгү.

Математика илиминде аныктама берилбеген түшүнүктөр кездешет. Мындай түшүнүктөр алгачкы түшүнүктөр деп аталышат. Мисалы: чекит, түз сызык, сан, аралык, тегиздик, мейкиндик ж.б. Көптүк да мына ушундай түшүнүктөрдүн катарына кирет. «Жыйынды», «группа», «түр», «класс», «топ» ж.б. сөздөр мааниси боюнча «көптүк» деген сөзгө жакын болуп эсептелет. Тактык үчүн гана төмөндөгүдөй аныктаманы кабыл алалы.

А н ы к т а м а. Кандайдыр бир нерселердин (обьектилердин) жыйындысын (тобун) көптүк, ал эми нерселерди (обьектилерди) анын элементтери деп атайлы.

Көптүктү латын алфавитинин чоң $(A, B, C, D, E, X, Y, Z, ...)$, элементтерин кичине $(a, b, c, d, e, x, y, z, ...)$ тамгалары аркылуу белгилейли. Көптүктү жана анын элементтерин мындай белгилөө шарттуу түрдө гана, жалпысынан каалагандай белгилөөгө болот.

A көптүгү $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ элементтери аркылуу берилсе, бул көптүктү

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$$

түрдө белгилейбиз.

"$a\in A$" жазуусу a элементи A көптүгүнө таандык, "$a \overline{\in} A$" же "$a \notin A$" жазуусу a элементи A көптүгүнө таандык эмес деп окулат.

B көптүгүнүн баардык x элементтери, кандайдыр бир p касиетке ээ болсо, анда бул көптүк

$$B = \{x : p(x)\}$$

түрдө белгиленет. p – мүнөздөөчү касиет деп аталат.

М и с а л. 1. $B = \{2n,\ n\in N -$ натуралдык сандардын көптү-гү$\}$ – жуп натуралдык сандардын көптүгү.

2. $C = \{x : x -$ университеттин библиотекасындагы китеп$\}$ – университеттин библиотекасындагы китептердин көптүгү.

1.2. Көптүктүн түрлөрү.

Көптүк элементтеринин саны боюнча чектүү же чексиз болуп бөлүнүшөт.

М и с а л. 1. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} -$ чектүү;

2. $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,....\} -$ чексиз.

А н ы к т а м а. Бир дагы (таптакыр) элементи болбогон көптүк бош көптүк деп аталат, $\varnothing$ – символу аркылуу белгиленет.

М и с а л. $x^2 + 1 = 0,\ x\in R$ – чыныгы сандардын көптүгү; теңдемеси берилсин.

Теңдеменин чыныгы тамырларынын көптүгүн X дейли. $x_0 \in X$ болсун, б.а. $x_0 -$ чыныгы тамыр. x_0 ду теңдемеге койсок $x_0^2 + 1 \equiv 0$ болууга тийиш. Мындан $x_0^2 = -1 < 0$, демек $x_0^2 < 0$. Квадраттык даражанын аныктамасы боюнча $x_0^2 \geq 0$. Алынган карама-каршылыктан $X = \varnothing$ болоору келип чыгат.

1.3. Барабар көптүктөр. Бөлүкчө көптүк.

A жана B көптүктөрү берилсин.

А н ы к т а м а. A жана B көптүктөрү бирдей элементтерден турса барабар деп аталат жана $A = B$ түрдө белгиленет.

М и с а л. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_5, a_4, a_2, a_1, a_3\}$.

А н ы к т а м а. B көптүгүнүн каалаган элементи A көпү-гүнүн да элементи болсо, анда B көптүгү A көптүгүнүн бөлүкчө көптүгү деп аталат.

$B \subseteq A$ түрдө белгиленет, "$\subseteq$"- камтылуу белгиси.

А н ы к т а м а. $B \subseteq A$ жана $B \neq A$ (барабар эмес) болсо, B көптүгү A көптүгүнүн өздүк бөлүкчө көптүгү деп аталат, $B \subset A$ түрдө белгиленет.

М и с а л. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$; $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$;

$$C = \{a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3\};\ D = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\};$$

$$B \subseteq A,\ A \subseteq B;\quad A \neq C;\quad D \subset A.$$

1.4. Көптүктөрдүн үстүнөн амалдар.

A жана B көптүктөрү берилсин.

А н ы к т а м а. A көптүгүнүн элементтеринен жана B көптүгүнүн A га таандык болбогон элементтеринен түзүлгөн көптүк, A жана B көптүктөрүнүн биригүүсү деп аталат.

$A \cup B$ көрүнүшүндө белгиленет.

А н ы к т а м а. Бир эле учурда A жана B көптүктөрүнө таандык болгон элементтерден түзүлгөн көптүк A жана B нын кесилиши деп аталат.

$A \cap B$ түрдө белгиленет.

А н ы к т а м а. A көптүгүнөн B көптүгүнө тандык болгон элементтерди алып таштоо аркылуу C көптүгү түзүлсүн, анда C, A жана B көптүктөрүнүн айырмасы деп аталып, $C = A \setminus B$ көрүнүшүндө белгиленет.

А н ы к т а м а. 1. $B \subset A$ 2. $A \setminus B = D$. Бул шарттар аткарылганда D көптүгү B көптүгүнүн A көптүгүнө чейинки толуктоочу көптүгү деп аталып $C_A B$ же CB түрдө белгиленет.

М и с а л д а р. 1. $A = \{a_1, a_2, a_3, в_1, в_2, в_3, в_4\}$, $B = \{a_1, в_1, в_2, c_1, c_2\}$.

$$C = A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, в_1, в_2, в_3, в_4, c_1, c_2\},$$

$$C = A \cap B = \{a_1, в_1, в_2\},\ C = A / B = \{a_2, a_3, в_3, в_4\}.$$

2. $A = \{a_1, a_2, a_3, в_1, в_2, в_3, в_4\}$, $B = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$$C_A B = \{в_1, в_2, в_3, в_4\}.$$

2. Сандык көптүктөр

2.1. Сандык көптүктөрдүн түрлөрү.

Сандык көптүктөр төмөндөгүдөй түргө бөлүнөт:

1. Натуралдык;
2. Бүтүн;
3. Рационалдык;
4. Чыныгы (анык);
5. Комплекстик.

А н ы к т а м а. $N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,.....\}$ – натуралдык сандардын көптүгү деп аталат.

А н ы к т а м а. $Z = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\} -$ бүтүн сандардын көптүгү деп аталат.

2.2. Рационалдык сандардын көптүгү.

А н ы к т а м а. $Q = \left\{ \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\} -$ көптүгү рационалдык сандардын көптүгү деп аталат.

$\frac{p}{q}$ – жазууну бөлчөк деп атайбыз, мында p – алым, q – бөлүм деп аталат.

$\frac{p}{q}$ – жазууну p – санын, q га бөлүү деп да түшүнөбүз.

Демек $\frac{p}{q} \equiv p : q$. Мындан ар кандай бүтүн санды бөлүмү бирге барабар болгон бөлчөк түрүндө жазууга болоору келип чыгат, б.а.

$$Z = \left\{ \frac{p}{1},\ p \in Z \right\}.$$

Бөлчөктүн алдына коюлган белги алымга тиешелүү деп эсептелинет. Мисалы, $-\frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$; $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$; ж.у.с.

Айтылгандарды эске алсак $Z \subset Q$.

Бөлчөктөр төмөндөгүдөй түргө бөлүнөт:

1. Дурус $\left(\frac{p}{q}, |p| < q \right)$; $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$.
2. Буруш $\left(\frac{p}{q}, |p| \geq q \right)$; $\frac{3}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{14}{8}, \ldots$.
3. Аралаш ($k\frac{p}{q}$, $k -$ бүтүн бөлүк); $1\frac{1}{2},\ 2\frac{3}{4},\ -3\frac{5}{6}, \ldots$.

Аралаш бөлчөктү буруш бөлчөк жана тескерисинче жазууга болот.

М и с а л. $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$; $\qquad 3\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{11}{3}$.

Бөлчөктөрдү салыштыруу

Ар кандай терс бөлчөк оң бөлчөктөн кичине болгондуктан оң (терс) бөлчөктөрдү гана салыштыралы.

$\frac{p_1}{q_1}$ жана $\frac{p_2}{q_2}$ бөлчөктөрү берилсин.

а) $q_1 = q_2$ болсо, анда $p_1 \leq p_2$ болгондо $\frac{p_1}{q_1} \leq \frac{p_2}{q_2}$ болот.

б) $q_1 \neq q_2$ болсо, анда бөлчөктөрдү бирдей бөлүмгө келтиребиз жана а) эрежесин колдонобуз.

Бөлчөктөрдүн үстүнөн амалдар.

Кошуу. Бөлчөктөрдү кошуу (кемитүү) үчүн, бөлчөктөрдү бирдей бөлүмгө келтирип алымдарын кошуу (кемитүү) керек.

М и с а л. $\frac{4}{7}+\frac{6}{5}=\frac{20}{35}+\frac{42}{35}=\frac{62}{35}$;

$$-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{-15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{-15+8}{20}=-\frac{7}{20};$$

Көбөйтүү. Бөлчөктөрдү көбөйтүү үчүн алымын алымына, бөлүмүн бөлүмүнө көбөйтөбүз.

М и с а л. $\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}=-\frac{8}{15}$.

Бөлүү. А н ы к т а м а. Бөлчөктөрдүн көбөйтүндүсү бирге барабар болсо, анда алар өз ара тескери деп аталат.

М и с а л. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1,\ \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}=1,\ \left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=1.$

Бөлчөктөрдү бөлүү үчүн, биринчи бөлчөккө экинчи бөлчөктүн тескерисин көбөйтөбүз.

М и с а л. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{18}=\frac{10}{9}$

Жазылышы боюнча $\frac{p}{q}$ көрүнүшүнөн айрымалуу түрдө жазылган бөлчөктөр кездешет. Мындай бөлчөктөрдүн бири катары ондук бөлчөктөрдү атап кетсек болот. Мындай бөлчөктөр жалпы учурда төмөндөгүдөй көрүнүштө жазылат:

$$n_1 n_2 ... n_k,\ m_1 m_2 ... m_{r.}$$

$n_1 n_2 ... n_k$ - саны бөлчөктүн бүтүн бөлүгү $\left(0 \leq n_j \leq 9,\ j=\overline{1,k}\right)$; $m_1, m_2, ..., m_r$ - цифралары бөлчөктүн ондук, жүздүк ж.б. үлүштө-рүн туюнтат.

М и с а л. 12,952; -4,361,… .

Ондук бөлчөктөр чектүү, чексиз мезгилдүү жана чексиз мезгилсиз болуп бөлүнүшөт.

А н ы к т а м а. Ондук бөлчөктө үлүштөрдү туюткан цифралардын саны чектүү болсо, ондук бөлчөктү чектүү; цифралардын саны чексиз, бирок бир нече цифралардын тобу кайталанса ондук бөлчөктү мезгилдүү; цифралардын саны чексизжана цифралардын тобу кайталанбаса чексиз мезгилсиз деп аталат.

М и с а л ы. 2,051; -4,543 – чектүү;

0,333…; -2,765656… – чексиз мезгилдүү;

3,01234567891011… – чексиз мезгилсиз.

Чексиз мезгилдүү ондук бөлчөктү төмөндөгүдөй жазуу кабыл алынган

$$3{,}45181181\ldots=3{,}45(181).$$

Ондук бөлчөктөрдү салыштырууда төмөндөгүдөй эреже колдонулат. Оң сан ар дайым терс сандан чоң болгондуктан оң ондук бөлчөктөрдү салыштырабыз.

1. Бүтүн бөлүктөрүн салыштырабыз. Бүтүн бөлүгү чоң болгон бөлчөк чоң болот.

2. Бүтүн бөлүктөрү барабар ондук бөлчөктөрдүн үлүштөрүн салыштырабыз. Тиешелүү үлүшү чоң болгон ондук бөлчөк чоң болот (терс ондук бөлчөктөр үчүн тескерисинче болот).

М и с а л д а р. 3,41456 жана 2,78 берилсе 3,41456>2,78.

2,14142 жана 2,1415 берилсин. Бул бөлчөктөрдүн бүтүн бөлүктөрү, ондук, жүздүк, миңдик үлүштөрү барабар. Он миңдик үлүштөрдө 4<5 болгондуктан 2,14142<2,1415.

2.3. Чыныгы сандардын көптүгү

Q көптүгү берилсин. Мындай суроону койолу: $\frac{p}{q}$ көрүнүшүндө жазууга мүмкүн болбогон сан барбы? Коюлган суроого төмөндөгүдөй теорема жооп берет.

Т е о р е м а 1. Квадраты 2 ге барабар болгон рационалдык сан жашабайт, б.а. каалагандай $\frac{p}{q}\in Q$ үчүн $\left(\frac{p}{q}\right)^2\neq 2$.

Д а л и л д ө ө. Жалпылыкты бузбастан $\frac{p}{q}\in Q$ жана $p\in N, q\in N$ деп эсептейли. Экинчи жактан $\frac{p}{q}$ кыскарбас бөлчөк болсун б.а. $(p,q)=1$ (бул жазуу p, q сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү бир дегенди туюнтат).

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$ болсун. Мындан $p^2 = 2q^2$ же $p -$ жуп сан. $p = 2k$ десек, $(2k)^2 = 2q^2$, $q^2 = 2k^2$, $q -$ жуп, же $q = 2m.$ $(p,q) = (2k,2m) = 2.$ Шарт боюнча $(p,q) = 1$. Алынган карама-каршылыктан теореманын тууралыгы келип чыгат.

Далилденген теореманын негизинде рационалдык сандардын көптүгүнө таандык болбогон да сандар жашайт деп жыйынтык чыгара алабыз.

А н ы к т а м а. Рационалдык болбогон сандарды иррационалдык деп атайлы жана бул сандардын көптүгүн J аркылуу белгилейли.

J – чектүү же чексиз көптүкпү?

Т е о р е м а 2. J – чексиз көптүк болот.

Д а л и л д ө ө. Жогоруда далилденген теорема боюнча $\sqrt{2} \in J$. Каалагандай $n \in N$ алалы. $n \cdot \sqrt{2}$ санын карайлы. $n\sqrt{2} \in J$ болот. Каршысынан далилдейли, б.а. $n\sqrt{2} \notin J$ болсун. Мындай болгондо

$$n\sqrt{2} \in Q \quad \text{же} \quad n\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Мындан $2n^2 = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ же $2 = \left(\dfrac{p}{nq}\right)^2$. $nq \in N$ болгондуктан $n \cdot q = q_1$ деп белгилейли. Анда $2 = \left(\dfrac{p}{q_1}\right)^2$. Далилденген теорема боюнча мындай болушу мүмкүн эмес. Демек $n\sqrt{2} \in J$. Алынган жыйынтык J көптүгүнүн чексиздигин туюнтат.

Э с к е р т ү ү. $\sqrt{2}$ санынан башка иррационалдык болгон сандардын мисалдарын келтирүүгө болот.

М и с а л ы: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$,... .

А н ы к т а м а. $J \cup Q = R$ – чыныгы сандардын көптүгү деп аталат.

Төмөнкү сүйлөмдөрдү далилдөөсүз кабыл алалы:

1. Ар кандай чыныгы сан чектүү, чексиз мезгилдүү, чексиз мезгилсиз ондук бөлчөк түрүндө туюнтулат.

2. Чектүү же чексиз мезгилдүү ондук бөлчөктөр рационалдык сандар, чексиз мезгилсиздер иррационалдык сандар болушат.

2.4. Чыныгы сандардын көптүгүнүн иреттүүлүгү

жана толуктугу (үзгүлтүксүздүгү)

Q рационалдык сандардын көптүгү берилсин $r_1, r_2 \in Q$ болгон каалагандай рационалдык сандар болушсун. Бизге белгилүү болгондой бул сандар үчүн

$$r_1 = r_2, \quad r_1 < r_2, \quad r_1 > r_2,$$

катыштарынын бири гана аткарылат. Q көптүгү «=», «<», «>» катыштарына карата иреттелген. Бирок теорема 1 боюнча Q көптүгү бул катыштарга карата толук (үзгүлтүксүз) эмес.

М и с а л ы: $1 \in Q$, $2 \in Q$ жана $1 < \sqrt{2} < 2$; $1{,}1 < \sqrt{2} < 1{,}9$; $1{,}2 < \sqrt{2} < 1{,}8$; … .

$0 < r_1 \in Q$; $0 < r_2 \in Q$ жана $r_1 < r_2$ болсун. $r_1 < \sqrt{2}r_1$ жана $\sqrt{2}r_1 < 2r_2$ болгондуктан $r_1 < \sqrt{2}r_1 < 2r_2$ болот. $\sqrt{2}r_1 \notin Q$.

Бул барабарсыздык көрсөтүп тургандай иреттелген рационалдык сандардын арасында иррационалдык сандар да жайгашкан болот.

Төмөндөгүдөй суроонун келип чыгышы табигый нерсе.

R - көптүгүндө иреттүүлүк катышы орун алабы жана бул катышка карата R толукпу?

Коюлган суроонун жообун төмөндөгүдөй теорема түрүндө жазалы

Т е о р е м а 3. Каалагандай $r_1 \in R$ жана $r_2 \in R$ сандары үчүн

1. $r_1 = r_2$, $r_1 < r_2$, $r_1 > r_2$ катыштарынын бири гана аткарылат.

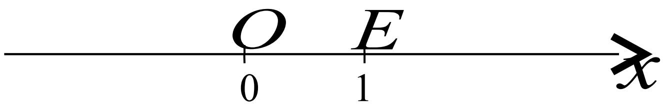
2. $r_1 < r_2$ $(r_1 > r_2)$ болсо, анда жок дегенде бир $r_3 \in R$ жашап $r_1 < r_3 < r_2$ $(r_1 > r_3 > r_2)$ болот.

Теорема 3 R көптүгүнүн иреттүүлүгүн жана толуктугун мүнөздөйт. Бул теореманын далилдөөсү бул окуу китебинин чегинен сырткары болгондуктан далилдөөсүн келтирбейбиз.

Биз жогоруда иреттүүлүк катышынын негизинде Q сандык көптүктү R көптүгүнө чейин толуктадык.

Эгерде иреттүүлүк катышынан сырткаркы көз караштa R көптүгүн карай турган болсок, анда бул көптүктү C - комлекс-тик сандардын көптүгүнө чейин толуктоого болот. Биз негизинен R көптүгүн гана колдонгонубузга байланыштуу бул маселеге токтолбойбуз.

2.5. Координаталык түз сызык жана чыныгы сандардын көптүгү.



түз сызыгы берилсин.

А н ы к т а м а. x түз сызыгы координаталык түз сызык, O – координата башталышы, OE - бирдик кесинди деп аталат.

R - көптүгү берилсин.

Координаталык түз сызыктын чекиттеринин көптүгү жана R көптүгүнүн ортосунда байланыш барбы?

Т е о р е м а 4. Каалагандай $r \in R$ чыныгы санга, координаталык түз сызыктан бир гана A чекити тиешелеш коюлат жана бул сүйлөмгө тескери сүйлөм да туура болот.

Бул теореманы далилдөөсүз кабыл алабыз.

Теорема 4 төгү тиешелештикти төмөндөгүдөй жазабыз: $A(r)$. r саны A чекитинин координатасы деп аталат.

$r = 0$ болсо, A жана O чекиттери дал келет. $r > 0$ болсо, A чекити O нун оң жагында; $r < 0$ болсо сол жагында жайгашат. Теорема 4 боюнча R көптүгү координаталык түз сызыкты толугу менен толтурат.

Кийинки баяндоолорубузда, айтылгандарды эске алып айрым учурларда чыныгы сан дегендин ордуна чекит деп да айтабыз.

2.6. Чыныгы сандардын көптүгүндөгү айрым көптүктөр.

R берилсин.

А н ы к т а м а. $a, в \in R$ жана $a \leq x \leq в$ барабарсыздыгын канааттандырган x чыныгы сандардын көптүгүн кесинди, туюк интервал, аралык, сегмент деп атоо менен бирге $[a, в]$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

А н ы к т а м а. $a < x < в$ барабарсыздыгын канааттандырган x тердин көптүгүн интервал деп, $(a, в)$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

А н ы к т а м а. $a \leq x < в$ же $a < x \leq в$ барабарсыздыгын канааттандырган x терди жарым интервал деп $[a, в)$ же $(a, в]$ түрдө белгилейбиз.

А н ы к т а м а. Эгерде каалаган $x \in X$ үчүн:

1. $x \leq M$ болсо, X - жогор жагынан чектелген;
2. $m \leq x$ болсо, X - төмөн жагынан чектелген;
3. $m \leq x \leq M$ болсо, X - чектелген деп аталат.

М и с а л ы. $[a, в]$, $(a, в)$, $[a, в)$, $(a, в]$ көптүктөрү чектелген көптүктөр. $(-\infty, 0]$ - жогор жагынан, $[0, +\infty)$ – төмөн жагынан чектелген көптүктөр.

Чыныгы сандарды көптүгүн $R \equiv (-\infty, +\infty)$ деп белгилөө кабыл алынган.

R – чектелбеген көптүк.

Көптүк чектелген дегенди элементтеринин саны боюнча деп түшүнүүгө болбойт. $[a,в]$ көптүгү чектелген бирок чексиз көптүк болуп эсептелет.

Бул сүйлөмдүн тууралыгын далилдөө үчүн

$$y = tg\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\cdot\frac{x-a}{в-a}\right),\ x\in[a,в]$$

функциясын карoo жетиштүү болот. Бул функция $[a,в]$ аралыгын $(-\infty,+\infty)$ интервалына бир маанилүү чагылдырат.

2.7. Сандын модулу жана аралык.

А н ы к т а м а. Каалаган $x\in R$ үчүн

$$|x| = \begin{cases} x,\ x>0; \\ 0,\ x=0; \\ -x,\ x<0; \end{cases}$$

белгилөөнү x санынын модулу деп атайлы.

Модул төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот:

1. $|x|\geq 0$; 2. $|x| = |-x|$; 3. $|xy| = |x|\cdot|y|$;

4. $|x^2| = x^2$; 5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},\ y\neq 0$; 6. $|x+y|\leq|x|+|y|$;

7. $||x|-|y||\leq|x+y|\leq|x|+|y|$.

Координаталык түз сызыктан $A(3),\ B(5)$ чекиттерин алалы, AB аралыгын табуу маселесин койолу.

$AB = 5-3 = 2$ болоору жеңил эле далилденет.

$A_1(-3),\ B_1(-5)$ болсо, $A_1B_1 = -3-(5) = 2$.

$A_1(-3),\ B_1(5)$ болсо, $A_1B_1 = 5-(-3) = 8$.

Демек, координатасы менен берилген чекиттердин ортосундагы аралыкты табуу үчүн оң жакта жайгашкан чекиттин координатасынан, сол жактагы чекиттин координатасын кемитүү жетиштүү.

$A(x),\ B(y)$ чекиттери берилсин. Бул учурда AB аралыгын табуу үчүн модул түшүнүгүн колдонобуз, б.а. $AB = |x-y|$ бо-лоорун далилдейбиз.

Чындыгнда A жана B чкиттеринин координаталары үчүн төмөндөгүдөй учурларды карoo жетиштүү:

1. $x>0,\ y>0$ жана $x<y$. Бул учурда

$$AB = y-x = -(x-y) = |x-y|.$$

2. $x < 0$, $y < 0$ жана $x < y$ болсун, анда

$$AB = (-x) - (-y) = -x + y = -(x - y) = |x - y|.$$

3. $x < 0,\ y > 0$ болсо, $AB = -x + y = -(x - y) = |x - y|$.

Демек $A(x),\ B(y)$ болгондо $AB = |x - y|$.

2.8. Даража, тамыр жана алардын касиеттери.

2.8.1. Натуралдык көрсөткүчтүү даража.

Каалагандай $a \in R$ берилсин.

А н ы к т а м а. $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{жолу}} = a^n$ түрүндө жазалы. a^n–натуралдык көрсөткүчтүү даража деп аталат.

М и с а л ы. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$, $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4$,

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^3$ ж.у.с.

2.8.2. Бүтүн көрсөткүчтүү даража.

А н ы к т а м а. a^m, $m \in Z$ бүтүн көрсөткүчтүү даража деп аталат.

$m \in Z$ болгондуктан $m \in N,\ m = 0,\ m \in N_-$ – терс бүтүн сан-дар; учурларды бөлүп карайлы. $m \in N$ жогоруда аныкталган.

А н ы к т а м а. $a^0 = 1,\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, мында $m \in N$ жана $a \neq 0$.

М и с а л д а р. $1^0 = 1,\ (-1)^0 = 1,\ \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1,$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3},\ (-4)^{-10} = \frac{1}{(-4)^{10}}.$$

2.8.3. Тамыр жөнүндө түшүнүк.

$x^n = b$ $(n \in N)$ барабардыгы туура болгон x санын табуу маселесин койолу.

А н ы к т а м а. $x^n = b$ барабардыгы туура болгон x саны b санынын n – даражалык тамыры деп аталат.

$x = \sqrt[n]{b}$ түрүндө белгиленет.

$\sqrt{\ }$ – тамыр белгиси; n – тамырдын көрсөткүчү.

Аныктама боюнча $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$. $n = 2$ үчүн тамыр $\sqrt[2]{b} = \sqrt{b}$ түрдө белгиленет.

М и с а л д а р. $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt{16} = \pm 4$,

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},\ \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2},\ \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$

Аныктама боюнча тамырдын маанисин табуу (тамыр чы-гаруу) даражага көтөрүү амалына тескери болуп эсептелет.

Каалагандай эле тамырдын мааниси жашайбы, бир маа-нилүү болобу?

Жогорудагы мисал көрсөткөндөй тамырдын мааниси ар дайым эле бир маанилүү болбойт.

$\sqrt{-4}$ берилсин $\sqrt{-4} = x_0 \in R$ деп эсептейли. Аныктоо боюнча $x^2 = -4 < 0$. Бирок $x^2 \geq 0$. Бул карама-каршылык көрсөтүп тур-гандай $\sqrt{-4}$ тамырдын чыныгы сандарда мааниси жашабайт.

Тамырдын мааниси ар дайым жашап жана бир маанилүү болуш үчүн төмөндөгүдөй аныктаманы кабыл алалы.

А н ы к т а м а. Каалагандай $b \geq 0$ үчүн $\sqrt[n]{b} = x \geq 0$ тамыр-дын маанисин арифметикалык деп атайлы.

$x^{-n} = b,\ n \in N$ берилсин, $x \neq 0$ болсун.

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ болгондуктан, $x^n = \dfrac{1}{b}$ деп алууга болот. Мындан $x = \sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}$.

2.8.4. Рационалдык көрсөткүчтүү даража.

$a^r,\ r \in Q$ берилсин. $r = \dfrac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N$ болгондуктан бул да-ражаны төмөндөгүдөй аныктайбыз.

А н ы к т а м а. $m, n \in N,\ n \geq 2$ болсун 1. $a \geq 0$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

2. $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

$a < 0$ болсо, бул сандын рационалдык даражасы (бөлчөк болгондо) ар дайым эле мааниге ээ боло бербейт.

2.8.5. Иррационалдык көрсөткүчтүү даража.

a^{α}, $a > 0$, $\alpha \in J$ берилсин. Бул даражаны аныктоо үчүн төмөндөгүдөй үч учурду карайлы.

1. $a=1$ болсо $1^{\alpha}=1$.

2. $a>1$ болсун. $r_1<\alpha$, $\alpha<r_2$ боло турган каалагандай r_1, r_2 – рационалдык сандарды алалы.

Бул учурда a^{α} нын мааниси a^{r_1}, a^{r_2} сандарынын арасында кармалаары жана бул сан жалгыз болоору математикада далилденген, б.а.

$$a^{r_1}<a^{\alpha}<a^{r_2}.$$

3. $0<a<1$. $r_1<\alpha$, $\alpha<r_2$ шарттарды канааттандыруучу каалагандай r_1, r_2 – рационалдык сандарды алалы.

Каралган учурда a^{α} нын мааниси a^{r_2}, a^{r_1} сандарынын арасында кармалаары жана бул сан жалгыз болоору математикада далилденген, б.а.

$$a^{r_2}<a^{\alpha}<a^{r_1}.$$

Бизге белгилүү болгондой α иррационалдык саны чексиз мезгилсиз ондук бөлчөк түрүндө көрсөтүлгөндүктөн r_1, r_2 – рационалдык сандар үчүн бул ондук бөлчөктүн ашыгы жана кеми менен алынган маанилерин алуу максатка ылайык болот.

Айтылган сүйлөмдүн маанисин ачып көрсөтүү үчүн төмөндөгүдөй мисалды карайлы.

М и с а л. $2^{\sqrt{2}}$ маанисин табуу талап кылынсын.

$$2^{\sqrt{2}}=1{,}41421356237...$$

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$$

$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$$

$$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$$

……………………

Бул барабарсыздыктардын сол жагындагы сандар $\sqrt{2}$ нин кеми, оң жагындагылар ашыгы менен алынган маанилери деп аталышат.

Төмөндөгү барабарсыздыктар туура болот.

$$2^{1,4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,5}$$

$$2^{1,41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,42}$$

$$2^{1,414}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,415}$$

$$2^{1,4142}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,4143}$$

…………………..

Мындан

$$2^{1,4}<2^{1,41}<2^{1,414}<2^{1,4142}<...<2^{\sqrt{2}}<...<2^{1,4143}<2^{1,415}<2^{1,42}<2^{1,5}.$$

Бул барабарсыздыктан төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарууга болот: $\sqrt{2}$ санын туюнткан ондук бөлчөктүн ашыгы жана кеми менен алынган маанилерин канчалык жогорку тактыкта алсак, алар $2^{\sqrt{2}}$ санынын маанисине ошончолук жакын болот.

Тамырдын касиеттери. $a \geq 0, b \geq 0$ үчүн:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, 4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$,

5. $\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Даражанын касиеттери. $a > 0, b > 0$ жана каалагандай $x, y \in R$ үчүн:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, 2. $a^x : a^y = a^{x-y}$,

3. $(a^x)^y = a^{xy}$, 4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,

5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

3. Туюнтмалар

3.1. Негизги түшүнүктөр.

А н ы к т а м а. Сандардын, тамгалардын кошуу, кеми-түү, көбөйтүү, бөлүү жана рационалдык даражага көтөрүү, тамыр чыгаруу жана башка белгилердин, кашаалардын жардамында байланыштырылып жазылышы алгебралык туюнтма деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $2a^2в - 3ав^2(a + в)$; 2. $a + в + \frac{c}{5}$;

3. $\frac{3a^2 + 3a + 1}{a - 1}$; 4. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{в} + \frac{1}{c}\right)^3$; 5. $\sqrt{x + y}$;

6. $\left(\sqrt[3]{2} - x\right)^5$; 7. $\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^3$.

Туюнтмадагы тамгалар ар түрдүү сандык маанилерди кабыл алуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болгодуктан, аларды өзгөрүлмө чондуктар деп атайбыз.

А н ы к т а м а. Алгебралык туюнтмада өзгөрүлмө чоңдуктардын үстүнөн бөлүү жана тамыр чыгаруу белгилери катышпаса, анда бул туюнтма бүтүн деп аталат.

Каралган мисалдарда $1, 2, 6$ лар бүтүн болушат.

Туюнтмада аныктамада аталбаган атайын белгилер да колдонулушу мүмкүн. Мисалы $|x|$ – модул, $\{x\}$ – сандын бөлчөк бөлүгү, $[x]$ – сандын бүтүн бөлүгү ж.у.с.

А н ы к т а м а. Алгебралык туюнтмада кошуу, кемитүү, көбөйтүү, натуралдык даражага көтөрүү амалдарынан сырткары өзгөрүлмө чоңдуктардын (бүтүн туюнтмалардын) үстүнөн бөлүү амалы катышса, анда бул туюнтманы бөлчөк деп атайбыз.

Мисалда 3, 4 лөр бөлчөктөр.

А н ы к т а м а. Бүтүн жана бөлчөк туюнтмалар рационал-дык деп аталат.

А н ы к т а м а. Эгерде туюнтмада өзгөрүлмө чоңдуктардан тамыр чыгаруу амалы катышса, анда ал иррационалдык деп аталат.

Мисалда 5, 7 лер иррационалдык.

3.2. Өзгөрүлмөлөрдүн кабыл алууга мүмкүн болгон маанилери. Туюнтманын аныкталуу областы.

А н ы к т а м а. Туюнтмага катышкан өзгөрүлмө чоңдуктардын үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдарды аткарууга мүмкүн болгон өзгөрүлмө чоңдуктун маанилери, өзгөрүлмө чоңдуктардын кабыл алууга мүмкүн болгон маанилери деп аталат.

А н ы к т а м а. Туюнтма мааниге ээ боло турган өзгөрүлмө чоңдуктардын маанилеринин көптүгү, туюнтманын аныкталуу областы деп аталат.

Айтылган аныктамалардын маанилерин төмөндөгүдөй мисалдарда карайлы.

М и с а л д а р. 1. $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}$. Бул туюнтмада x же y чоң-дуктарын өз алдынча карай турган болсок, анда x, y чоңдуктары каалагандай маанилерди кабыл алат, демек $x\in R,\ y\in R$.

Туюнтма мааниге ээ болуш үчүн $x-y\neq 0$ болууга тийиш, б.а. туюнтманын аныкталуу областы $X=\{x-y\neq 0,\ x\in R,\ y\in R\}$ көптүгү.

2. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

x жана y чоңдуктарын өз алдынча карасак, анда алардын кабыл алууга мүмкүн болгон маанилери $x\geq 0,\ y\geq 0$ барабарсыздыгын канааттандыруучу чыныгы сандар эсептелет.

Туюнтманын аныкталуу областы болуп

$$X=\{\sqrt{x}-\sqrt{y}\neq 0,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

көптүгү эсептелет.

А н ы к т а м а. Туюнтмага катышкан өзгөрүлмө чоңдуктарга аныкталуу областан алынган сандык маанилерди берүүдөн келип чыккан туюнтма сандык туюнтма деп аталат.

Сандык туюнтма берилсе, анда амалдарды аткаруу менен анын маанисин табуу талап кылынат.

М и с а л. $\frac{\sqrt[3]{a^2+в}}{2a-в}$, $a=5$, $в=2$ болсун. Сандык туюнтма $\frac{\sqrt[3]{5^2+2}}{2\cdot 5-2}$ болот, ал эми мааниси $\frac{\sqrt[3]{5^2+2}}{2\cdot 5-2}=\frac{\sqrt[3]{27}}{10-2}=\frac{3}{8}$.

3.3. Туюнтмаларды теңдеш өзгөртүп түзүү жөнүндө түшүнүк.

Кандайдыр бир эки туюнтма берилсин. Бул туюнтмалар, шарттуу түрдө A жана B болсун. Эки туюнтмага бирдей эле өзгөрүлмөлөр катышсын. Катышкан өзгөрүлмөлөрдү x, y деп алып, туюнтмаларды $A(x,y)$, $B(x,y)$ түрдө белгилейли.

А н ы к т а м а. $A(x,y)$ жана $B(x,y)$ туюнтмаларынын маанилери, x жана y тин кабыл алууга мүмкүн болгон маанилеринде барабар болсо, анда бул туюнтмалар теңдеш барабар деп аталат.

А н ы к т а м а. $A(x,y)=B(x,y)$ барабардыгы x жана y чоң-дуктарынын кабыл алууга мүмкүн болгон баардык маанилери үчүн аткарылса, анда бул барабардык теңдештик деп аталат.

М и с а л д а р. 1. x^5, $x^3\cdot x^2$; $a+в+c$, $c+в+a$; $(2aв)^2$, $(4a^2в^2)$; туюнтмалары теңдеш барабар.

2. $a+в=в+a$; $a+0=a$; $(a+в)\cdot c=ac+вc$; $a\cdot 1=a$; $a\cdot в=в\cdot a$; $x^5=x^3\cdot x^2$ барабардыктары теңдештиктер.

А н ы к т а м а. Туюнтманы ага теңдеш барабар туюнтма менен алмаштыруу теңдеш өзгөртүп түзүү деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $\frac{a}{в}=\frac{a\cdot c}{в\cdot c}$, $в\neq 0$, $c\neq 0$;

2. $\frac{2a}{a-1}=\frac{10a}{5(a-1)}$, $a\neq 1$; 3. $\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$, $x\neq 1$.

3.4. Бүтүн рационалдык туюнтмалар.

3.4.1. Бир мүчөлөр жана алардын үстүнөн амалдар

А н ы к т а м а. Эгерде туюнтмада өзгөрүлмө чоңдуктардын натуралдык даражасы жана көбөйтүү амалы гана катышса, анда бул туюнтмалар бир мүчөлөр деп аталат.

М и с а л ы. $3x\cdot(0{,}5\cdot y^3)$; $(5ав^2)\cdot(0{,}4c^3d)$; $x^2\cdot y\cdot(-27)\cdot\dfrac{4}{3}$ – бир мүчөлөр;

$x-y$; $x+y$; $3x^2-y^2$; $\dfrac{a\cdot в}{c}$ – бир мүчөлөр болбойт.

А н ы к т а м а. Ар кандай бир мүчөнү: сан биринчи көбөйтүүчү, өзгөрүлмө чоңдуктарды даражаларынын чоңдугу боюнча экинчи, үчүнчү ж.у.с. көбөйтүүчү түрдө жазууга болот. Бир мүчөнү мындай жазууну стандарттык түргө келтирүү деп атайбыз. Сандык көбөйтүүчү бир мүчөнүн коэффициенти, чоңдуктардын даражаларынын суммасы бир мүчөнүн даражасы деп аталат.

Бир мүчөлөрдү көбөйтүүгө жана натуралдык даражага көтөрүүгө болот, натыйжада бир мүчө алынат.

М и с а л д а р. 1. $3x\cdot(0{,}5\cdot y^3)=1{,}5\cdot x\cdot y^3$;

2. $(5ав^2)\cdot(0{,}4c^3d)=2\cdot ав^2c^3d$;

3. $(3a)\cdot(2{,}5a^3)=(3\cdot 2{,}5)\cdot(a\cdot a^3)=7{,}5\cdot a^4$;

4. $\left(24ав^2\cdot cd^3\right)\cdot\left(\dfrac{1}{6}a^2в^2c\right)=\left(24\cdot\dfrac{1}{6}\right)(ав^2c\cdot d^3\cdot a^2в^2c)=4\cdot a^3в^4c^2d^3$.

А н ы к т а м а. Стандарттык бир мүчөлөр коэффициент-тери менен гана айырымаланса, анда алар окшош деп аталат.

М и с а л ы. 1. $-3x^3y^2$ жана $5x^3y^2$; 2. $0{,}4авс$, $2авс$;

3. $0{,}5x^2yz$, $-2x^2yz$.

Окшош бир мүчөлөрдүн үстүнөн кошуу, кемитүү амалдарын аткарууга болот, натыйжада дагы эле мурдагыдай стандарттык бир мүчө келип чыгат.

М и с а л ы. 1. $18x^2yz^3$ жана $-8x^2yz^3$ бир мүчөлөрүн кошкула.

$$18x^2yz^3+(-8x^2yz^3)=(18+(-8))\cdot x^2yz^3=10x^2yz^3.$$

2. $-3xyz$ тен $\left(-\dfrac{1}{2}xyz\right)$ бир мүчөсүн кемиткиле.

$$-3xyz-\left(-\frac{1}{2}xyz\right)=\left(-3+\frac{1}{2}\right)xyz=-\frac{5}{2}xyz.$$

3.4.2. Көп мүчөлөр

А н ы к т а м а. Бир мүчөлөрдүн суммасын көп мүчө деп атайбыз.

Эгерде көп мүчөдө баардык бир мүчөлөрдү стандарттык түрдө жазып, окшош мүчөлөрдүн үстүнөн кошуу, кемитүү амалдарын аткарсак көп мүчө стандарттык түргө келет.

М и с а л ы.

1. $3a\cdot 5в - 3aв + 2a(-4в) + в\cdot в = 15aв - 3aв - 8aв + в^2 =$
$$= (15 - 3 - 8)aв + в^2 = 4aв + в^2.$$
2. $(3a + 5в - 2c) + (2a - в + 4c) = 3a + 5в - 2c + 2a - в + 4c =$
$$= (3a + 2a) + (5в - в) + (-2c + 4c) = 5a + 4в + 2c.$$
3. $(5a^2в + aв^2) - (3a^2в - 4aв^2) = 5a^2в + aв^2 - 3a^2в + 4aв^2 =$
$$= (5a^2в - 3a^2в) + (aв^2 + 4aв^2) = 2a^2в + 5aв^2.$$
4. $4x^2\left(x - \frac{1}{2}x^2 + 3\right) = 4x^2\cdot x - 4x^2\cdot\frac{1}{2}x^2 + 4x^2\cdot 3 = 4x^3 - 2x^4 + 12x^2.$

5. $(a + в)(a - в) = (a + в)\cdot a - (a + в)в = a^2 + вa - aв - в^2 = a^2 - в^2.$

3.4.3. Кыскача көбөйтүүнүн формулалары.

Айрым учурларда бүтүн туюнтмаларды стандарттык түргө келтирүү үчүн төмөндөгү теңдештиктер колдонулат.
$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2, \qquad (1)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \qquad (2)$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2, \qquad (3)$$
$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3, \qquad (4)$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3, \qquad (5)$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \qquad (6)$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3. \qquad (7)$$
(1)-(7) кыскача көбөйтүүнүн формулалары деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2)$ берилсин.

(1) формуланы колдонсок:
$$(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2) = (3x^2)^2 - (4y^2)^2 = 9x^4 - 16y^4.$$
2. $(a + в - c)\cdot(a + в + c) = (a + в)^2 - c^2 = a^2 + в^2 - c^2 + 2aв.$

3. $(3a^2 - 5в^3)^2$. (3) формуланы колдонсок:
$$(3a^2 - 5в^3)^2 = (3a^2)^2 - 2(3a^2)\cdot(5в^3) + (5в^3)^2 = 9a^4 - 30a^2в^3 + 25в^6.$$

3.4.4. Көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу.

A көп мүчөсү берилсин.

А н ы к т а м а. $A = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n$, мында $A_1, A_2, ..., A_n$ дер бир мүчөлөр жана көп мүчөлөр болсун, анда A көбөйтүүчүлөргө ажыралды деп айтабыз.

Жогорудагы ажыралмада $A_1, A_2, ..., A_n$ дин баардыгы бир мүчөлөр боло албайт. Аныктамадагы ажыралма туура болсо, анда A, ар бир A_j $(j = \overline{1,n})$ га бөлүнөт.

Көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуунун төмөндөгүдөй жолдору бар:

1) Жалпы көбөйтүүчүнү кашаанын сыртына чыгаруу. Бул жол төмөндөгүдөй законго негизделген:

$$x \cdot z + y \cdot z = z(x + y) = (x + y) \cdot z.$$

М и с а л. 1. $28x^3 - 35x^4$ көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

$$28x^3 - 35x^4 = 7 \cdot 4x^3 - 7 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot x = 7x^3 \cdot 4 - 7x^3 \cdot 5x = 7x^3(4 - 5x)$$

2. $a - an^3 - n^4 + n = a(1 - n^3) - n(1 - n^3) = (1 - n^3)(a - n)$.

2) Кыскача көбөйтүүнүн формулаларын колдонуу.

М и с а л д а р. 1. $a^2 - в^2 - c^2 + 2вc$ көп мүчөнү көбөйтүүчү-лөргө ажыраткыла.

$$a^2 - в^2 - c^2 + 2вc = a^2 - (в^2 + c^2 - 2вc) = a^2 - (в - c)^2 = (a + в - c)(a - в + c).$$

2. $x^6 - 1$ көбөйтүүчүлөргө ажыраткыла.

$$x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) =$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

3) Топтоштуруу жолу. Бул жолду колдонуунун маңызы төмөндөгүдөй:

1. Айрым учурларда кошуу (кемитүү) амалдарына таандык болгон орун алмаштыруу, топтоштуруу закондорун колдонуу жана жалпы көбөйтүүчүнү кашаалардын сыртына чыгаруунун натыйжасында ар бир топто жалпы көбөйтүүчү болгон көп мүчө калат.

2. Бул көп мүчөнү кашаанын сыртына чыгаруу менен берилген көп мүчөөнүн көбөйтүүчүлөргө ажыралышына ээ болобуз. Жалпы учурда бул жолду математикалык жактан төмөндөгүдөй жаза алабыз.

A көп мүчөсү берилсин. $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$, мында $A_1, A_2, ..., A_n$ – бир мүчөлөр. Бир мүчөлөрдү кандайдыр бир көбөйтүүчүнү кашаанын сыртына чыгарууга мүмкүн болгондой топтоштуралы

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n = \underbrace{(A_1 + A_3) + (A_2 + A_4) + ... + (A_k + A_{k+1} + A_n)}_{m\text{- кошулуучу}}.$$

Биринчи кашадан B_1, экинчисинен B_2, ж.у.с. акыркысынан B_m көбөйтүүчү кашаанын сыртына чыгарылсын, ал эми экинчи көбөйтүүчү бардык кошулуучулар үчүн бирдей болуп калсын, б.а.

$$A_1 + A_3 = B_1 \cdot C,\ A_2 + A_4 = B_2 \cdot C,\ \dots,\ A_к + A_{к+1} + A_n = B_m \cdot C.$$

Демек

$$A = B_1 C + B_2 \cdot C + \dots + B_m C = (B_1 + B_2 + \dots + B_m) \cdot C.$$

Төмөндөгүдөй мисалдарды карайлы:

1. $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ берилсин.

Топтоштурууну төмөндөгүдөй аткаралы.

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^3 - 3x^2) + (5x - 15) = x^2(x - 3) + 5(x - 3) =$$
$$= (x - 3)(x^2 + 5).$$

2. $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz = (20x^2 - 15xy) + (3yz - 4xz) =$
$$= -5x(3y - 4x) + z(3y - 4x) = (3y - 4x)(-5x + z).$$

3. $a^2 - 7ав + 12в^2$. Бул мисалдын өзгөчөлүгү, үч кошулуучуну ар кандай жол менен топтоштуруу жогоруда айтылган эрежеге алып келбейт.

$-7ав$ бир мүчөнү $-3ав - 4ав$ түрдө жазалы жана төмөндөгү-дөй топтоштурууну аткаралы:

$$(a^2 - 3ав) + (-4ав + 12в^2) = a(a - 3в) - 4в(a - 3в) = (a - 3в)(a - 4в).$$

3.4.5. Бир өзгөрмөлүү көп мүчө.

А н ы к т а м а. $P_m(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, мында $a_j\ (j = \overline{1,n}) \in R$, x – өзгөрүлмө, $n \in N$; туюнтмасы $n-$ даражалык бир өзгөрүлмөлүү көп мүчө деп аталат (өзгөрүлмөнүн эң чоң даражасы көп мүчөнүн даражасы деп аталат).

$n = 1$ болсун, анда $P_1(x) = a_1 x + a_0$ – биринчи даражадагы көп мүчө; $a_1 \neq 0$.

$n = 2$ болсо, $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – экинчи даражадагы көп мүчө же квадраттык үч мүчө; $a_2 \neq 0$.

$n = 3$ болсо, $P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – үчүнчү даражадагы көп мүчө; $a_3 \neq 0$.

А н ы к т а м а. Эгерде $x = x_0$ үчүн $P_n(x_0) = 0$ болсо, анда x_0– саны көп мүчөнүн тамыры деп аталат.

А н ы к т а м а. $P_n(x), Q_m(x)$ берилсин. 1. $n = m$; 2. Бирдей даражадагы өзгөрүлмөлөрдүн коэффициенттери барабар. Бул шарттар аткарылганда $P_n(x) = Q_m(x)$ деп аталат.

3.4.6. Айрым көп мүчөлөрдү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу.

1. $ax^2 + вx + c$ берилсин жана анын тамырлары x_1, x_2 болсун.

В и е т т и н т е о р е м а с ы. x_1, x_2 – сандары $ax^2 + вx + c = 0$ теңдеменин тамырлары болсо, анда $x_1 + x_2 = -\frac{в}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ болот.

Төмөндөгү барабардыкты далилдейли.

$ax^2 + вx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ажыралмасы туура болот.

Д а л и л д ө ө. Бул барбардыкты далилдөө үчүн Виеттин теоремасын пайдаланабыз. Чындыгында

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2) = ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2 =$$
$$= ax^2 - a \cdot x \cdot \left(-\frac{в}{a}\right) + a \cdot \frac{c}{a} = ax^2 + вx + c.$$

2. $x^n - a^n$ берилсин. Бул көп мүчө үчүн төмөндөгүдөй ажыралма туура болот.

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Ажыралманын тууралыгы барабардыктын оң жагындагы көп мүчөлөрдү көбөйтүү же математикалык индукция методун колдонуу аркылуу жүргүзүлөт.

3.5. Бөлчөктүү рационалдык туюнтмалар.

3.5.1. Рационалдык бөлчөк.

P, Q – рационалдык туюнтмалар берилсин.

А н ы к т о о. $\frac{P}{Q}$ – рационалдык бөлчөк деп аталат.

М и с а л д а р. $\dfrac{x+1}{2x - \frac{1}{3}}$, $\dfrac{(x+2)(x^2-3)}{a + 2в + 5c}$, $\dfrac{\frac{a}{в} + \frac{c}{d}}{a - в}$.

Рационалдык бөлчөктүн негизги касиети төмөндөгүдөй барабардык аркылуу аныкталат.

P_1 – бүтүн рационалдык туюнтма болсо, анда

$$\frac{P}{Q} = \frac{P \cdot P_1}{Q \cdot P_1}.$$

М и с а л д а р. 1. $\dfrac{\frac{a}{в} + \frac{c}{d}}{a - в} = \dfrac{в \cdot d\left(\frac{a}{в} + \frac{c}{d}\right)}{в \cdot d(a - в)} = \dfrac{ad + cв}{(a - в)вd}.$

$$2.\ \frac{\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{y}{y^2-1}}{x^2+y^2}=\frac{(x^2-1)(y^2-1)\left(\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{y}{y^2-1}\right)}{(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2)}=\frac{x(y^2-1)+y(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2)}.$$

3.5.2. Рационалдык бөлчөктөрдүн үстүнөн амалдар.

а) Бөлчөктү кыскартуу.

$\dfrac{P}{Q}$ – берилсин. Бөлчөктүү кыскартуу дегенде, бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн жалпы көбөйтүүчүгө бөлүүнү түшүнө-бүз.

Демек, бөлчөктү кыскартуу үчүн бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз жана жалпы көбөйтүү-чүлөрдү кыскартабыз.

М и с а л д а р. 1. $\dfrac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}$ бөлчөгүн кыскарткыла.

$$x^2-3xy=x(x-3y),\ 9y^2-x^2=-(x^2-9y^2)=-(x-3y)(x+3y).$$

Демек,

$$\frac{x^2-3xy}{9y^2-x^2}=\frac{x(x-3y)}{-(x-3y)(x+3y)}=-\frac{x}{x+3y}.$$

2. $\dfrac{(a^2-в^2-c^2+2вc)\cdot(a+в+c)}{a+в-c}$ бөлчөгүн кыскарткыла.

Берилген бөлчөктө $(a+в+c)$, $(a+в-c)$ туюнтмалары көбөйтүүчүлөргө ажырабайт. $(a^2-в^2-c^2+2вc)$ – туюнтмасын ажыраталы.

$$a^2-в^2-c^2+2вc=a^2-(в^2-2вc+c^2)=a^2-(в-c)^2=(a+в-c)(a-в+c).$$

Буларды эске алсак

$$\frac{(a^2-в^2-c^2+2вc)(a+в+c)}{a+в-c}=\frac{(a+в-c)(a-в+c)(a+в+c)}{a+в-c}=$$

$$=(a-в+c)(a+в+c)=((a+c)-в)((a+c)+в)=(a+c)^2-в^2.$$

б) Рационалдык бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүү.

А н ы к т а м а. Бөлчөктөрдүн ар биринин бөлүмүнө бөлүнө турган бүтүн рационалдык туюнтманы, бөлчөктүн жалпы бөлүмү деп айтабыз (3.4.4 бөлүмдү карагыла).

М и с а л ы. 1. $\dfrac{x}{x+2}$ жана $\dfrac{3x-1}{x-2}$ бөлчөктөрүнүн жалпы бөлүмү $(x+2)(x-2)$ көп мүчөсү болот.

2. $\dfrac{a+в}{a-в}$ жана $\dfrac{a^3+в^3}{a^2-в^2}$ бөлчөктөрүнүн жалпы бөлүмү болуп $(a^2-в^2)$ көп мүчөсү эсептелет.

Бөлчөктүн жалпы бөлүмүн табуу үчүн төмөндөгүдөй эрежени колдонсо болот:

1. Ар бир бөлчөктүн бөлүмүн көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз.

2. Ар бир бөлүмдөн барабар болбогон көбөйтүүчүлөрдү, барабар көбөйтүүчүлөрдүн эң чоң даражасын алып көбөйтүндү түзөбүз. Түзүлгөн көбөйтүндү жалпы бөлүм болот.

Бөлчөктөрдүн ар биринин алымын жана бөлүмүн кошумча көбөйтүүчүлөргө көбөйтүү аркылуу баардык бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирүү мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

М и с а л. $\dfrac{a}{12a^2-12в^2}$, $\dfrac{в}{18a^3+18a^2в}$, $\dfrac{a+в}{24a^2-24aв}$ бөлчөктөрүн жалпы бөлүмгө келтиргиле.

Бөлчөктөрдүн бөлүмдөрүн көбөйтүүчүлөргө ажыраталы

$$12a^2-12в^2=12(a^2-в^2)=12(a-в)(a+в),$$

$$18a^3+18a^2в=18a^2(a+в),$$

$$24a^2-24aв=24a(a-в).$$

Айтылган эрежени колдонсок жалпы бөлүмгө $a-в,\ a+в,\ a^2$ көбөйтүүчүлөрдү жана $12,18,24$ сандарынын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү болгон 72 санын алабыз

$(12=2\cdot 2\cdot 3=2^2\cdot 3,\ 18=2\cdot 3^2, 24=2^3\cdot 3;\ (\text{э.к.ж.б})=2^3\cdot 3^2=72)$.

Жалпы бөлүм $72a^2(a-в)(a+в)$ көрүнүшүндө болот.

Бөлчөктөрдү жалпы бөлүмгө келтирели. Биринчи бөлчөктүн кошумча көбөйтүүчүсү $6a^2$, экинчисиники $4(a-в)$, үчүн-чүсүнүкү $3a(a+в)$. Демек

$$\frac{a}{12a^2-12в^2}=\frac{a}{12(a^2-в^2)}=\frac{6a^2\cdot a}{6a^2\cdot 12(a^2-в^2)}=$$

$$=\frac{6a^2\cdot a}{72a^2(a^2-в^2)}=\frac{6a^3}{72a^2(a^2-в^2)};$$

$$\frac{в}{18a^2+18a^2в}=\frac{в}{18a^2(a+в)}=\frac{4(a-в)в}{4(a-в)\cdot 18a^2(a+в)}=$$

$$=\frac{4(a-в)в}{72a^2(a^2-в^2)}=\frac{4(aв-в^2)}{72a^2(a^2-в^2)};$$

$$\frac{a+в}{24a^2-24aв}=\frac{a+в}{24a(a-в)}=\frac{3a(a+в)(a+в)}{3a(a+в)\cdot 24a(a-в)}=\frac{3a(a+в)^2}{72a^2(a^2-в^2)}.$$

в) Рационалдык бөлчөктөрдүн үстүнөн амалдар

1. Кошуу жана кемитүү. $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$ бөлчөктөр берилсин.

Бул бөлчөктөрдү кошуу жана кемитүү үчүн жалпы бөлүмгө келтиребиз.

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P_{11}}{Q},\ \frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_{21}}{Q}.$$

Кошуу жана кемитүү амалдарын төмөндөгүдөй аткарабыз

$$\frac{P_1}{Q_1}\pm\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_{11}}{Q}\pm\frac{P_{21}}{Q}=\frac{P_{11}\pm P_{21}}{Q}$$

2. Көбөйтүү, бөлүү. $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$ берилсе

$$\frac{P_1}{Q_1}\cdot\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot P_2}{Q_1\cdot Q_2},\ \frac{P_1}{Q_1}:\frac{P_2}{Q_2}=\frac{P_1\cdot Q_2}{Q_1\cdot P_2}.$$

3. Рационалдык бөлчөктү бүтүн даражага көтөрүү.

$\frac{P}{Q}$ берилсин. Бул бөлчөктү натуралдык даражага көтөрүү төмөндөгүдөй аткарылат

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^n=\frac{P^n}{Q^n}.$$

$\frac{P}{Q}$ бөлчөгүн терс бүтүн даражага көтөрүүдө төмөндөгүдөй теңдештик колдонулат.

$$\left(\frac{P}{Q}\right)^{-n}=\left(\frac{Q}{P}\right)^n,\ n\in N.$$

М и с а л д а р. 1. $\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{x+y}$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

Берилген туюнтманы жөнөкөйлөтүү үчүн кошуу амалын аткаралы

$$\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{x+y}=\frac{x^3+y^3}{x+y}.$$

(x^3+y^3) туюнтмасын көбөйтүүчүлөргө ажыраталы

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2).$$

Демек

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}=x^2-xy+y^2.$$

2. $\dfrac{3}{2x^2+2x}+\dfrac{2x-1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x}$ туюнтмасын жөнөкөйлөткүлө.

Бөлчөктөрдү бирдей бөлүмгө келтирели жана амалдарды аткаралы.

$$2x^2+2x=2x(x+1),\ \ x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Жалпы бөлүм $2x(x-1)(x+1)$ болот.

$$\frac{3}{2x^2+2x}+\frac{2x-1}{x^2-1}-\frac{2}{x}=\frac{3(x-1)}{2x(x-1)(x+1)}+\frac{(2x-1)\cdot 2x}{2x(x-1)(x+1)}-\frac{2\cdot 2(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{3(x-1)+2x(2x-1)-4(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)}=\frac{3x-3+4x^2-2x-4x^2+4}{2x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{x+1}{2x(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2x(x-1)}.$$

3. Көбөйтүүнү аткаргыла: $\dfrac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\dfrac{9x^4}{x^2-1}$.

Алдын ала төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү аткаралы

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}=\frac{(x+1)^2}{18x^3},\ \ \frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}.$$

Бөлчөктөрдү көбөйтүүнү эске алсак жана кыскартууларды жүргүзсөк

$$\frac{x^2+2x+1}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{18x^3}\cdot\frac{9x^4}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x+1)^2\cdot 9x^4}{18x^3(x-1)(x+1)}=\frac{x(x+1)}{2(x-1)}.$$

4. Бөлүүнү аткаргыла: $\dfrac{a^3-2a^2}{3a+3}:\dfrac{a^2-4}{3a^2+6a+3}$.

Бөлүүнүн эрежесин колдонсок

$$\frac{a^3-2a^2}{3a+3}:\frac{a^2-4}{3a^2+6a+3}=\frac{a^3-2a^2}{3a+3}\cdot\frac{3a^2+6a+3}{a^2-4}=$$

$$=\frac{a^2(a-2)\cdot 3(a^2+2a+1)}{3(a+1)(a-2)(a+2)}=\frac{a^2(a+1)^2}{(a+1)(a+2)}=\frac{a^2(a+1)}{a+2}.$$

5. Даражага көтөргүлө: $\left(\dfrac{2x^2\cdot y^3}{3z^5}\right)^3$.

Эрежеге ылайык

$$\left(\frac{2x^2\cdot y^3}{3z^5}\right)^3=\frac{(2x^2\cdot y^3)^3}{(3z^5)^3}=\frac{2^3(x^2)^3\cdot(y^3)^3}{3^3(z^5)^3}=\frac{8x^6y^9}{27\cdot z^{15}}.$$

6. Даражага көтөргүлө: $\left(\dfrac{(a+в)^2\cdot(a-в)^3}{(a+2в)^4}\right)^{-5}$.

Эрежеге ылайык

$$\left(\frac{(a+в)^2\cdot(a-в)^3}{(a+2в)^4}\right)^{-5}=\left(\frac{(a+2в)^4}{(a+в)^2\cdot(a-в)^3}\right)^{5}=\frac{(a+2в)^{20}}{(a+в)^{10}(a-в)^{15}}.$$

4. Рационалдык туюнтмаларды өзгөртүп түзүү жөнүндө түшүнүк.

Ар кандай рационалдык туюнтмаларды өзгөртүп түзүү рационалдык бөлчөктөрдү кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүүгө, натуралдык даражага көтөрүүгө келтирилет. Рационалдык туюнтманы аталган амалдарды аткаруу аркылуу, алымы жана бөлүмү бүтүн рационалдык туюнтмалар болгон (кыскарбас) бөлчөккө келтирүү рационалдык туюнтманы теңдеш өзгөртүп түзүү деп аталат.

М и с а л. Туюнтманы өзгөртүп түзгүлө

$$\left(\frac{2a}{2a+в}-\frac{4a^2}{4a^2+4aв+в^2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{4a^2-в^2}+\frac{1}{в-2a}\right)^{-1}+\frac{8a^2}{2a+в}.$$

Төмөндөгүлөрдү аткаралы

1. $\dfrac{2a}{2a+в}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4aв+в^2}=\dfrac{2a}{2a+в}-\dfrac{4a^2}{(2a+в)^2}=$

$$=\frac{2a(2a+в)-4a^2}{(2a+в)^2}=\frac{2aв}{(2a+в)^2};$$

2. $\dfrac{2a}{4a^2-в^2}+\dfrac{1}{в-2a}=\dfrac{2a}{(2a-в)(2a+в)}-\dfrac{1}{2a-в}=$

$$=\frac{2a-(2a+в)}{(2a-в)(2a+в)}=\frac{-в}{(2a-в)(2a+в)};$$

3. $\left(\dfrac{-в}{(2a-в)(2a+в)}\right)^{-1}=-\dfrac{(2a-в)(2a+в)}{в};$

4. $\dfrac{2aв}{(2a+в)^2}\cdot\left(-\dfrac{(2a-в)(2a+в)}{в}\right)=-\dfrac{2aв(2a-в)(2a+в)}{в(2a+в)^2}=-\dfrac{2a(2a-в)}{2a+в};$

5. $-\dfrac{2a(2a-в)}{2a+в}+\dfrac{8a^2}{2a+в}=\dfrac{-2a(2a-в)+8a^2}{2a+в}=\dfrac{4a^2+2aв}{2a+в}=$

$$=\frac{2a(2a+в)}{2a+в}=2a.$$

5. Ирационалдык туюнтмаларды өзгөртүп түзүү.

Иррационалдык туюнтма берилсин. Бул туюнтманы өзгөр-түп түзүү үчүн тамырлардын жана рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттерин колдонобуз.

Тамырлардын үстүнөн амалдарды аткарууга мисалдар.

1. Тамыр чыгаргыла: $\sqrt[3]{a^3в^9}$.

$$\sqrt[3]{a^3в^9} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{в^9} = a\cdot в^3.$$

2. Тамыр белгисинин сыртына көбөйтүүчүлөрдү чыгаргыла: $\sqrt{45a^5}$.

$$\sqrt{45a^5} = \sqrt{9\cdot 5\cdot a^4\cdot a} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{5a} = 3a^2\sqrt{5a}.$$

3. Жөнөкөйлөткүлө: $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5$.

$$\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5 = \sqrt[3]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^9\cdot a} = \sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{a} = a^3\sqrt[3]{a}.$$

4. Жөнөкөйлөткүлө: $\sqrt[4]{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}$.

$x^2\cdot\sqrt[3]{x}$ туюнтмасындагы биринчи көбөйтүүчүнү тамыр белгисинин ичине киргизели

$$x^2\cdot\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x^2)^3}\cdot\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^6\cdot x} = \sqrt[3]{x^7}.$$

Демек

$$\sqrt[4]{x^2\cdot\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[12]{x^7}.$$

5. Жөнөкөйлөткүлө: 1) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2}$; 2) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$; 3) $\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}$.

1) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a\cdot a^2} = \sqrt[5]{a^3}$.

2) $\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ туюнтмасын жөнөкөйлөтүү үчүн тамырларды бирдей көрсөткүчкө келтирели

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3\cdot2]{a^2} = \sqrt[6]{a^2}.$$

Буларды эске алсак

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a^2\cdot a} = \sqrt[6]{a^3}.$$

$\sqrt[6]{a^3}$ туюнтмасын төмөндөгүдөй өзгөртүүгө болот

$$\sqrt[6:3]{a^{3:3}} = \sqrt{a}.$$

3) $\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7} = \sqrt[8\cdot3]{(x^3)^3}\cdot\sqrt[12\cdot2]{(x^7)^2} = \sqrt[24]{x^9}\cdot\sqrt[24]{x^{14}} = \sqrt[24]{x^9\cdot x^{14}} = \sqrt[24]{x^{23}}$.

Аныктама боюнча тамыр белгисинен рационалдык даражага өтүүгө мүмкүнчүлүк болгондуктан, иррационалдык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүдө тамырлардын үстүнөн аткарылуучу амалдарды рационалдык даражалар менен жүргүзүлүүчү амалдар менен алмаштырууга болот.

Мисалы. 1. $\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{\frac{3}{8}+\frac{7}{12}} = x^{\frac{9+14}{24}} = x^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{x^{23}}$.

2. Жөнөкөйлөткүлө: $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}$.

$\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}$ туюнтмасын даража түрүндө жазалы

$$\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}=x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}.$$

Эң кичине даражаны $\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$ кашаанын сыртына көбөйтүүчү катарында чыгаралы.

$$x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}-1\right)=x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{2}{4}}-1\right)=x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)=\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$$

Демек

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{x}\,.$$

Айрым теңдештиктер жөнүндө.

1. $\sqrt{a^2}$ туюнтмасын карайлы. Тамырдын маанисин арифметикалык деп түшүнөлү. Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн.

1) $a\geq 0$, анда $\sqrt{a^2}=a$;

2) $a<0$, анда $\sqrt{a^2}=-a$.

Демек

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a, & a\geq 0;\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0;\\ -a, & a<0,\end{cases}$$

болгондуктан $\sqrt{a^2}=|a|$ теңдештигине ээ болобуз.

М и с а л д а р. 1. $\sqrt{3^2}=3$; $\sqrt{(-5)^2}=-(-5)=5$; $\sqrt{0^2}=0$.

2. Жөнөкөйлөткүлө: $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3$.

Туюнтманы жөнөкөйлөтүүнүн алдында бул туюнтманын аныкталуу областын табалы.

$\sqrt{x^2-6x+9}$ аныкталыш үчүн $x^2-6x+9\geq 0$ болууга тийиш.

$x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$ болгондуктан $\sqrt{x^2-6x+9}$ туюнтмасы каалагандай $x\in R$ үчүн мааниге ээ.

$\sqrt{2-x}$ туюнтмасынын аныкталуу областы $(-\infty, 2]$ интервалы болот. Жалпысынан берилген туюнтманын аныкталуу областы болуп $(-\infty, 2]$ интервалы эсептелет.

Туюнтманы жөнөкөйлөтөлү: $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$.
Шарт боюнча $x\in(-\infty, 2]$ болгондуктан $|x-3|=-(x-3)=3-x$.
Демек

$$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3=3-x+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{2-x}\,.$$

2. Бөлүмдөгү иррационалдуулуктан кутулуу.

Айрым бир учурларда кыскача көбөйтүүнүн формулаларын колдонуу аркылуу бөлчөктүн бөлүмүндөгү иррационалдуулуктан кутулууга болот. Бул учурлардын айрымдарын карайлы.

2.1. $\dfrac{A_1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ берилсин, мында $A>0,\ B>0$.

Бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $(\sqrt{A}-\sqrt{B})$ туюнтмасына көбөйтөлү ($\sqrt{A}-\sqrt{B}$ жана $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ түйүндөш туюнтмалар деп аталат).

$$\frac{A_1(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})}=\frac{A_1(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}.$$

2.2. $\dfrac{A_1}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}$ берилсин. Бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)$ туюнтмасына көбөйтөлү.

$$\frac{A_1(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})}{\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)}=\frac{A_1(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})}{A+B}.$$

2.3. $$\frac{A_1}{\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}}=\frac{A_1(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})}{\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B}\right)}=\frac{A_1(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})}{A-B}.$$

Иррационалдык туюнтмаларды жөнөкөйлөтүүгө мисалдар. (Бул мисалдарда туюнтманын аныкталуу областын табуу маселесин карабайбыз).

1. $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}}$ берилсин.

2.1 учурун эске алсак

$$\frac{\left[(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}\right]\left[(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m-x)^{\frac{1}{2}}\right]\left[(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}\right]}=\frac{\left[(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{(m+x)-(m-x)}=$$

$$=\frac{m+x+2(m+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(m-x)^{\frac{1}{2}}+m-x}{2x}=\frac{2\left[m+(m^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]}{2x}=\frac{m+(m^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}\cdot$$

2. $\dfrac{\left[1-\left(\dfrac{a}{в}\right)^{-2}\right]\cdot a^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{в})^2+2\sqrt{aв}}$.

Туюнтманы жөнөкөйлөтүү үчүн бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн өз алдынча карайлы.

$$\left[1-\left(\frac{a}{в}\right)^{-2}\right]\cdot a^2=\left[1-\left(\frac{в}{a}\right)^{2}\right]\cdot a^2=a^2-в^2.$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{в}\right)^2+2\sqrt{aв}=a-2\sqrt{aв}+в+2\sqrt{aв}=a+в.$$

Жүргүзүлгөн өзгөртүп түзүүлөрдүн натыйжасында

$$\frac{\left[1-\left(\frac{a}{в}\right)^{-2}\right]\cdot a^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{в}\right)^2+2\sqrt{aв}}=\frac{a^2-в^2}{a+в}=\frac{(a-в)(a+в)}{a+в}=a-в.$$

3. $\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$.

Биринчи жол.

Ар бир көбөйтүүчүнү өзүнчө жөнөкөйлөтөлү

$$\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}=\sqrt[6]{8x(3+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+4)}=\sqrt[6]{8x(\sqrt{3}+2)^2}=\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{3}+2)^2}=$$

$$=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}=\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}.$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}=\sqrt[3]{\sqrt{x}(2\sqrt{6}-4\sqrt{2})}=\sqrt[3]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)}=$$

$$=\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}.$$

Берилген туюнтманы төмөндөгүдөй жазууга болот.

$$\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}=\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=$$

$$=\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{(2\sqrt{2})^2}\times$$

$$\times\sqrt[3]{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{2^3\cdot2^3}\cdot\sqrt[3]{(3-4)}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{2^6}\cdot\sqrt[3]{-1}=-2\sqrt[3]{x}.$$

Экинчи жол.

$2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}$ туюнтмасы $x\geq 0$ маанилеринде аныкталып $2\sqrt{x}(\sqrt{3}-2)\leq 0$ болот.

$\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}=-\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{6x}}=-\sqrt[3]{2\sqrt{2x}(2-\sqrt{3})}$ өзгөртүп түзүүсүндө тамыр арифметикалык мааниге ээ болот.

Тамырларды бирдей көрсөткүчкө келтирели.

$$-\sqrt[3]{2\sqrt{2x}(2-\sqrt{3})}=-\sqrt[6]{(2\sqrt{2x})^2(2-\sqrt{3})^2}=-\sqrt[6]{8x(7-4\sqrt{3})}.$$

Демек

$$-\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[6]{8x(7-4\sqrt{3})}=-\sqrt[6]{(8x)^2(7^2-(4\sqrt{3})^2)}=-\sqrt[6]{2^6\cdot x^2}=-2\sqrt[3]{x}.$$

4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-в}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+в}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+в}{a-в}}\right)$ берилсин.

Кашаалардын ичиндеги туюнтмаларды жөнөкөйлөтөлү

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-в}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-в}}{(\sqrt{a}-\sqrt{a-в})(\sqrt{a}+\sqrt{a-в})}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-в}}{a-(a-в)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-в}}{в};$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+в}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+в}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a+в})(\sqrt{a}-\sqrt{a+в})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+в}}{a-(a+в)}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+в}}{-в}=-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+в}}{в};$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-в}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+в}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-в}}{в}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+в}}{в}=\frac{\sqrt{a-в}+\sqrt{a+в}}{в}.$$

Экинчи кашааны жөнөкөйлөтөлү

$$1+\sqrt{\frac{a+в}{a-в}}=\frac{\sqrt{a-в}+\sqrt{a+в}}{\sqrt{a-в}}.$$

Бөлүү амалын аткаралы

$$\frac{\sqrt{a-в}+\sqrt{a+в}}{в}:\frac{\sqrt{a-в}+\sqrt{a+в}}{\sqrt{a-в}}=\frac{\sqrt{a-в}+\sqrt{a+в}}{в}\cdot\frac{\sqrt{a-в}}{\sqrt{a-в}+\sqrt{a+в}}=\frac{\sqrt{a-в}}{в}.$$

Көнүгүүлөр

Көптүктөргө маселелер.

1. Жаныбарлардын көптүгүн атоодо кандай сөздөр колдонулат?
2. Бир театрда эмгектенген артистердин көптүгү кандай аталат?
3. Вазада турган гүлдөрдүн көптүгүн атагыла.

4. Эчки ℓ узундуктагы жип менен казыкка байланган. Жип казыкка өткөрүлгөн шакек аркылуу эркин жылат (айланат). Талаанын эчки эркин оттоого мүмкүнчүлүгү болгон көптүгүн атагыла.

5. A деп 60 санын бөлүүчүлөрдүн көптүгүн белгилейли. Төмөндөгү жазуулардын кайсылары туура: $-5\in A$, $10\notin A$, $4\notin A$, $30\in A$. A көптүгүнүн элементтерин санагыла.

6. A коэффициенттери бүтүн болгон, бир өзгөрүлмөлүү көп мүчөлөрдүн көптүгү болсун, $x^2-12x+6\in A$, $x^2+y^2-1\in A$, $\frac{3}{4}x^3-1\notin A$, $\frac{7}{6}x^2-5\in A$ жазуулары туурабы?

7. Мүнөздөөчү касиеттери менен берилген төмөндөгү көптүктөрдүн элементтерин тапкыла:

а) $A=\{x:x^2-8x+15=0\}$; в) $A=\{x:x^4-10x^2+9=0\}$;

б) $A=\{x:x\in N,-11<x\le 3\}$; г) $A=\left\{x:x\in N,-1\le x\le 7\frac{1}{3}\right\}$.

8. Тегиздиктеги төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болгон M - чекиттердин көптүгүн атагыла:

а) $\{M:OM=r-const\}$; б) $\{M:OM\le r-const\}$;

в) $\{M:\angle AOM=\angle MOB\}$ ($\angle$ – бурчтун белгиси);

г) $\{M:BM=CM$, мында B, C берилген чекиттер$\}$;

д) $\{M:BM=CM=DM$, мында B, C, D берилген чекиттер$\}$.

9. Төмөндөгү көптүктөрдүн баардык элементтери, бир элементтен башкасы, кандайдыр бир касиетке ээ. Бул касиетке ээ болбогон элементти тапкыла.

а) $\{2,6,15,84,156\}$; б) $\{2,7,13,16,29\}$; в) $\{1,9,25,67,121\}$.

10. $A=\left\{x:x=\frac{n^2+1}{n^2+4},\ n\in N\right\}$ көптүгү берилген. $\frac{2}{5},\frac{17}{20},-\frac{1}{7},\frac{5}{6}$ сандары A көптүгүнө таандык болобу?

11. $A=\left\{x:x=\frac{n^2+7}{n^2+15},\ n\in N\right\}$ көптүгүнө таандык болгон беш санды жазгыла.

12. Төмөндөгү көптүктөрдүн ичинен бош көптүктөрдү көрсөткүлө:

а) Жактары барабар болбогон тик бурчтуктар;

б) Диагоналдары барабар болбогон тик бурчтуктар;

в) Медианалары бир чекитте кесилишпеген үч бурчтуктардын көптүгү;

г) $4x^2 - 1 = 0$ теңдемесинин бүтүн тамырлары;

д) $2x^2 - 3x - 9 = 0$ теңдемесинин натуралдык тамырлары.

13. A - кең бурчтуу үч бурчтуктардын көптүгү болсун. c – кең бурчтун каршысындагы, $a, в$ үч бурчтуктун калган жактарын туюнтсун. $c^2 = a^2 + в^2$ барабардыгы туура болгон A көпту-гүнүн элементтерин атагыла.

14. $A = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x : 2x^2 - 2x - 12 = 0\}$ көптүктөрү-нүн биригүүсүн, кесилишин тапкыла.

15. $A_1 = \{B : OB \le 5\}$, $A_2 = \{C : O_1C \le 4\}$ көптүктөрү берилсин, $OO_1 = 6$ болсун. A_1 жана A_2 көптүктөрүнүн биригүүсүн, кесилишин сүрөттөп көрсөткүлө.

16. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $z = \dfrac{1}{(t-1)(t^2+1)}$ функциялары берилген. Бул функциялардын аныкталуу областтарын жана алардын биригүүсүн, кесилиштерин тапкыла.

Сандык туюнтмалар

Сандык туюнтманын маанилерин тапкыла:

1. $\dfrac{\left(152\frac{3}{4} - 148\frac{3}{8}\right)\cdot 0{,}3}{0{,}2}$.

2. $\dfrac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0{,}8\cdot 0{,}25}$.

3. $\dfrac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0{,}0001 : 0{,}005}$.

4. $\left(\dfrac{0{,}012}{5} + \dfrac{0{,}04104}{5{,}4}\right)\cdot 4560 - 42\frac{1}{3}$.

5. $\dfrac{\left(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}\right) : 2\frac{2}{3}}{0{,}04}$.

6. $\dfrac{\left(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12}\right) : 18\frac{1}{6}}{0{,}002}$.

7. $\dfrac{\left(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18}\right)\cdot 2\frac{1}{4} + 0{,}373}{0{,}2}$.

8. $\dfrac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3} + 0{,}6}{0{,}2}$.

9. $\dfrac{\left(12\frac{1}{6} - 6\frac{1}{27} - 5\frac{1}{4}\right)\cdot 13{,}5 + 0{,}111}{0{,}02}$.

10. $\dfrac{\left(1\frac{1}{12} + 2\frac{5}{32} + \frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5} + 2{,}13}{0{,}4}$.

11. $\dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25) : 2{,}5}$.

12. $\dfrac{2\frac{5}{8} - \frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12} + 4{,}375\right) : 19\frac{8}{9}}$.

13. $$\frac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}.$$

14. $$\frac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0{,}8+2\frac{1}{9}\cdot 0{,}225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}.$$

15. $$\frac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}+\left(\frac{7}{40}+\frac{3}{32}\right)\cdot 4{,}5}{0{,}04}.$$

16. $$\frac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}-\frac{1:0{,}25}{1{,}6\cdot 0{,}625}.$$

17. $$\frac{\left[\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9+\left(\frac{7}{8}-\frac{7}{30}\right)\cdot 1\frac{9}{11}\right]\cdot 4{,}2}{0{,}008}.$$

18. $$\left[\frac{\left(2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{\left(2{,}75-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-0{,}45}\right]:\frac{67}{200}.$$

19. $$\left[\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}-\frac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{80}}\right]:2\frac{1}{20}.$$

20. $$26:\left[\frac{3:(0{,}2-0{,}1)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\frac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)}\right]+\frac{2}{3}:\frac{4}{21}.$$

21. $$\frac{3:\frac{2}{5}-0{,}09:\left(0{,}15:2\frac{1}{2}\right)}{0{,}32\cdot 6+0{,}03-(5{,}3-3{,}88)+0{,}67}.$$

22. $$1\frac{7}{20}:2{,}7+2{,}7:1{,}35+\left(0{,}4:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4{,}2-1\frac{3}{40}\right).$$

23. $$\left(10:2\frac{2}{3}+7{,}5:10\right)\cdot\left(\frac{3}{40}-\frac{7}{30}\cdot 0{,}25+\frac{157}{360}\right).$$

24. $$\left(\frac{0{,}216}{0{,}15}+\frac{2}{3}:\frac{4}{15}\right)+\left(\frac{196}{225}-\frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right)+0{,}695:1{,}39.$$

25. $1{,}7:\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}-\left(0{,}5+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right).$

26. $\dfrac{1}{3}:\dfrac{2}{3}+0{,}228:\left[\left(1{,}5291-\dfrac{14{,}53662}{3-0{,}095}\cdot 0{,}305\right):0{,}12\right].$

Туюнтмаларды өзгөртүп түзүү

1. $\dfrac{a^2-1}{n^2+an}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\dfrac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2}.$

2. $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right).$

3. $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\dfrac{3x-6}{x-2}\right).$

4. $\left(\dfrac{2a+10}{3a-1}+\dfrac{130-a}{1-3a}+\dfrac{30}{a}-3\right)\cdot\dfrac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}.$ 5. $\dfrac{a^2-в^2}{a-в}-\dfrac{a^3-в^3}{a^2-в^2}.$

6. $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\dfrac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right].$ 7. $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}.$

8. $\left[\dfrac{a-1}{a^2-2a+1}+\dfrac{2(a-1)}{a^2-4}-\dfrac{4(a+1)}{a^2+a-2}+\dfrac{a}{a^2-3a+2}\right]\times$

$$\times\dfrac{36a^3-144a-36a^2+144}{a^3+27}.$$

9. $\left[\dfrac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\dfrac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right]:\left[\dfrac{5}{x^2+1}+\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{3}{2(x-1}\right].$

10. $\left(\dfrac{x-y}{2y-x}-\dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\dfrac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}.$

11. $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right].$

12. $\dfrac{2a^2(в+c)^{2n}-\dfrac{1}{2}}{an^2-a^3-2a^2-a}:\dfrac{2a(в+c)^n-1}{a^2c-a(nc-c)}$.

13. $\dfrac{1}{a(a-в)(a-c)}+\dfrac{1}{в(в-a)(в-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-в)}$.

14. $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right]$.

15. $\dfrac{в}{a-в}\cdot\sqrt[3]{(a^2-2aв+в^2)(a^2-в^2)(a+в)}\cdot\dfrac{a^3-в^3}{\sqrt[3]{(a+в)^2}}$.

16. $\sqrt[6]{8x(7+4)\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$.

17. $\dfrac{a}{2}\cdot\sqrt{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\left(\dfrac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$.

18. $\sqrt{\dfrac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$.

19. $aв\sqrt{a^{1-n}\cdot в^{-n}-a^{-n}в^{1-n}}\sqrt[n]{(a-в)^{-1}}$.

20. $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}+11)$.

21. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-в}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+в}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+в}{a-в}}\right)$.

22. $\left(\dfrac{1}{в-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{в+\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt[-2]{\dfrac{1}{9}}a^{-2}в^{-1}}{a^{-2}-a^{-1}\cdot в^{-2}}$.

23. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}$.

24. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$.

25. $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$.

26. $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

27. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+в^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5в^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2в^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2в^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}в^{\frac{1}{2}}\right)$.

28. $\left[\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{a^2x}\right):\left(x+\sqrt[3]{ax^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^6$.   29. $\left[\dfrac{\left(\sqrt{a+1}\right)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{a+1}\right)^2-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}$.

30. $\left(\sqrt{a\text{в}}-\dfrac{a\text{в}}{a+\sqrt{a\text{в}}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{a\text{в}}-\sqrt{\text{в}}}{a-\text{в}}$.   31. $\left[\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-3}$.

32. $\left[(a-\text{в})\sqrt{\dfrac{a+\text{в}}{a-\text{в}}}+a-\text{в}\right]\left[(a-\text{в})\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a+\text{в}}{a-\text{в}}}-1\right)\right]$.

33. $\left(a+\text{в}^{\frac{3}{2}}+\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{\text{в}}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{\text{в}}}{\sqrt{a}-\sqrt{\text{в}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

34. $\left[\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^2+8x+16}$.

35. $x^3\left[\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)^2+\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)^2}{x+\sqrt{xy}}\right]^5\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

36. $\left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3}-\sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\dfrac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\cdot\sqrt{1+2\sqrt{\dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{x}}}$.

37. $\dfrac{\left(a-\text{в}^2\right)\sqrt{3}-\text{в}\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{-8\text{в}^3}}{\sqrt{2\left(a-\text{в}^2\right)^2+\left(2\text{в}\sqrt{2a}\right)^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}$.

38. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\dfrac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}$.

39. $\left[\dfrac{\sqrt[6]{a^2x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[6]{x}\right]^3+4(x+1)\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+1\right)^2$.

40. $\left[\dfrac{3x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\right]^{-1}-\left(\dfrac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$.

41. $\left[\dfrac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3+2x+a}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})^3-x-2a}\right]^3+\sqrt{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)^{\frac{2}{3}}}:a$.

42. $$\left[\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{в}\right)^2-\left(2\sqrt{в}\right)^2}{a-в}-\left(a^{\frac{1}{2}}-в^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+в^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]:\frac{(4в)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+в^{\frac{1}{2}}}.$$

43. $$\left(\frac{a-4в}{a+(aв)^{\frac{1}{2}}-6в}-\frac{a-9в}{a+6(aв)^{\frac{1}{2}}+9в}\right)\cdot\frac{в^{-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-3в^{\frac{1}{2}}}.$$

44. $$\frac{\left(\dfrac{a-в}{\sqrt{a}+\sqrt{в}}\right)^3+2a\sqrt{a}+в\sqrt{в}}{3a^2+3в\sqrt{aв}}+\frac{\sqrt{aв}-a}{a\sqrt{a}-в\sqrt{a}}.$$

45. $$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{в}\right)^3+2a^2:\sqrt{a}+в\sqrt{в}}{a\sqrt{a}+в\sqrt{в}}+\frac{3\sqrt{aв}-3в}{a-в}.$$

46. $$\left[\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+в^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{в}}{a^{\frac{3}{2}}-в^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right](aв)^{-\frac{1}{2}}.$$

47. $$\left[\left(\frac{a^2-в\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{в}}+a\sqrt[3]{в}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3в^2}\right)-\sqrt[3]{в}\right]^2.$$

48. $$\left[\frac{a^2\sqrt[4]{x}+\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4.$$

49. $$\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$$

50. $$\sqrt{a}\left[\frac{a+\sqrt[4]{a^3в^2}+в\sqrt[4]{aв^2}+в}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt{в})^2}-в\right]^{-1}+\frac{1}{a^{\frac{1}{4}}в^{\frac{1}{2}}-1}.$$

4. Функция

4.1. Чоңдуктар

Сандар, узундук, көлөм, аянт, температура, ылдамдык ж.б. чоңдуктарга мисал боло алат.

Чоңдуктар туруктуу жана өзгөрүлмө болуп бөлүнөт.

А н ы к т а м а. Чоңдуктун мааниси убакыттын өтүшү менен өзгөрбөсө туруктуу, түрдүү маанилерди кабыл алса өз-гөрүлмө деп аталат.

М и с а л ы. Имараттын өлчөмдөрү (узундугу, бийиктиги, туурасы) туруктуу чоңдуктар; кыймылдагы автомашинанын ылдамдыгы өзгөрүлмө чоңдук.

Төмөндөгүдөй мисалды карайлы.

V көлөмдөгү идишке бир түтүктөн суу агып кирип, экинчи түтүктөн керектөөгө жараша агып турат жана идишти туюк деп эсептеп идиштеги суунун көлөмүнүн өзгөрүшүн байкайлы.

Берилген суунун көлөмүн x деп белгилесек, анда $0 \leq x \leq V$ болот.

Бул мисал көрсөтүп тургандай өзгөрүлмө чоңдуктар ар дайым каалагандай эле маанини кабыл ала бербейт.

А н ы к т а м а. Өзгөрүлмө чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин көптүгү, бул чоңдуктун өзгөрүү областы деп аталат.

Өзгөрүлмө чоңдуктарды $x, y, z, t, v, \cdots$, ал эми өзгөрүү областарды $X, Y, Z, T, V, ...$ деп белгилейли. Мындай белгилөөлөр шарт-туу түрдө гана, каалагандай белгилөөгө да болот.

4.2. Чоңдуктардын ортосундагы байланыштар.

Өзгөрүү областтары $X, У$ болгон x жана y чоңдуктары берилсин.

А н ы к т а м а. x чоңдугунун кабыл алган маанисине y чоңдугунун бир же бир нече маанилери тиешелеш коюлса, анда бул чоңдуктардын ортосунда функционалдык көз карандылык орун алат деп айтабыз.

М и с а л ы. 1. $y = 2x + 1$ берилсин.

Бул барабардыкта эки өзгөрүлмө, x жана y катышат. $x = 0$ болгондо $y = 1$; $x = 1$ болсо $y = 3$; $x = -1$ болсо $y = -1$ ж.у.с.

2. Жактары x (өзгөрүлмө) жана $a - const$ болгон тик бурч-тук берилсин. Тик бурчтуктун аянты $S = a \cdot x$. x чоңдугуна ар кандай (терс эмес) маанилерди берүү менен аянттын түрдүү маанилерине ээ болобуз.

3. $y = [x]$ берилсин. $[x]-$ жазуу, x санынын бүтүн бөлүгү дегенди туюнтат.

А н ы к т а м а. x санынан чоң болбогон эң чоң бүтүн санды x санынын бүтүн бөлүгү деп атайбыз.

М и с а л ы. $[3{,}13] = 3, [-3{,}13] = -4, [0] = 0, [-1] = -1, [0{,}25] = 0$.

Жогорудагы барабардык аркылуу берилген x жана y чоң-дуктарынын ортосунда функционалдык көз карандылык орун алган.

1-3 мисалдарда x тин маанилерине y тин бир гана мааниси тиешелеш коюлат.

4. $y = \pm\sqrt{x}$. $x = 1$ болсо, $y = \pm 1$; $x = 2$, болсо, $y = \pm\sqrt{2}...$. Бул мисалда x тин бир маанисине y тин эки мааниси тиешелеш коюлат.

4.3. Функциянын аныктамасы.

Аныкталуу областтары X жана $У$ болгон x, y өзгөрүлмөлөрү берилсин. x жана y чоңдуктарынын ортосундагы функционалдык көз карандылык орун алсын.

А н ы к т а м а. X тен алынган x тин каалаган маанисине кандайдыр бир эреже, закондордун негизинде $У$ тен алынган y тин анык бир мааниси тиешелеш коюлса, y ти x тен функция деп атайбыз.

Бул аныктамадагы эреже, закондордун жыйындысын f десек функцияны төмөндөгүдөй барабардык аркылуу жаза алабыз.

$$y = f(x).$$

Өзгөрүлмө чоңдуктарга жана эреже, закондордун туюнтулушуна жараша функцияны

$$x = \varphi(t), z = \varphi(x), u = F(v),...$$

түрдө да белгилөөгө болот.

x чоңдугун – аргумент, y ти функция деп айтабыз. X – функциянын аныкталуу, Y – маанилеринин областтары деп аталат.

x тин кабыл алууга мүмкүн болгон маанилери $f(\varphi, \psi, ...)$ эреже, закондор аркылуу аныкталаары аныктоодон келип чыгат.

Мисалы. 1. $y = \sqrt{x}$ функциясы берилсин. x тин маанисине тиешелеш болгон y тин маанисин алуу үчүн x тен квадраттык тамыр чыгаруу керек. Бул амал x тин каалаган эле маанисинде аткарыла бербейт, $x \geq 0$ болууга тийиш.

2. $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$. Бул функциянын аныкталуу областы

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x + 1 \neq 0, \end{cases}$$

барабарсыздыктарын канаатандырган x тин маанилеринин көптүгү катары аныкталат. Барабарсыздыктарды чыгарсак

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \neq -1, \end{cases} \quad \text{же} \quad x \geq 1.$$

Демек $X = [1, +\infty)$.

Функциянын аныктамасында x тин каалаган маанисине y тин анык бир мааниси тиешелеш коюлса деп айтылды. Бул аныктама боюнча аныкталган функция бир маанилүү деп аталат. Эгерде аныктамага «y тин бир нече мааниси» деген сүй-лөмдү киргизсек, анда көп маанилүү функцияга ээ болобуз.

Мисалы. 1. $y = \pm\sqrt{x}$ эки маанилүү функция.

2. $y = arc\sin x,\ x \in [-1, 1];\ y \in (-\infty, +\infty)$ берилсин.

Мында x тин $[-1, 1]$ аралыгынан алынган каалаган маанисине y тин чексиз көп мааниси тиешелеш коюлат.

Мисалы $x = \dfrac{1}{2}$ десек, $y = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z$; $x = 0$ десек, $y = k\pi,\ k \in Z$

.

Биз кийинки баяндоолорубузда негизинен бир маанилүү функцияларды гана колдонобуз.

4.4. Функциялардын берилиш жолдору

Функциялар төмөндөгү жолдордун бири аркылуу берилет:

1. Аналитикалык;
2. Таблицалык;
3. Графикалык.

Ар бир жолго кыскача токтололу.

1. Аналитикалык жолдо тиешелештик эреже, закондордун тизмегин камтыган аналитикалык туюнтма берилет.

М и с а л ы. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(t) = \sqrt{1-t^2}$,

$$u = 2v^2 - 3v + 1\frac{1}{v} - \sqrt{v^2-1}.$$

Аналитикалык жолдо функция бир нече формулалар аркылуу да берилиши мүмкүн

М и с а л ы. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$

Белгилей кетүүчү нерсе аналитикалык жолдо ар дайым эле туюнтма же формула берилет деп түшүнүүгө да болбойт. Тиешелештик эреже, закондор сүйлөм түрүндө да берилиши мүм-күн.

М и с а л ы $f(x) = [x]$. 4.2 бөлүктөгү 3 – мисал. Бул учурда тиешелештик эреже сүйлөм түрүндө айтылат.

2. Кандайдыр бир процессти изилдөөдө аргументтин ар кандай маанилери жана аларга тиешелеш болгон фукциянын маанилери аныкталат. Алынган маанилерди төмөндөгүдөй таблица түрүндө жазып алалы

x	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_{n-1}	y_n

Функциянын мындай жол менен берилиши таблицалык деп аталат.

Таблицалык жол эксперименталдык илимдерде көп колдонулат. Функция бул жол менен берилгенде тиешелештик эреже, закондорду так көрсөтүүгө, аргументтин каалагандай маанисине тиешелеш болгон функциянын маанисин табууга болбойт.

М и с а л ы. Абанын температурасынын өзгөрүшүнө байкоо жүргүзсөк төмөндөгүдөй таблица келип чыкты дейли.

t уб.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T темп.	16^0	15^0	14^0	$13{,}6^0$	13^0	14^0	$14{,}7^0$	16^0	19^0	21^0	$21{,}5^0$	23^0	25^0

Таблицаны колдонуп 12 сааттын ичиндеги температуранын өзгөрүшүнө мүнөздөмө бере алабыз, бирок убакыттын жана температуранын ортосундагы байланыштын эрежеси так аныкталбагандыктан каалаган убакыттагы температуранын маанисин алдын ала айтууга мүмкүн эмес.

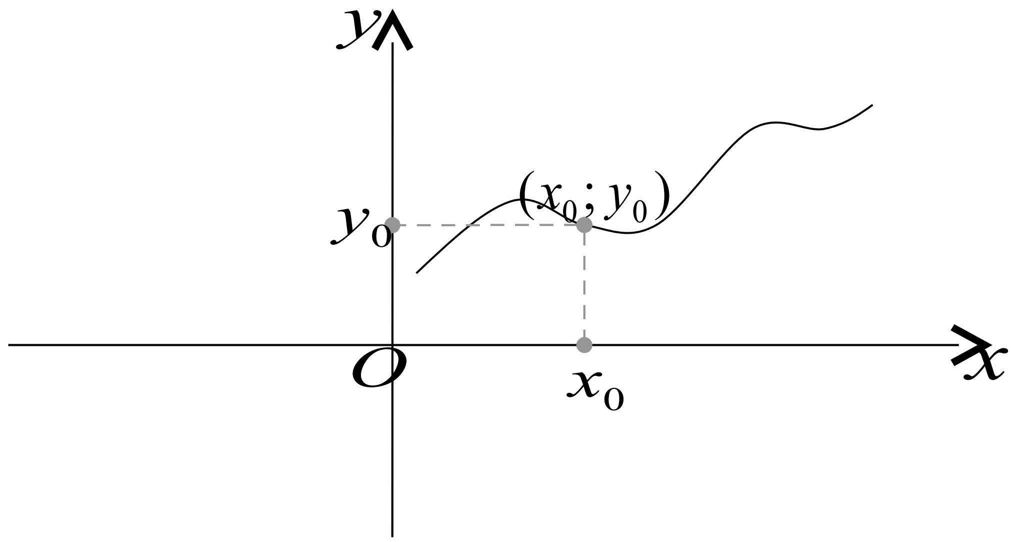
3. Биринчи сан аргументтин, экинчи сан функциясынын мааниси болгон (x_0, y_0) түгөйүн түзөлү.

$A = \{(x_0, y_0) : x_0 \in X, y_0 \in Y, y_0 = f(x_0)\}$ көптүгүн карайлы. Бул көптүк тик бурчтуу координаталар системасында кандайдыр бир ийрини аныктайт.

А н ы к т а м а. A көптүгү аныктаган ийрини функциянын графиги деп атайбыз.

Кээ бир процесстерди изилдөөдө өзгөрүлмө чоңдуктардын ортосундагы байланышты туюнтуучу ийри алынат.

Бул учурда функция графикалык жол менен берилди деп айтабыз.



Практикада функциянын графиги атайын куралдардын жардамында чийилет.

М и с а л ы. 1. Жердин катмарынын термелишин кагазга түшүрүүчү курал – сейсмограф деп аталат. Бул куралдын жардамында чийилген график аркылуу сейсмологдор жер титирөөлөрдүн борборун, убактысын жана алардын күчүн аныкташат.

2. Жүрөктүн иштөөсү – кардиограмма аркылуу аныкталат. Кардиограммада чийилген ийри боюнча врач, жүрөк кандай иштеп жаткандыгына мүнөздөмө берет.

Графикалык жолдо тиешелештик эреже көрсөтүлбөсө да аргумент жана функциянын ортосундагы көз карандылык көрсөтмөлүү, так жана даана көрүнөт. Аргументтин маанисине туура келүүчү функциянын маанисин болжолдуу таба алабыз.

4.5. Функциялардын айрым касиеттери.
Функциянын жуптугу жана тактыгы.

А н ы к т а м а. $x \in X$ жана $(-x) \in X$ болсо, анда X координата башталышына салыштырмалуу симметриялуу көптүк деп аталат.

$y = f(x),\ x \in X$ (симметриялуу) берилсин.

А н ы к т а м а. $f(-x) = -f(x)$ орун алса, анда $f(x)$ – так, $f(-x) = f(x)$ орун алса, анда $f(x)$ – жуп функция деп аталат.

М и с а л ы. 1. $f(x) = x^2,\ x \in [-5,5]$ берилсин. $[-5,5]$ – аралыгы симметриялуу.

$f(-x) = (-x)^2 = -x \cdot (-x) = x^2 = f(x)$. Демек $f(x) = x^2 -$ жуп функция.

2. $f(x) = x^3,\ x \in [-5,5]$ болсун.

$f(-x) = (-x)^3 = -x(-x)(-x) = -x^3 = -f(x)$. $f(x) = x^3 -$ так функция.

3. $f(x) = x^2,\ x \in [0,5]$ берилсе, бул функция жуп, так боло албайт. $[0,5]$ – аралыгы симметриялуу эмес.

4. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2},\ x \in [-10,10]$.

$f(-x) = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} = -f(x)$ болгондуктан берилген функция так функция болот.

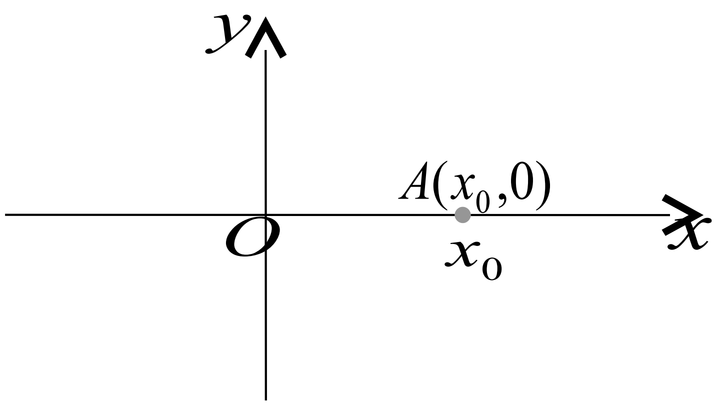
Бул мисалдардан көрүнүп тургандай функциянын жуптугун же тактыгын аныктоодо X көптүгүнүн симметриялуу болушу маанилүү.

Функциянын нөлдөрү жана функция оң, терс болгон аралыктар.

$y = f(x), x \in X$ берилсин.

А н ы к т а м а. $f(x) = 0$ барабардыгы аткарылган x тин маанилери функциянын нөлдөрү деп аталат.

$f(x_0) = 0$ болсун. $(x_0, 0)$ чекитин координаталык тегиздикте сүрөттөйлү



$(x_0,0)$ чекити абцисса огунда жатат. Демек функциянын нөлдөрү абцисса огунда жатуу менен, графиктин бул ок менен кесилишүү чекитин туюнтат.

М и с а л д а р. 1. $f(x) = 2x - 1$ функциясынын нөлдөрүн тапкыла.

$f(x) = 2x - 1 = 0$, мындан $x = \frac{1}{2}$.

2. $f(x) = x^2 - 3$ нөлдөрүн табалы.

$x^2 - 3 = 0$, $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$, $x - \sqrt{3} = 0$ же $x + \sqrt{3} = 0$. Мындан

$$x = \sqrt{3},\ x = -\sqrt{3}.$$

3. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ нөлдөрүн табалы.

$\frac{x^2 + 1}{x} = 0$, $x^2 + 1 = 0$ жана $x \neq 0$. $x^2 + 1 = 0$ барабардыгы x тин бир да чыныгы маанилеринде аткарылбайт. Демек берилген функциянын нөлдөрү жашабайт.

Каралган мисалдар көрсөтүп жаткандай функциянын бир, бир нече нөлдөрү жашап, нөлдөрү жашабай калышы да мүмкүн.

А н ы к т а м а. $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ барабарсыздыгын канааттандырган x тин маанилери функция оң (терс) болгон аралыктар деп аталат.

М и с а л ы. $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ функциясы оң, терс болгон аралыктарды табалы. Ал үчүн $2x^2 + 3x - 2 > 0$ жана $2x^2 + 3x - 2 < 0$ барабарсыздыктарынын бирин чыгаруу жетиштүү. $2x^2 + 3x - 2 > 0$ болсун. $2x^2 + 3x - 2$ – квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыраталы. $2x^2 + 3x - 2 = 0$ десек, мындан

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2(-2)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4},\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -2.$$

Ажыралма төмөндөгүдөй көрүнүштө болот.

$$2x^2+3x-2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2).$$

$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)>0$ болууга тийиш, демек

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}>0; \\ x+2>0, \end{cases} \text{ же } \begin{cases} x-\frac{1}{2}<0; \\ x+2<0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{1}{2}; \\ x>-2, \end{cases} \text{ же } \begin{cases} x<\frac{1}{2}; \\ x<-2. \end{cases}$$

Мындан $x>\frac{1}{2}$ же $x<-2$. Натыйжада $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ көптүгүн-дө функция оң. $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ аралыгында терс. $-2, \frac{1}{2}$ сандары функциянын нөлдөрү болот.

Функциянын мезгилдүүлүгү.

$y=f(x),\ x\in X$ берилсин.

А н ы к т а м а. Каалаган $x\in X$ үчүн кандайдыр бир $T\neq 0$ саны жашап $f(x+T)=f(x)=f(x-T)$ аткарылса, анда $f(x)$ мезгилдүү функция, $T-$ мезгил деп аталат.

М и с а л ы. $f(x)=\{x\},\ x\in R$, берилсин. $\{x\}$ – жазуу, x санынын бөлчөк бөлүгү дегенди туюнтат.

Каалагандай $x_0\in R$ алалы. $x_0=[x_0]+\{x_0\}$ түрдө туюнтууга болот. $x_0+1=[x_0+1]+\{x_0\}=[x_0]+1+\{x_0\}$. Бул барабардыктарды салыштырсак, эки учурда тең $\{x_0\}=x_0-[x_0]$. Демек $f(x_0+1)=f(x_0)$, б.а. берилген функция мезгилдүү.

$f(x), T$ мезгилдүү болсо, анда $\pm kT,\ k\in Z$ сандары да берилген функциянын мезгили боло алат.

А н ы к т а м а. Оң мезгилдердин эң кичинеси негизги мезгил деп аталат.

Каралган мисалда негизги мезгил 1.

Монотондук функциялар.

$y=f(x),\ x\in X$ берилсин.

А н ы к т а м а. Каалагандай $x_1,x_2\in X$ жана $x_1<x_2$ үчүн:

1. $f(x_1)<f(x_2)$ аткарылса, $f(x)-$ өсүүчү;

2. $f(x_1) > f(x_2)$ болсо, $f(x)$ – кемүүчү;

3. $f(x_1) \le f(x_2)$ болсо, $f(x)$ – кемибөөчү;

4. $f(x_1) \ge f(x_2)$ болсо, $f(x)$ – өспөөчү деп аталат.

Аныктамадагы 1-4 функциялар жалпысынан монотондук деп аталышат.

М и с а л. 1. $f(x) = 2x^3 + 3$ берилсин. Бул функциянын аныкталуу областы $R = (-\infty, +\infty)$ болот. $x_1, x_2 \in R$ жана $x_1 < x_2$ болсун. Сандар үчүн барабарсыздыкты эске алсак $x_1^3 < x_2^3$. Бул барабарсыздыкты 2 ге көбөйтүп, 3 санын кошуудан барабарсыздык өзгөрбөйт. Демек

$$2x_1^3 + 3 < 2x_2^3 + 3.$$

Берилген функция R көптүгүндө өсүүчү.

2. $f(x) = x^2$, $x \in R$.

Эки учурду карайлы

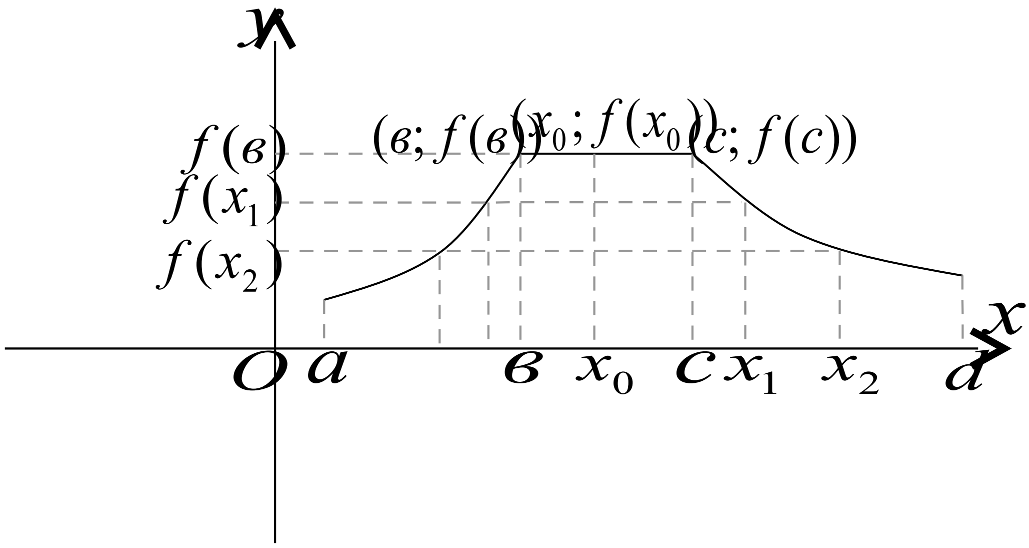
а) $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ жана $x_1 < x_2$ болсун. Мындай болгондо $|x_1| > |x_2|$ же $|x_1|^2 > |x_2|^2$. Мындан $x_1^2 > x_2^2$. $(-\infty, 0]$ аралыгында $f(x)$ – кемүүчү.

б) $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ жана $x_1 < x_2$ болсо, анда $x_1^2 < x_2^2$. $[0, +\infty)$ аралыгында $f(x)$ – өсүүчү.

$x = 0$ чекити өсүү жана кемүү аралыктары үчүн чек аралык чекит болуп эсептелет.

Функция монотондук болгон аралыктарды график боюнча да окууга болот.

М и с а л ы. $f(x)$ функциясынын графиги төмөндөгүдөй ийри аркылуу сүрөттөлсүн.



$f(в) = f(c) = f(x_0) = const$.

$f(x)$ функциясы $[a,d]$ аралыгында аныкталган. $[a,в]$ аралыгында өсүүчү, $[в,c]$ да турактуу жана $[c,d]$ да кемүүчү. Аныктама боюнча $f(x)$ функциясы $[a,d]$ аралыгында монотондук.

4.6. Тескери функция жөнүндө түшүнүк.

$y=f(x), x\in X, y\in У$ берилсин. Аныкталуу областы $У$ маанилеринин областы X болгон $x=\varphi(y)$ функция жашасын. f жана φ эрежелери өз ара тескери болсун.

А н ы к т а м а. $y=f(x)$ жана $x=\varphi(y)$ функциялары өз ара тескери функциялар деп аталат.

М и с а л ы. $y=x^2, x\in(-\infty,+\infty), y\in[0,+\infty)$ берилсин.

$x=\pm\sqrt{y}$ функциясын карайлы. Бул функциянын аныкталуу областы $[0,+\infty)$, ал эми маанилеринин областы $(-\infty,+\infty)$. Функцияларды аныктаган эрежелер өз ара тескери, демек аныктама боюнча $y=x^2$ жана $x=\pm\sqrt{y}$ өз ара тескери функциялар.

Бул мисал көрсөтүп жаткандай берилген функция бир маанилүү болсо да, ага тескери болгон функция бир маанилүү болбой калышы мүмкүн.

Белгилей кетчү нерсе функциялардын аныкталуу жана манилеринин областарын салыштыруу аркылуу эле берилген функцияларды өз ара тескери деп атоого болбойт.

Өз ара тескери функцияларда f жана φ эрежелердин өз ара тескери болушу өтө маанилүү.

М и с а л ы. $y=x^2, x\in(-\infty,+\infty), y\in[0,+\infty)$ жана $x=\pm y, y\in[0,+\infty)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ функцияларын карайлы. Бул функциялардын аныкталуу жана маанилеринин областтары алмашып калганы менен алар өз ара тескери боло албайт. Функцияларды аныктаган эрежелер өз ара тескери эмес. Биринчи функцияны аныктаган эреже «Квадратка көтөрүү», экинчисинде «Түз пропорциялаш».

$y=f(x)$ функциясы берилсе, ар дайым эле f ке тескери болгон эрежени так айтууга боло бербейт.

М и с а л ы. $f(x)=x^3+x^2-3x+1$ берилсин. Бул учурда "f" эрежеси төмөндөгүдөй амалдардан турат:

1. x ти үчүнчү даражага көтөрүү, x ти квадратка көтөрүү жана келип чыккан сандарды кошуу (сумма).

2. x ти 3 санына көбөйтүү, суммадан бул санды кемитүү, алынган санга бирди кошуу.

"f" эрежесине тескери эрежени айтуу жеңил маселе эмес.

Практикада, берилген функцияга тескери функцияны ачык-айкын жаза албасак да, бул функциянын жашашын көрсөтүү жетишээрлик болот. Тескери функциянын жашашы жөнүндөгү маселеге биз кийинчерээк кайрылабыз.

4.7. Татаал функция

$y=f(x),\ x\in X,\ y\in У$ жана $x=\varphi(t),\ t\in T,\ x\in X$ функциялары берилсин. $y=f(\varphi(t)),\ t\in T,\ y\in T$ функциясын түзөлү.

А н ы к т а м а. $y=f(\varphi(t))$ – татаал функция деп аталат.

М и с а л ы. $y=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty),\ y\in[0,+\infty);\ \ x=t^2-1,\ \ t\in[1,+\infty),$ $x\in[0,+\infty)$ функциялары берилсин.

$y=\sqrt{t^2-1},\ t\in[1,+\infty),\ y\in[0,+\infty)$ татаал функция болот.

Аныктаманын негизинде төмөндөгүнү айта алабыз: Берилген функциянын аргументи башка өзгөрүлмөдөн көз каранды болсо, анда татаал функция берилди деп айтабыз.

Татаал функцияда бир нече эрежелер бири-бирине кабатталат (китептин барактары сыяктуу) жана бул эрежелер сөзсүз түрдө белгилүү тартипте аткарылат.

Жогоруда келтирилген мисалда «f квадраттык тамыр чыгаруу», «$\varphi - t$ ны квадратка көтөрүү жана андан бирди кемитүү». Берилген t үчүн y тин маанисин табууда φ эрежеси биринчи, андан кийин f эрежеси аткарылат.

Тескери жана татаал функциялар бизге белгилүү болгон функциялардын класстарын кеңейтет.

Көнүгүүлөр.

1. Учуп бара жаткан самолетко тиешелүү болгон турактуу жана өзгөрүлмө чоңдуктарды бөлүп көрсөткүлө.

2. Адамга тиешелүү болгон турактуу жана өзгөрүлмө чоңдуктар кайсылар?

3. Адамдардын ортосундагы мамилелерди чоңдуктар катары сүрөттөөгө болобу?

4. Өндүрүлүп чыгарылган товарлардын баасына таасир эткен чоңдуктарды атагыла.

5. Кыймылды мүнөздөгөн негизги чоңдуктар кайсылар?

Төмөндөгү көнүгүүлөрдө x жана y чондуктардын ортосундагы көз карандылык сөз түрүндө берилген. Аларды математикалык белгилер аркылуу туюнткула.

6. «x ти квадратка көтөр жана экиге көбөйт, көбөйтүндү-дөн бирди кемит».

7. 1. 6 – мисалда келип чыккан туюнтманы квадратка көтөр.

2. 6 – мисалдагы туюнтмадан квадраттык тамыр чыгар.

8. 1. «x тен бирди кемит жана кубдук тамыр чыгар»;

2. «x ти квадратка көтөр жана экини кемит»;

3. «келип чыккан туюнтмаларды кош».

9. 8 – мисалдагы 1 – туюнтманы 2 – туюнтмага бөл жана келип чыккан туюнтманы бөлчөк түрүндө туюнт.

Төмөндөгү мисалдарда эрежелерди, закондорду окугула:

10. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x} - 1,\ f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - x + 2}$.

11. $y = \left|x^2 - x - 1\right|,\ y = x^2 - 5|x| - 6$.

12. $u(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt[3]{t+1}} + t^2 - 2$.

Функциялардын аныкталуу областтарын тапкыла:

13. $y = 10x + 2,\ y = x^3 - 4x + 2,\ y = \frac{3x+1}{x-2}$.

14. $y = \frac{5}{4 - x^2},\ y = \frac{x}{(x-2)(1-x)},\ y = \sqrt{x - 7}$.

15. $y = \sqrt{(x^2 - 1)(x + 7)},\ y = \sqrt{(x+1)(3-x)(x+5)}$.

16. $y = \frac{1 + \sqrt{(x+8)(x-3)}}{\sqrt{(x+5)(x-6)}},\ y = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x+3)}}$.

17. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}},\ y = \frac{3 - \sqrt{x^3 - 4x}}{\sqrt{x^2 + x - 2)}}$.

18. $y = \sqrt{\frac{x-8}{x+10}},\ y = \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x - 8}}$.

Функциялардын нөлдөрүн жана оң, терс болгон аралыктарын тапкыла:

19. $y = \frac{4x+5}{3},\ y = \frac{2x^2 - 6}{5}$.

20. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6},\ y = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 3x - 4}$.

21. $y = 3x^2 - 6|x| + 3,\ y = x^2 + |x| - 1$.

22. $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $y = \sqrt{2x^2-3} + \dfrac{2}{\sqrt{2x^2-3}}$.

Төмөндөгү функциялар өсүүчү, кемүүчү болобу?

23. $y = x^2 + 1$, $y = 3x^2 - 1$. 24. $y = 2x + 3$, $y = -2x + 5$.

25. $y = \sqrt{x} + 3$, $y = -\sqrt{x} + 2$. 26. $y = x^2 - x - 2$, $y = x^2 - 2x - 8$.

Берилген функцияларга тескери функцияларды тапкыла:

27. $y = x - 3$, $y = -x + 1$. 28. $y = 2x + 5$, $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}$.

29. $y = x^2 - 1$, $y = 2x^2 + 1$. 30. $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x-1}$.

31. $y = \sqrt[3]{x} - 3$, $y = \sqrt[3]{x} + 5$.

Берилген функцияларды колдонуп, татаал функцияларды түзгүлө:

32. $y = \sqrt{x}$, $x = t^2 + 1$, $x = 3u^2 - 2u + 1$, $x = \dfrac{1}{v^2+1}$.

33. $y = x^2 - 1$, $x = \sqrt[3]{t-2}$, $x = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$, $x = \sqrt{\dfrac{v}{v-1}}$.

34. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x = \sqrt{t-2}$, $x = \dfrac{t^2-2t+3}{t^2-t+1}$.

Төмөндөгү маселелерде функцияны аныктаган формулаларды келтирип чыгаргыла:

35. Тик бурчтуктун бир жагы 5 см экинчиси x см болсо, анын аянтын тапкыла.

36. Тик бурчтуктун диагоналы 10 см жана бир жагы x болсо, экинчи жагын тапкыла.

37. Тик бурчтуу үч бурчтуктун периметри 15 см, бир катети x болсун. Экинчи катетин жана аянтын тап.

38. Үч бурчтуктун эки жагы 10 см, 12 см жана үчүнчү жагы x болсун. x жагына жүргүзүлгөн бийиктиктин бул жак менен байланыш формуласын келтирип чыгаргыла.

39. Тең капталдуу үч бурчтуктун негизи 10 см каптал жагы x. Бул үч бурчтуктун аянтын тап. x тин кандай маанилеринде аянт 4 см^2, 5 см^2, 10 см^2 болот?

40. A жана B пунктарынан бири-бирине карата ылдамдыктары v_1, v_2 болгон автоунаалар бир мезгилде чыгышты. Пункттардын ортосундагы аралык S болсо, эки автоунаанын ортосундагы аралыктын өзгөрүү формуласын тапкыла.

41. A айылдан B айылга карата жөө жүргүнчү чыкты. Убакыттын $[0,1]$ аралыгында анын ылдамдыгы $\sqrt{1}$, $(1,3]$ тө $\sqrt{2}$, $(3,5]$ те $\sqrt{3}$ болсо, анда убакыттын ар бир аралыгындагы өтүлгөн жолдун убакыттан көз карандылык формуласын жазгыла. Жалпы өтүлгөн жол канча?

42. Эгерде автоунаалардын биринин ылдамдыгы экинчисине караганда v га чоң болсо, анда алардын басып өткөн жолдорунун ортосундагы айырманы туюнткан формуланы жазгыла.

43. Бассейнди биринчи түтүк, экинчисине караганда беш саатка тез толтурат. Эки түтүк бирге иштесе бассейндин сууга толуу формуласын тапкыла.

44. Газ толтурулган идиштин ичиндеги басымдын, температурадан көз карандылык формуласын жазгыла.

45. Убакыттын баштапкы моментинде нерсенин ылдамдыгы v_0, ылдамдануу a болсо, ылдамдыктын өзгөрүү законун жазгыла.

5. Элементардык функциялар

5.1. Бүтүн рационалдык функция

А н ы к т а м а. $y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, көрүнүшүндөгү функцияны бүтүн рационалдык функция же n – даражалык көп мүчө деп атайбыз.

Бул формулада $a_n \neq 0, a_{n-1},..., a_1, a_0 \in R, n \in N$, x – өзгөрүлмө чоңдук – аргумент. $P_n(x)$ функциясын аныктаган формулада кошуу (кемитүү), көбөйтүү, натуралдык даражага көтөрүү амалдары гана катышкандыктан аныкталуу областы R болот.

Төмөндөгүдөй учурларды карайлы

1. $n = 1$ болсо $y = a_1 x + a_0$ алабыз, $a_1 \neq 0$. Алынган функция-сызыктуу деп аталат.

2. $n = 2$ болгондо $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ - квадраттык функцияны алабыз, мында $a_2 \neq 0$.

3. $n = 3$ десек $y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ - үчүнчү даражадагы көп мүчө алынат, $a_3 \neq 0$. Мында $a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 = 0$ болсо, $y = a_3 x^3$ функцияга ээ болобуз.

5.2. Бөлчөктүү рационалдык функция

$P_n(x)$ - n - даражалык, $Q_m(x)$ - m - даражалык көп мүчөлөр болушсун,

$$Q_m(x)=в_m x^m+в_{m-1}x^{m-1}+...+в_1 x+в_0,\ в_m\neq 0.$$

А н ы к т а м а. $y=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ көрүнүшүндөгү функция бөлчөктүү рационалдык функция деп аталат.

Аталган функциянын аныкталуу областы

$$X=\{x:Q_m(x)\neq 0,\ x\in R\}$$

көптүгү болот.

Төмөндөгүдөй учурларды карайлы:

1. $P_n(x)=a_0,\ Q_m(x)=в_1x+в_0$ болсун, анда функция $y=\dfrac{a_0}{в_1x+в_0}$ көрүнүшүндө болот. Мында $a_0=1,\ в_1=1,\ в_0=0$ болсо $y=\dfrac{1}{x}$ функцияга ээ болобуз.

2. $P_n(x)=a_1x+a_0\ (a_1\neq 0),\ Q_m(x)=в_1x+в_0$ болгондо $y=\dfrac{a_1x+a_0}{в_1x+в_0}$ болот.

5.3. Даражалык функция

А н ы к т а м а. $y=x^\mu,\ \mu\in R-$ даражалык функция деп аталат.

$\mu\in R$ болгондуктан төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн.

1. $\mu\in N$. Бул учур бүтүн рационалдык функциянын айрым учуру болуп эсептелет.

2. $\mu\in Z_-=\{...,-3,-2,-1\}-$ терс бүтүн сандар. $y=x^\mu$ функциясы терс даражалуу деп аталат. Бул функцияны $\mu=-n,\ n\in N$ белгилөөсүн киргизүү менен

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n},$$

көрүнүшүндө жаза алабыз. Алынган функция бөлчөктүү рационалдык функциянын айрым учуру болуп эсептелет.

3. $\mu=\dfrac{m}{n}$ бөлчөк болсун. Даражалык функция $y=x^{\frac{m}{n}}$ көрүнүшүндө болуп, бөлчөк көрсөткүчтүү деп аталат. $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$ болоорун эске алсак, функцияны $y=\sqrt[n]{x^m}$ көрүнүшүндө жаза алабыз. m бүтүн саны оң же терс болушу мүмкүн болгондуктан бул учурлардын ар бирин өз алдынча караган максатка ылайык болуп эсептелет.

$m\in Z$ жана $m>0$, болсо, $y=\sqrt[n]{x^m}$;

$m\in Z$ жана $m<0$, болсо, $y=\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n]{x^{-p}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^p}}$, $(m=-p)$, мында $p\in N$; көрүнүшүндө болот.

3 – учурдун жекече учурларын карайлы.

а) $m=1, n=2.\ y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ – бул функциянын аныкталуу областы $x\geq 0$ болот.

б) $m=1, n=3.\ y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ – бул функциянын аныкталуу областы $x\in R$.

4. $\mu\in J$ – иррационалдык сандардын көптүгү. Бул функциянын аныкталуу областы жалпы учурда оң чыныгы сандар болуп эсептелет. Терс чыныгы сандар үчүн иррационалдык даража аныкталбайт.

5.4. Көрсөткүчтүү функция

$a>0,\ a\neq 1$ шартын канааттандырган $a\in R$ берилсин.

А н ы к т а м а. $y=a^x$ көрсөткүчтүү функция деп аталат.

Оң сандын каалагандай чыныгы даражасын аныктоого мүмкүн болгондуктан бул функциянын аныкталуу областы R болот.

Каалаган $x\in R$ үчүн $a^x>0$ болгондуктан бул функциянын маанилеринин областы $(0,+\infty)$ болот.

Математикада негизи $e=2{,}7182818284590...$ саны болгон көрсөткүчтүү функцияга өзгөчө маани берилет, б.а. $y=e^x$. $e-$ иррационалдык сан экендиги далилденген. Бул санды биз кийинчерээк аныктайбыз.

5.5. Логарифмалык функция

$y=a^x$ функциясын карайлы. 5.4 пунктка ылайык бул функциянын маанилеринин областы R, аныкталуу областы $(0,+\infty)$.

R көптүгүнөн алынган каалагандай x_0 гө $(0,+\infty)$ көптүгү-нөн бир гана y_0 тиешелеш коюлат.

Бул сүйлөмдү каршысынан далилдейли. $x_1,x_2\in R$ жана $x_1\neq x_2$ болсун. $a^{x_1}=a^{x_2}$ деп эсептейли. Бул барабардыктын эки жагын тең a^{x_2} ге бөлөлү, анда $a^{x_1-x_2}=1$. Мындан $a^{x_1-x_2}=a^0$. Даражанын касиетин эске алсак, бул барабардыктан $x_1-x_2=0,\ x_1=x_2$ болоору келип чыгат. Бул шартка каршы. Демек айтылган сүйлөм туура.

Далилденген сүйлөм боюнча $(0,+\infty)$ көптүгүнөн алынган каалаган y_0 үчүн $(-\infty,+\infty)$ көптүгүнөн бир гана x_0 тиешелештикке коюлат. Мындайча айтканда $(0,+\infty)$ жана $(-\infty,+\infty)$ көптүктөрүнүн ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик орун алат. $y=a^x$ функциясы $(-\infty,+\infty)$ көптүгүн $(0,+\infty)$ көптүгүнө бир маанилүү чагылдырса, $(0,+\infty)$ көптүгүн $(-\infty,+\infty)$ көптүгүнө бир маанилүү чагылдыруучу $x=\varphi(y)$ функция жашайт жана бул функция $y=a^x$ функциясына тескери функция болот.

А н ы к т а м а. $y=a^x$ функциясына тескери функцияны логарифмалык функция деп атайбыз жана $x=\log_a y$ (y санынын a негизи боюнча логарифмасы деп окулат) түрдө белгилейбиз. x жана y тердин оордун алмаштырсак $y=\log_a x$ болуп калат.

А н ы к т а м а. $a=e$ болгондогу $y=\log_a x$ функциясын $y=\ln x$ түрүндө белгилеп, $\ln x$ ти «x санынын натуралдык логарифми» деп окуйбуз.

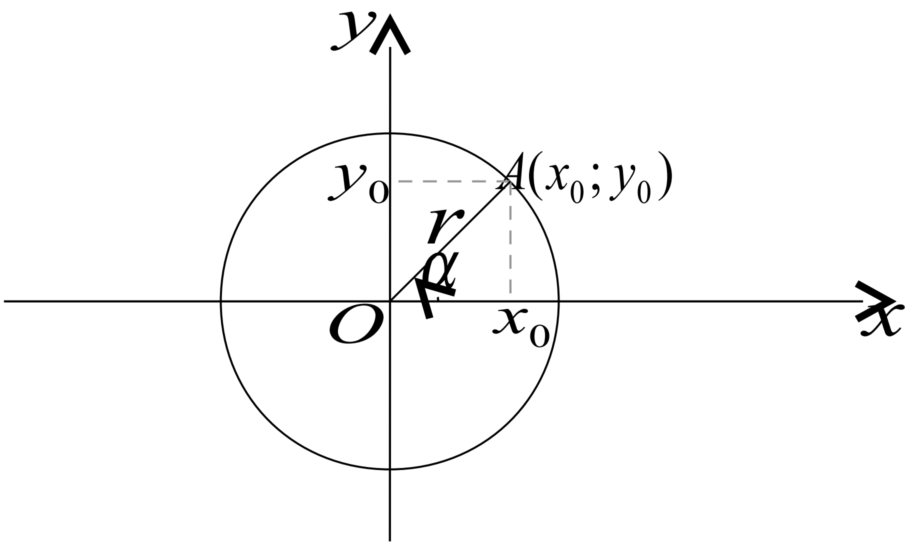
Бул функцияга тескери функция $y=e^x$ болот.

$a=10$ болсо $\log_{10} x=\lg x$ – x санынын ондук логарифмасы деп аталат.

Тригонометриялык функцияларды аныктоо

5.6. Бурчтун синусу, косинусу.

xOy тик бурчтуу координаталар системасында радиусу r болгон айлананы чийели жана андан каалагандай A чекитин алалы.



A жана O чекиттерин туташтырсак $OA=r$ радиусуна ээ болобуз.

А н ы к т а м а. OA радиусунун Ox огу менен саат жебесинин багытына карама-каршы багытта түзгөн бурчу оң бурч деп аталат.

OA нын x огу менен түзгөн бурчу α болсун. $A(x_0; y_0)$ деп белгилейли. A айлана боюнча кыймылда болгондо чекиттин координаталары, α бурчунун чоңдугу өзгөрөт.

Эгерде бурчту көз каранды эмес өзгөрүлмө түрүндө кабыл алсак, анда чекиттин координаталарынын өзгөрүшү бурчтан көз каранды болуп калат. Бул көз карандылыкты анализдеп көрөлү. Бурчтун каалаган манисине чекиттин бир гана абалы тиешелештике коюлат (координаталар кайталанышы мүмкүн). Функциянын аныктамасын эске алсак, чекиттин координаталары бурчтан функция болуп эсептелет.

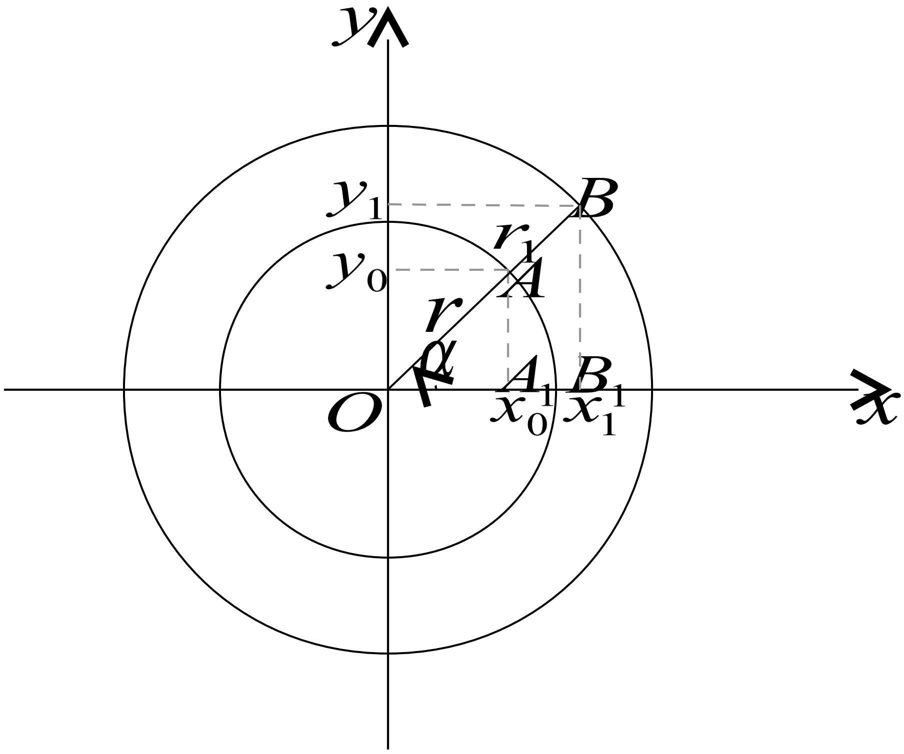
Төмөндөгүдөй аныктамаларды кабыл алалы.

А н ы к т а м а. $\dfrac{y_0}{r}$ катышын α бурчунун синусу деп атап $\sin\alpha$ түрүндө белгилейли.

А н ы к т а м а. $\dfrac{x_0}{r}$ катышын α бурчунун косинусу деп атап $\cos\alpha$ түрүндө белгилейли.

Бул аныктамалардын жардамында биз эки жаңы функцияга ээ болдук.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ функцияларынын аныкталышы айлананын радиусу r ден көз каранды болбой тургандыгын далилдейли. r_1 радиустагы айлананы алалы. α бурчун аныктайлы.



ΔOA_1A жана ΔOB_1B ларды карайлы. Бул үч бурчтуктар окшош болгондуктан

$$\frac{OA_1}{r}=\frac{OB_1}{r_1} \quad \text{же} \quad \frac{x_0}{r}=\frac{x_1}{r_1}=\cos\alpha ,$$

$$\frac{AA_1}{r}=\frac{BB_1}{r_1} \quad \text{же} \quad \frac{y_0}{r}=\frac{y_1}{r_1}=\sin\alpha .$$

Алынган барабардыктар айтылган сүйлөмдүн тууралыгын далилдейт.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ функцияларынын маанилери айлананын радиусунан көз каранды болбогондуктан $r=1$ деп алалы. Мындай болгондо аныктама боюнча бирдик айланада жаткан чекиттин ординатасы $\sin\alpha$, абциссасы $\cos\alpha$ ны аныктайт. Кийинки баяндоолорубузда айлананын радиусу ар дайым 1 ге барабар деп түшүнөбүз.

Салт болуп калган белгилөөлөргө өтсөк бул функциялар төмөндөгүдөй көрүнүштү алат

$$y=\sin x,\ y=\cos x .$$

Аныктама боюнча бул функциялардын ар биринин аныкталуу областы $(-\infty,+\infty)$, ал эми маанилеринин областы $[-1,1]$ аралыгы болот.

5.7. Бурчтун тангенси, котангенси

А н ы к т а м а. $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ барабардыгы аркылуу аныкталган функция x бурчунун тангенси деп аталып $y=tgx$ түрүндө белгиленет.

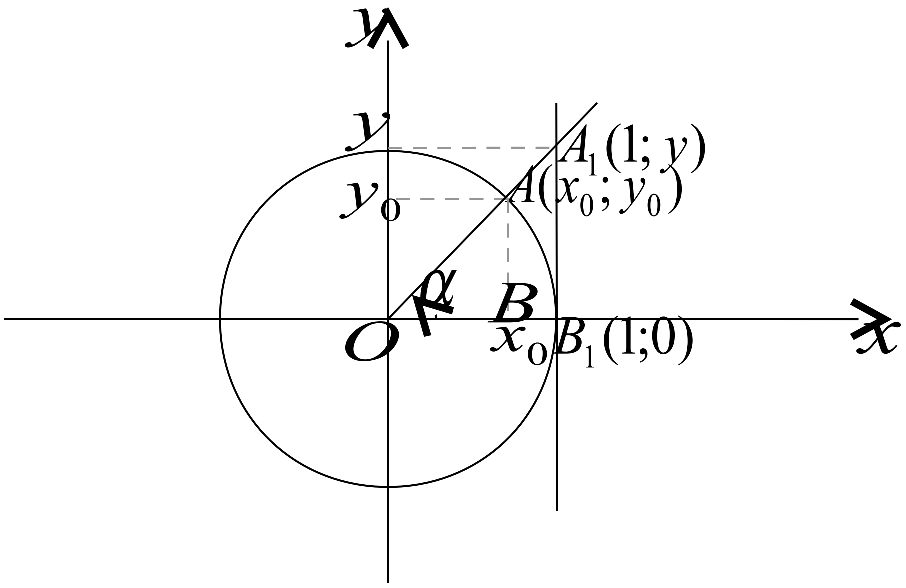
А н ы к т а м а. $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ барабардыгы аркылуу аныкталган функция x бурчунун котангенси деп аталып $y=ctgx$ түрүндө белгиленет.

Аныкталган функциялардын аныкталуу жана маанилеринин областтарын табалы. $y=tgx$ функциясын карайлы. Бул функциянын аныкталуу областы болуп болуп $\cos x\neq 0$ болгон x тин маанилери эсептелет. $\cos x$ функциянын аныктоосун эске алсак $\cos x=0$ болгон маанилерде аныкталган бурчтардын мааниси $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ болот. Демек tgx функциясынын аныкталуу областы болуп $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ маанилер эсептелет, б.а.

$$X = \left\{ x \in R : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\}.$$

Бул функциянын маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ болот.

Бул сүйлөмдү далилдейли. Төмөндөгүлөрдү аткаралы. Тик бурчтуу координаталар системасында борбору $O(0;0)$ чекитинде, радиусу 1 болгон айлананы алалы. $(1,0)$ чекити аркылуу өткөн Ox огуна перпедикуляр болгон түз сызык жүргүзөлү $((A_1B_1))$.



Айланадан $A(x_0;y_0)$ чекитин алалы. OA радиусунун Ox огунун оң багыты менен түзгөн бурчун α деп белгилейли. $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ болсун. $tg\alpha$ функциясынын аныктамасы боюнча

$$tg\alpha = \frac{y_0}{x_0}.$$

Экинчи жактан ΔOBA жана ΔOB_1A_1 окшоштугунан $\frac{y_0}{x_0} = \frac{y}{1} = y$ барабардыгына ээ болобуз. Демек

$$tg\alpha = y.$$

$\alpha = 0$ болгондо $y = 0$ жана α бурчунун мааниси $\frac{\pi}{2}$ ге жакын болсо y тин мааниси жетишээрлик чоң болот, б.а. каалаганчалык чоң маанини кабыл ала алат. $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ болгондо $y = tg\alpha$ функциянын маанилери $[0, +\infty)$ аралыгын толугу менен толтурат. $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$ болсо

$y = tg\alpha$ функциясынын маанилери $(-\infty, 0]$ аралыгын толугу менен толтурааары ушундай эле жол менен далилденет.

Демек $y = tg\alpha$ функциясынын маанилеринин көптүгү $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ болгондо, $(-\infty, +\infty)$ интервалы болот.

$tg\alpha$ функциясы π мезгилдүү болгондуктан $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ интервалдарынын ар биринде $(-\infty, +\infty)$ аралыгындагы маанилерди кайталап кабыл алат.

$y = ctgx$ функциясын карайлы. Бул функциянын аныкталуу областы $X = \{x; x \neq k\pi, k \in Z\}$ көптүгү, ал эми маанилеринин областы $(-\infty, +\infty)$ интервалы болот. Айтылган сүйлөмдүн тууралыгы жогорудагыдай эле жол менен далилденет.

5.8. Тескери тригонометриялык функциялар

1. $y = \sin x$ функциясын карайлы. Бул функциянын аныкталуу областы $X = (-\infty, +\infty)$ ал эми маанилеринин областы $У = [-1, 1]$ болот.

$У$ көптүгүнөн каалагандай y_0 санын алалы. X көптүгүнөн $y_0 = \sin x$ барабардыгын канааттандыруучу чексиз көп x тин маанилери жашайт. Демек $y = \sin x$ функциясына тескери функция жашап, бул функция чексиз көп маанилүү болот.

А н ы к т а м а. $y = \sin x$ функциясына тескери функцияны $x = \arcsin y$ (арксинус) түрүндө белгилейбиз.

$x = \arcsin y$ функциясы бир маанилүү болуш үчүн $У = [-1, 1]$, $X_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ көптүктөрүн кароо жетиштүү болот, мында $У$ – аныкталуу, X_0 - маанилердин областы болуп эсептелет.

2. $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ функциялары берилсин.

А н ы к т а м а. $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ функцияларына тескери болгон функцияларды тиешелеш түрдө $x = arc\cos y$ (арккосинус), $x = arctgy$ (арктангенс), $x = arcctgy$ (арккотангенс) деп белгилейбиз.

$x = arc\cos y$ функциясынын аныкталуу областы $У = [-1, 1]$, маанилеринин областы $X = (-\infty, +\infty)$; $x = arctgy$ тин аныкталуу областы $У = (-\infty, +\infty)$, маанилеринин областы $X = \left\{x : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\right\}$; $x = arcctgy$ тин аныкталуу областы $У = (-\infty, +\infty)$, маанилеринин областы $X = \{x : x \neq k\pi, k \in Z\}$ көптүк-төрү болушат.

5.9. Практикалык иштер.

5.9.1. Сызыктуу $(y = kx + в,\ k, в \in R)$ функциянын өсүү, кемүү аралыктарын тапкыла, графигин тургузгула.

5.9.2. Квадраттык $\left(y = ax^2 + вx + c,\ a, в, c \in R\right)$ функциянын графигин тургузгула, өсүү, кемүү аралыктарын көрсөткүлө.

5.9.3. $y = x^3,\ y = \dfrac{1}{x},\ y = \dfrac{1}{x^2},\ y = \dfrac{1}{x^3}$ функциялардын графиктерин тургузгула

5.9.4. Көрсөткүчтүү функциянын төмөндөгү касиеттерин далилдегиле $(y = a^x,\ a \neq 1,\ 0 < a)$.

1. $0 < a < 1$ болгондо $y = a^x$ функциясынын кемүүчү;
2. $1 < a$ болгондо $y = a^x$ тин өсүүчү болоорун;
3. $y = a^x$ функциясынын графигин тургузгула;
4. Төмөндөгү катыштардын тууралыгын далилдегиле:

$$a^r \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2};\ a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2};$$

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2};\ (aв)^r = a^r \cdot в^r;\ \left(\frac{a}{в}\right)^r = \frac{a^r}{в^r}.$$

5.9.5. $y = \log_a x -$ логарифмалык функциянын:

1. $0 < a < 1$ болгондо кемүүчү;
2. $1 < a$ болгондо өсүүчү болоорун далилдегиле;
3. Графигин тургузгула;

4. Төмөндөгү барабардыктарды далилдегиле:

$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1;$$

$$a^{\log_a в} = в,\ 10^{\lg в} = в,\ e^{\ln в} = в;$$

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2;$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x;\ \log_a в = \frac{\log_c в}{\log_c a};$$

$$\log_a в = \log_{a^к} в^k\ \ (k \neq 0).$$

5.9.6. Тригонометриялык функциялардын:

1. Жуптугун, тактыгын;
2. Өсүү, кемүү аралыктарын;
3. Мезгилдерин – тапкыла;
4. Графиктерин чийгиле.

5. Төмөндөгү формулаларды далилдегиле

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta; \qquad (5.1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta; \qquad (5.2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta; \qquad (5.3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta; \qquad (5.4)$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}; \qquad tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta};$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1; \qquad tgx \cdot ctg = 1;$$

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad \sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$

$$1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}; \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \qquad tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x};$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

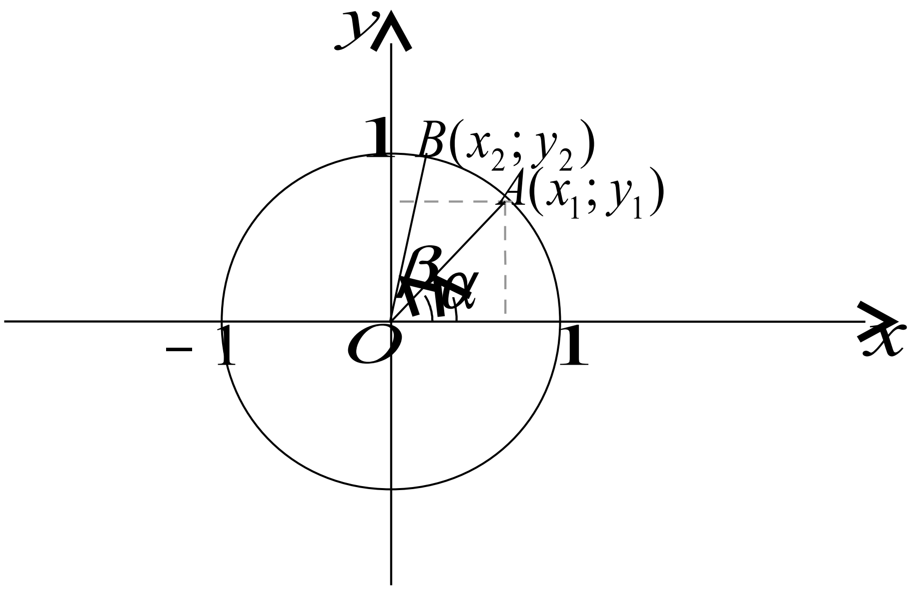
$$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}; \qquad tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2};$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2};$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}.$$

(5.1) формуланы далилдейли.



$\overline{OA}$ жана $\overline{OB}$ векторлорун түзөлү. $\overline{OA}$ нун Ox огу менен түзгөн бурчун α , $\overline{OB}$ нун түзгөн бурчун β дейли. $\overline{OA}$ жана $\overline{OB}$ нун скалярдык көбөйтүндүсүн алалы $\overline{OA}$ нун координаталары (x_1, y_1); $\overline{OB}$ нун координаталары (x_2, y_2) болгондуктан, $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$ болот. Экинчи жактан

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \left|\overline{OB}\right|\cdot\left|\overline{OC}\right|\cdot\cos\angle AOB = \cos(\beta-\alpha) = \cos(\alpha-\beta),$$

$$x_1 = \cos\alpha,\ y_1 = \sin\alpha,\ x_2 = \cos\beta,\ y_2 = \sin\beta\ .$$

Демек

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\ .$$

Э с к е р т ү ү. (5.2) формуланы далилдөөгө (5.1) де β ны $(-\beta)$ га алмаштыргыла.

(5.3) далилдөө үчүн $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right)$ формуласынан пайдаланууга болот.

(5.4) далилдөөдө (5.3) төгү β ны $(-\beta)$ га алмаштырабыз.

6. Теңдемелер

6.1. Теңдеменин аныктамасы. Аныкталуу областы.

А н ы к т а м а. $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ барабардыгы теңдеме деп аталат.

Бул барабардыкта $x_1, x_2, ..., x_n$ өзгөрүлмө чоңдуктар, F - бул өзгөрүлмөлөрдү өз ара байланыштырган эреже жана закондордун жыйындысы.

А н ы к т а м а. Теңдемеге катышкан өзгөрүлмө чоңдуктардын кабыл алууга мүмкүн болгон маанилеринин көптүгү теңдеменин аныкталуу областы деп аталат.

А н ы к т а м а. Эгерде теңдемеге бир гана өзгөрүлмө катышса, теңдеме бир өзгөрүлмөлүү (белгисиздүү), эки өзгөрүлмө катышса – эки өзгөрүлмөлүү ж.у.с. аталат.

М и с а л д а р. 1. $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 4$, $\frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0$, $2x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$.

2. 1 – мисалдагы теңдемелердин аныкталуу областтарын тапкыла.

$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$. Бул теңдемедеги x_1, x_2, x_3 өзгөрүлмө чоңдуктары бири-биринен көз карандысыз, каалагандай чыныгы маанилерди кабыл ала алат. Теңдеменин аныкталуу областын төмөндөгүдөй көптүк түрүндө жазууга болот.

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \in R,\ x_2 \in R,\ x_3 \in R\}.$$

$x_1^2 + x_2^2 = 4$ теңдемесинин аныкталуу областы

$$X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R,\ x_2 \in R\}$$

көптүгү болот.

$\frac{x_1 - x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0$ теңдемесин карайлы. Барабардыктын сол жагындагы туюнтма мааниге ээ болуш үчүн $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ болууга тийиш. Бул барабарсыздык $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ болгондо гана аткарылат. Демек берилген теңдеменин аныкталуу областы

$$X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R,\ x_2 \in R,\ x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\}$$

көптүгү болот.

3. 1 – мисалдагы теңдемелер канча өзгөрүлмөлүү болушат?

Биринчи теңдеме үч өзгөрүлмөлүү; экинчиси – эки өзгө-рүлмөлүү; үчүнчүсү – эки өзгөрүлмөлүү; төртүнчүсү – бир өзгөрүлмөлүү.

Кийинки баяндоолорубузда теңдеме бир же эки өзгөрүлмө-лүү болсо, анда бул теңдемеге катышкан өзгөрүлмөлөрдү x, y деп белгилейбиз.

6.2. Теңдеменин тамырлары.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ теңдемеси берилсин.

А н ы к т а м а. Теңдемени аныктаган барабардык туура болгон өзгөрүлмө чоңдуктардын маанилери теңдеменин тамырлары деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ теңдемеси берилсин. Бул барабардык x_1, x_2, x_3 чоңдуктардын баардык эле маанилеринде туура боло бербейт.

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -1$ болсун, анда $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - (-1) = 1 \neq 0$ болот. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ болсо, $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 0$. Аныктама боюнча $x_1 = 0,$ $x_2 = 0,$ $x_3 = 0$ маанилер тамыр болот.

Берилген теңдеменин канча тамыры жашайт?

x_1 жана x_2 өзгөрүлмөлөрүнө каалагандай маанилерди берели. Маселен $x_1 = 1, x_2 = 1$ болсун, анда $3 - 2 - x_3 = 0$ же $x_3 = 1$ болот. Демек $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$ маанилер теңдеменин тамырлары болуп эсептелет. Мындай жол менен теңдеменин чексиз көп тамырларын алууга болот.

2. $x_1^2 + x_2^2 = 4$ теңдемесин карайлы. Бул теңдеме тегиздиктеги тик бурчтуу координателер системасында борбору $(0;0)$ чекитинде, радиусу 2 ге барабар болгон айлананы аныктайт. Айланада жаткан каалаган чекит бул теңдемени канааттандырат. Демек берилген теңдеменин чексиз көп тамыры жашайт.

3. $x^2 - 3x + 2 = 0$ теңдеменин тамырларын табалы.

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}, \ x_1 = \frac{3+1}{2} = 2, \ x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Теңдеменин эки тамыры жашайт.

4. $x^2 + 5 = 0$ теңдемесинин чыныгы тамырларын табуу маселесин карайлы. Каалагандай $x \in R$ үчүн $x^2 \geq 0$ болот. Бул барабарсыздыктын эки жагына тең 5 санын кошуунун натыйжасында

$$x^2 + 5 \geq 5$$

барабарсыздыгына ээ болобуз. Демек каалаган $x \in R$ үчүн $x^2 + 5 \neq 0,$ анда берилген теңдеменин чыныгы тамыры жашабайт.

Жогорудагы мисалдар көрсөтүп жаткандай теңдемелердин тамырлары чексиз көп, чектүү санда же таптакыр жашабай калышы да мүмкүн.

6.3. Тең күчтөгү теңдемелер.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ теңдемеси берилсин. X - бул теңдеменин аныкталуу областы болсун.

А н ы к т а м а. $F(x_1, x_2, ..., x_n)$, $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ туюнтмаларынын аныкталуу областары дал келсе жана өзгөрүлмөлөрдүн бирдей маанилеринде бул туюнтмалардын маанилери барабар болсо, анда бул эки туюнтма теңдеш барабар деп аталат.

А н ы к т а м а. $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ барабардыгы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ туюнтмасынын аныкталуу областынан алынган өзгөрүлмөлөрдүн баардык маанилеринде туура болсо, анда бул барабардыкты теңдештик деп атайбыз.

А н ы к т а м а. Туюнтманы ага теңдеш барабар болгон туюнтма менен алмаштыруу теңдеш өзгөртүп түзүү деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $f(x) = x^2 - 2x,\ g(x) = 4x - 5$.

Бул туюнтмалардын аныкталуу областтары дал келет, $X = (-\infty, +\infty)$ болуп эсептелет.

$x = 1$ болсо, $f(1) = -1,\ g(1) = -1$, б.а. туюнтмалардын маанилери дал келет.

$x = 0$ болсо, $f(0) = 0,\ g(0) = -5$ маанилери дал келбейт. Демек аныктама боюнча бул эки туюнтма теңдеш барабар боло албайт

2. $f(x) = x^5,\ g(x) = x^2 \cdot x^3$;

$F_1(a, в, c) = a + в + 2c,\ F_2(a, в, c) = 2c + в + a$;

$F_1(a, в) = (2aв)^2,\ F_2(a, в) = 4a^2в^2$ туюнтмалары теңдеш барабар.

3. $a + в = в + a$; $\quad a \cdot (в \cdot c) = (a \cdot в) \cdot c$;

$a + 0 = a$; $\quad \dfrac{a}{в} = \dfrac{a \cdot c}{в \cdot c}\ (в \neq 0, c \neq 0)$;

$(a + в) \cdot c = ac + вc$; $\quad a \cdot 1 = a$; $\quad a \cdot в = в \cdot a$

барабардыктары теңдештикке мисалдар боло алышат. 5.9.2 бөлүкчөнүн 4 – тапшырмасындагы, 5.9.3. бөлүкчөнүн 5 – тапшырмасындагы формулалар да теңдештикке мисалдар боло алышат.

А н ы к т а м а. $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ жана $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ теңдемелеринин тамырлары дал келсе, анда бул теңдемелер тең күчтө деп аталышат.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ теңдемеси берилсин. Кандайдыр бир өзгөр-түп түзүүлөрдү аткаруу менен $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ теңдемеси алынсын жана бул эки теңдеменин тамырлары дал келсин, анда аныктама боюнча бул эки теңдеме тең күчтө болот.

Белгилей кетүүчү нерсе теңдемелерди тең күчтөгү теңдемелер менен алмаштыруудагы негизги максат, берилген теңдемени, тамырларын кандайдыр бир формулалар аркылуу табууга мүмкүн болгон, жөнөкөй теңдемелерге келтирүү эсептелет.

Теңдемелердин тамырларынын дал келишин текшерүү үчүн табылган тамырларды берилген теңдемеге коюп текшерүү жетиштүү болот.

Теңдемелерди тең күчтөгү теңдемелер менен алмаштырууда ар кандай теңдештиктер, математикалык закондор, эрежелер колдонулат. Эрежеге мисалдар келтирели.

1. Эгерде теңдемедеги кандайдыр бир кошулуучуну барабардыктын бир жагынан экинчи жагына, белгисин өзгөртүп алып өтсөк берилген теңдемеге тең күчтөгү теңдеме келип чыгат.

2. Теңдеменин эки жагын тең нөлдөн айырмалуу санга көбөйтсөк, анда тең күчтөгү теңдемеге ээ болобуз.

3. Теңдеменин бир жак бөлүгүнө кандайдыр бир туюнтманы кошсок жана кемитсек, анда тең күчтөгү теңдемени алабыз.

М и с а л д а р. 1. $\dfrac{x}{x+a} + \dfrac{2x}{x-a} = \dfrac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$ $(a \geq 0)$.

Бул теңдеменин аныкталуу областы болуп

$$X = \{x \in R,\ x \neq a,\ x \neq -a\}$$

көптүк эсептелет. Барабардыктын сол жагын төмөндөгүдөй өзгөртөлү

$$\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = x\left[\frac{1}{x+a} + \frac{2}{x-a}\right] = x \cdot \frac{x-a+2x+2a}{x^2-a^2} = \frac{x(3x+a)}{x^2-a^2}.$$

Демек

$$\frac{x(3x+a)}{x^2-a^2} = \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}.$$

Мындан

$$\frac{x(3x+a)}{x^2-a^2} - \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)} = 0 \quad \text{же} \quad \frac{1}{x^2-a^2}\left(3x^2 + ax - \frac{5}{4}a^2\right) = 0$$

ээ болобуз. $\dfrac{1}{x^2-a^2} \neq 0$ болгондуктан

$$3x^2 + ax - \frac{5}{4}a^2 = 0$$

болууга тийиш. Алынган квадраттык теңдеменин тамырларын табалы

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 15a^2}}{6} = \frac{-a \pm 4a}{6};$$

$$x_1 = \frac{-5a}{6},\ x_2 = +\frac{1}{2}a.$$

Табылган маанилер X көптүгүнө таандык, андыктан алар теңдеменин тамырлары болушат.

2. $2x^4 + x^3 + 4x^2 + 2 + x = 0$

Теңдемедеги туюнтманы төмөндөгүдөй өзгөртөлү

$$2x^4 + x^3 + 4x^2 + 2 + x = (2x^4 + 4x^2 + 2) + (x^3 + x) =$$

$$= 2(x^4 + 2x^2 + 1) + x(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) =$$

$$= (x^2 + 1)(2(x^2 + 1) + x) = (x^2 + 1)(2x^2 + x + 2).$$

Натыйжада

$$(x^2 + 1)(2x^2 + x + 2) = 0.$$

$x^2 + 1 > 0$ болгондуктан

$$2x^2 + x + 2 = 0$$

болууга тийиш. Алынган квадраттык теңдеменин тамырларын табалы

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7 - 16}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{4}.$$

Демек бул теңдеменин чыныгы тамырлары жашабайт, анда берилген теңдеменин да чыныгы тамырлары жашабайт.

6.4. Жөнөкөй теңдемелер

6.4.1. Сызыктуу теңдемелер

А н ы к т а м а. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$ эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу теңдеме деп аталат.

А н ы к т а м а. $a_1x_1 + a_0 = 0$ – бир өзгөрүлмөлүү сызыктуу теңдеме деп аталат, мында $a_1 \neq 0$.

Жалпы учурда эки же андан көп өзгөрүлмөлүү сызыктуу теңдемелердин чексиз көп чечимдери жашайт.

Бир өзгөрүлмөлүү теңдеменин бир гана чечими жашайт. Сызыктуу теңдемени

$$ax + в = 0$$

көрүнүшүндө жазалы, $a_1 \neq 0$. $в$ санын барабардыктын оң жагына өткөрөлү жана барабардыктын эки жагын a санына бөлөлү

$$ax + в = 0,\ ax = -в,\ x = -\frac{в}{a}.$$

$x = -\dfrac{в}{a}$ саны берилген теңдеменин чечими болот.

6.4.2. Квадраттык теңдемелер.

А н ы к т а м а. $ax^2 + вx + c = 0$ көрүнүшүндөгү теңдеме квадраттык деп аталат, мында $a \neq 0, в, c \in R$, $x -$ өзгөрүлмө чоңдук.

Бул теңдеменин тамырларын табуу үчүн төмөндөгүлөрдү аткаралы.

$$ax^2 + вx + c = a\left(x^2 + \frac{в}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{в}{2a}x + \frac{в}{4a^2} - \frac{в}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{в}{2a}\right)^2 - \left(\frac{в}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{в}{2a}\right)^2 - \frac{в^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Өзгөртүп түзүүлөрдүн натыйжасында теңдеме төмөндөгүдөй көрүнүштү алат.

$$\left(x + \frac{в}{2a}\right)^2 - \frac{в^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Мындан тамырларды табуу формуласын алабыз

$$\left(x + \frac{в}{2a}\right)^2 = \frac{в^2 - 4ac}{4a^2},\ x_{1,2} = -\frac{в}{2a} \pm \frac{\sqrt{в^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$$

Алынган формулада $Д = в^2 - 4ac$ туюнтмасы квадраттык теңдеменин дискриминанты деп аталат.

Формула көрсөтүп жаткандай $Д > 0$ болсо теңдеменин түр-дүү эки чыныгы тамыры; $Д = 0$ болсо, эки эселүү бир чыныгы тамыры; $Д < 0$ болгондо чыныгы тамыры жашабайт.

$a = 1$ болсо, квадраттык теңдеме келтирилген деп аталат. Бул теңдеменин тамырлары

$$x_{1,2} = -\frac{в}{2} \pm \sqrt{\frac{в^2}{4} - c}$$

формуласы боюнча табылат. Келтирилген квадраттык теңдеменин тамырлары үчүн төмөндөгүдөй теорема туура болот.

В и е т т и н т е о р е м а с ы. Келтирилген квадраттык теңдеме чыныгы тамырларга ээ болсо, анда алардын суммалары $(-в)$ га көбөйтүндүсү c га барабар.

Бул теореманы далилдөө үчүн тамырлардын формуласын колдонуп $x_1 + x_2$ жана $x_1 \cdot x_2$ ни табуу жетиштүү.

6.4.3. Биквадраттык теңдемелер

А н ы к т а м а. $ax^4 + вx^2 + c = 0$, $a \neq 0$ көрүнүшүндөгү теңдеме биквадраттык деп аталат.

$x^2 = y$ деп белгилейли, анда $ay^2 + вy + c = 0$ квадраттык тең-демеге ээ болобуз.

М и с а л д а р. 1. $x^4 + 4x^2 - 21 = 0$.

$x^2 = y$ дейли, анда $y^2 + 4y - 21 = 0$. Бул теңдеменин тамырларын табалы

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}, \; y_1 = 3, \; y_2 = -7.$$

Мындан $x_{1/2}^2 = 3$, $x_{3/4}^2 = -7$ ээ болобуз. Биринчи теңдемеден $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$, ал эми экинчи теңдеме чыныгы тамырга ээ болбойт.

2. $(x-3)^4 + 3(x-3)^2 - 28 = 0$ теңдемеси берилсин.

Бул теңдеме да биквадраттык теңдеме болуп эсептелет. $(x-3) = y$ деп белгилесек, $y^4 + 3y^2 - 28 = 0$ теңдемеге ээ болобуз. $y^2 = z$ деп белгилөө менен $z^2 + 3z - 28 = 0$ квадраттык теңдемени алабыз.

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2}, \; z_1 = 4, \; z_2 = -7.$$

Жогорудагы белгилөөлөрдү эске алсак

$$(x-3)^2 = 4, \; (x-3)^2 = -7.$$

Биринчи теңдемеден

$$(x-3)^2 = 4, \; x - 3 = \pm 2, \; x = 3 \pm 2 \quad \text{же} \quad x_1 = 5, \; x_2 = 1.$$

Экинчи теңдеменин чыныгы тамырлары жашабайт.

6.4.4. Рационалдык теңдемелер

А н ы к т а м а. $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ теңдемесиндеги $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ туюнтмасы рационалдык болсо, анда бул теңдеме рационалдык деп аталат.

Рационалдык теңдемелерди чыгаруу үчүн төмөндөгүдөй эрежелерди колдонсо болот.

1. Туюнтмага катышкан бардык бөлчөктөрдү бир бөлүмгө келтирүү (жалпы бөлүм).

2. Туюнтманы жалпы бөлүмгө көбөйтүү аркылуу, бүтүн теңдемени алуу (бөлчөктөр катышпайт).

3. Бүтүн теңдемени чыгаруу.

4. Табылган тамырлардын ичинен жалпы бөлүм нөлгө айланган тамырларды алып таштоо.

М и с а л д а р. 1. $\frac{2}{2-x}+\frac{1}{2}=\frac{4}{x(2-x)}$.

Бул теңдемеге катышкан бөлчөктөрдүн жалпы бөлүмү $2x(2-x)$ туюнтмасы болот. Жалпы бөлүмдү ар бир бөлчөккө көбөйтөлү

$$\frac{2\cdot 2x(2-x)}{2-x}+\frac{1\cdot 2x(2-x)}{2}=\frac{4\cdot 2x(2-x)}{x(2-x)}.$$

Бөлчөктөрдү кыскартуудан кийин төмөндөгүдөй теңдемеге ээ болобуз

$$4x+x(2-x)=8.$$

Мындан

$$4x+2x-x^2-8=0 \quad \text{же} \quad -x^2+6x-8=0.$$

Барабардыктын эки жагын тең (-1) ге көбөйтүп $x^2-6x+8=0$ келтирилген квадраттык теңдемени алабыз.

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1,\ x_1=4,\ x_2=2.$$

$x_2=2$ болгондо жалпы бөлүм нөлгө айланат, демек берилген теңдеменин тамыры $x=4$ болуп эсептелет.

2. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$.

Жалпы бөлүм – $a(a+x)(a+2x)$.

$$\frac{(a+x)(a+2x)}{a(a+x)(a+2x)}+\frac{a(a+2x)}{a(a+x)(a+2x)}+\frac{a(a+x)}{a(a+x)(a+2x)}=0$$

же

$$(a+x)(a+2x)+a(a+2x)+a(a+x)=0.$$

Кашааларды ачалы жана окшош мүчөлөрдү топтойлу

$$a^2+3ax+2x^2+a^2+2ax+a^2+ax=0,$$

$$2x^2+6ax+3a^2=0.$$

Алынган квадраттык теңдемени чыгаралы

$$x_{1,2}=\frac{-6a\pm\sqrt{36a^2-24a^2}}{4}=\frac{-6a\pm 2a\sqrt{3}}{4}=\frac{a(-3\pm\sqrt{3})}{2},$$

$$x_1=\frac{a(-3+\sqrt{3})}{2},\ x_2=-\frac{a(3+\sqrt{3})}{2}.$$

x тин бул маанилеринде жалпы бөлүм нөлгө айланбайт. Демек бул маанилер берилген теңдеменин тамырлары болуп эсептелишет.

6.4.5. Иррационалдык теңдемелер

А н ы к т а м а. Теңдемени аныктаган туюнтмаларда, белгисиздер тамыр белгисинин ичинде же белгисиздердин даражалары бөлчөк түрүндө болсо, анда мындай теңдемелер иррационалдык деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $\sqrt{x-2}=2x-1$. 2. $x^{\frac{1}{3}}-5=0$.

Ирационалдык теңдемелерди чыгаруунун төмөндөгүдөй жолдору бар.

1. Теңдеменин эки жагын тең бир эле даражага көтөрүү;
2. Жаңы өзгөрүлмөнү киргизүү.

М и с а л д а р. 1. $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2$.

Теңдеменин аныкталуу областы болуп

$$\begin{cases} y+2\geq 0, \\ y-6\geq 0, \end{cases}$$

барабарсыздыктарды канаттандыруучу y тин маанилери эсептелет. Барабарсыздыкты чыгаралы.

$$\begin{cases} y\geq -2, \\ y\geq 6, \end{cases} \quad y\geq 6.$$

Демек $X=[6,+\infty)$ көптүгү берилген теңдеменин аныкталуу областы болот. Берилген теңдемедеги $\sqrt{y-6}$ туюнтмасын барабардыктын оң жагына өткөрөлү жана эки жагын тең квадратка көтөрөлү

$$y+2=4+4\sqrt{y-6}+y-6.$$

Окшош мүчөлөрдү топтоштургандан кийин теңдеме төмөндөгү-дөй түргө келет

$$4=4\sqrt{y-6}.$$

Теңдеменин эки жагын тең 4 кө бөлөлү жана квадратка көтөрөлү

$$y-6=1,$$

мындан $y=7$. Бул маани теңдеменин аныкталуу областына кирет жана берилген теңдемени канааттандырат. Демек $y=7$ теңдеменин тамыры.

2. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

Теңдеменин аныкталуу областы $x^2-3x+5\geq 0$ барабарсыздыгын канааттандыруучу x тин маанилери болот. Квадраттык үч мүчө $x\in R$ үчүн нөлдөн чоң. Демек теңдеменин аныкталуу областы R болот.

Теңдемеде төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү аткаралы

$$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5=12,$$

$$\sqrt{x^2-3x+5}=y$$

деп белгилейли, анда $y+y^2=12$ же $y^2+y-12=0$, мындан

$$y_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+12}=-\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2},\ y_1=3,\ y_2=-4.$$

Бул маанилердин ичинен оң гана маанини алабыз, б.а.

$$\sqrt{x^2-3x+5}=3 \text{ же } x^2-3x-4=0,$$

мындан

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2},\ x_1=4,\ x_2=-1.$$

Берилген теңдеменин тамырлары $x_1=4,\ x_2=-1$ болот.

6.4.6. Көрсөткүчтүү теңдемелер.

А н ы к т а м а. Белгисиз чоңдуктар жалаң гана көрсөткүчтүү функциялар болгон теңдемелер көрсөткүчтүү деп аталат.

М и с а л ы. 1. $2^{3x^2+3}=2^{10x}$; 2. $\dfrac{(0{,}2)^{x-0{,}05}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^{x-1}$;

3. $4^x+2^{x+1}-24=0$.

Көрсөткүчтүү теңдемелерди чыгаруунун төмөндөгүдөй негизги эки методу бар.

1. Теңдемени $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ көрүнүшүнө келтирүү, мындан $f(x)=g(x)$ теңдемесин алуу.

2. Жаңы өзгөрүлмөнү киргизүү.

М и с а л д а р. 1. $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

Бул теңдемедеги көрсөткүчтүү функциялардын негизин 2 ге келтирели.

$$0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\frac{1}{8}\cdot 4^{2x-3}=2^{-3}\cdot 2^{2(2x-3)}=2^{4x-6-3}=2^{4x-9};$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}=\left(2^{-3}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-x}=\left(2^{-\frac{5}{2}}\right)^{-x}=2^{\frac{5}{2}x}.$$

Демек $2^{4x-9}=2^{\frac{5}{2}x}$, мындан

$$4x-9=\frac{5}{2}x,\ 4x-\frac{5}{2}x=9,\ \frac{3}{2}x=9,\ x=6.$$

2. $4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=0$.

Теңдеменин сол жак бөлүгүн төмөнөдөгүдөй өзгөртүп түзөлү.

$$4^{x-2}-17\cdot 2^{x-4}+1=2^{2x}\cdot 4^{-2}-17\cdot 2^{x}\cdot 2^{-4}+1=\frac{1}{16}\cdot 2^{2x}-\frac{17}{16}\cdot 2^{x}+1=$$

$$=\frac{2^{2x}-17\cdot 2^{x}+16}{16}=0.$$

Мындан

$$2^{2x}-17\cdot 2^{x}+16=0.$$

$2^x=y$ деп белгилейли, анда

$$y^2-17y+16=0 \text{ же } y_{1,2}=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\frac{289}{4}-16}=1\frac{17}{2}\pm\frac{15}{2},\; y_1=16,\; y_2=1.$$

$2^x=y$ болгондуктан

$$2^{x_1}=16,\; 2^{x_1}=2^4,\; x_1=4;\; 2^{x_2}=1,\; 2^{x_2}=2^0,\; x_2=0.$$

Теңдеменин тамырлары $x_1=4$, $x_2=0$ болот.

6.4.7. Логарифмалык теңдемелер

А н ы к т а м а. Белгисиз чоңдуктар жалаң гана логарифмалык функциялар болгон теңдемелер логарифмалык теңдемелер деп аталат.

Логарифмалык теңдемени чыгаруунун төмөндөгүдөй эки жолу бар:

1. Берилген теңдемени $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ түргө келтирүү жана $f(x)=g(x)$ теңдемесин чыгаруу.

$f(x)=g(x)$ теңдемесинин тамырларынын ичинен $f(x)>0$, $g(x)>0$, шартын канаатандырган тамырларды гана калтыруу.

2. Жаңы өзгөрүлмөнү киргизүү.

М и с а л д а р. 1. $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

Логарифмаларды 2 негизге келтирели

$$\log_{16}x=\frac{\log_2 x}{\log_2 16}=\frac{\log_2 x}{4};\; \log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{2}.$$

Төмөндөгүдөй теңдемеге ээ болобуз

$$\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7 \qquad \text{же} \qquad \frac{7}{4}\log_2 x=7$$

мындан

$$\log_2 x=4,\; \log_2 x=\log_2 16,\; x=16.$$

2. $\log_2^2 x+\log_2 x+1=\dfrac{7}{\log_2 0{,}5\cdot \tilde{o}}$.

$$\log_2 0{,}5\cdot x=\log_2 0{,}5+\log_2 x=-1+\log_2 x$$

болгондуктан берилген теңдемени

$$\log_2^2 x + \log_2 x + 1 = \frac{7}{\log_2 x - 1}$$

көрүнүшүндө жазууга болот. Бул теңдеменин аныкталуу областы болуп

$$\begin{cases} x > 0, \\ \log_2 x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

барабардыксыздыктарын канааттандыруучу x тин маанилери эсептелет. Барабарсыздыктарды чыгарсак

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Теңдемени чыгаруу үчүн $\log_2 x = y$ деп белгилейли, анда

$$y^2 + y + 1 = \frac{7}{y - 1}.$$

Мындан

$$(y-1)(y^2 + y + 1) = 7 \quad \text{же} \quad y^3 - 1 = 7,\ y^3 = 8,\ y = 2;\ \log_2 x = 2,\ x = 4.$$

Теңдеменин тамыры $x = 4$ болот.

6.4.8. Көрсөткүчтүү – логарифмалык теңдемелер

А н ы к т а м а. Белгисиз чоңдуктар катары көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялар катышкан теңдемелер көрсөт-күчтүү – логарифмалык деп аталышат.

Бул класстагы теңдемелерди чыгаруу үчүн теңдемени көрсөткүчтүү же логарифмалык теңдемелердин бирине келтирүү керек.

М и с а л д а р. 1. $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$ теңдемеси берилсин.

Бул теңдемеде $x > 0$ болгондуктан теңдеменин эки жагын тең 10 негиз боюнча логарифмалайлы.

$$\lg x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = \lg 10^{\lg x + 1},$$

мындан

$$\frac{1}{4}(\lg x + 7) \cdot \lg x = \lg x + 1$$

ээ болобуз, же

$$\frac{1}{4}\lg^2 x + \frac{7}{4}\lg x - \lg x - 1 = 0,\ \frac{1}{4}\lg^2 x + \frac{3}{4}\lg x - 1 = 0,$$

$\lg x = y$ деп белгилесек, анда

$$\frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y - 1 = 0$$

квадраттык теңдемени алабыз, же

$$y^2 + 3y - 4 = 0.$$

Демек

$$y_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{-3 \pm 5}{2}, \ y_1 = 1, \ y_2 = -4;$$

$$\lg x_1 = 1, \ x_1 = 10; \ \lg x_2 = -4, \ x_2 = 10^{-4}.$$

Берилген теңдеменин тамырлары $x_1 = 10, \ x_2 = 10^{-4}$ сандары болот.

2. $\lg(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1) - 1 = \lg(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2) - 2\lg 2$.

Теңдемени төмөндөгүдөй өзгөртөлү

$$\lg(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1) - \lg 10 = \lg(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2} + 2}) - \lg 4.$$

Логарифманын касиетин эске алсак

$$\lg\frac{4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1}{10} = \lg\frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{4}.$$

Мындан

$$\frac{4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1}{10} = \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{4}, \ 4(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1) = 10 \cdot (\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2),$$

$$2^{\sqrt{x}} - 4 = 10 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2} - 1} + 20, \ 2^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} - 24 = 0.$$

$2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = y$ деп белгилейли, анда

$$y^2 - 5y - 24 = 0, \ y_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 24} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{2}} = \frac{5 \pm 11}{2},$$

$$y_1 = 8, \ y_2 = -3.$$

$2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = y$ болгондуктан, $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = -3$ теңдемеси тамырга ээ болбойт. Берилген теңденин тамыры $x = 36$.

6.4.9. Жөнөкөй тригонометриялык теңдемелер.

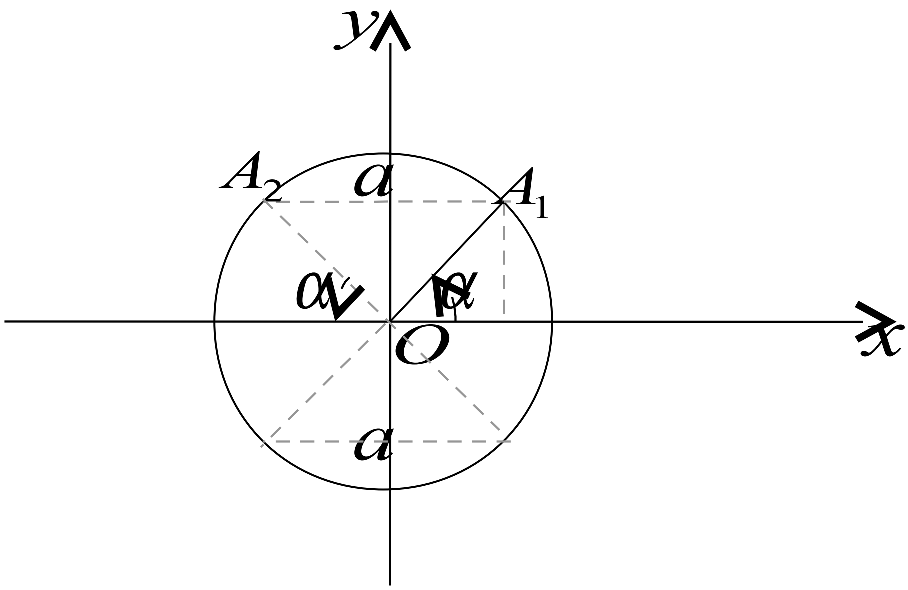
Бул класстагы теңдемелер төмөнкүлөр болуп эсептелет:

1. $\sin x = a, \ |a| \le 1;$ 2. $\cos x = a, \ |a| \le 1;$

3. $tgx = a \in R;$ 4. $ctgx = a \in R.$

Биринчи теңдемени карайлы. $|a| \le 1$ болушу $\sin x$ функциясынын аныктамасынан келип чыгат.

$\sin x = a$ теңдемесин чыгаруу үчүн борбору $(0;0)$ чекитинде болгон бирдик айлананы жана айланадан ординатасы a болгон чекитти алалы.



Мындай чекиттер ар дайым экөө болуп, алар y огуна салыштырмалуу симметриялуу болушат.

$\sin x = a$ барабардыгы канааттандырган x тин маанилери $x = \arcsin a$ жана $x = \pi - \arcsin a$ бурчтары болот.

$\sin x$ функциясы 2π мезгилдүү болгондуктан $2\pi k,\ k \in Z$ сандарды табылган бурчтарга кошуудан $\sin x$ функциясынын мааниси өзгөрбөйт. Демек чечимди жалпы учурда төмөндөгүдөй жазууга болот

$$x = \arcsin a + 2\pi k,\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k = -\arcsin a + (2k+1)\pi .$$

$(-1)^n$ туюнтмасын карайлы. $n = 2k$ болгондо $(-1)^{2n} = 1,\ n = 2k+1$ болгондо $(-1)^{2n} = -1$ болгондуктан табылган чечимдерди бир эле формула түрүндө төмөндөгүдөй жаза алабыз

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z .$$

Жыйынтыктап айтканда $\sin x = a$ теңдемесинин чечими жалпы учурда

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$$

түрүндө табылат.

$|a| > 1$ болгон учурда $\sin x = a$ теңдемесинин тамыры жашабайт. $\sin x$ функциясы, аныктама боюнча бирден чоң, (-1) ден кичине маанилерди кабыл албайт.

2. $\cos x = a$ теңдемесин карайлы, $|a| \le 1$. Бул теңдеменин чечими

$$x = \pm \arccos a + \pi n,\ n \in Z$$

формуласы боюнча табылат.

3. $tgx = a$ теңдемесинин чечими, $a \in R$, төмөндөгүдөй формула аркылуу табылат

$$x = arctga + \pi n,\ n \in Z .$$

Бул формуланы далилдөө үчүн 5.7 пунктка кайрылалы (тангенс функциясын аныктоо). Мында $tgx = a$ барабардыгы, a каалагандай чыныгы сан болгондо, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында бир гана $x = arctga$, мааниде аткарыла тургандыгы далилденген. Экинчиден бул мааниге $\pi n, n \in Z$ маанилерди кошуудан $tgx = a$ барабардыгы өзгөрбөйт. Демек берилген теңдеменин чечими

$$x = arctga + \pi n, \quad n \in Z$$

формуласы боюнча табылат.

4. $ctgx = a$ теңдемесинин тамыры

$$x = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$$

формуласы аркылуу табылат.

Белгилей кетүүчү нерсе, айрым учурларда төмөндөгүдөй формулаларды колдонуу ыңгайлуу болот.

1) $\sin x = 0, \ x = \pi n;$ 2) $\sin x = \pm 1, \ x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

3) $\cos x = 0, \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n;$ 4) $\cos x = 1, \ x = 2\pi n;$

5) $\cos x = -1, \ x = \pi + 2\pi n;$ 6) $tgx = 0, \ x = \pi n;$

7) $ctgx = 0, \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$.

6.4.10. Тригономериялык теңдемелер

А н ы к т а м а. Белгисиз чоңдуктар катары тригонометриялык функциялар катышкан теңдемелер тригонометриялык деп аталат

М и с а л ы. $\sin 5x + \cos x = 1, \ tg^2 x + tg^3 x - 2 = 0, \ \sqrt{\cos x} - \sin x = 1,$ $\frac{tgx}{\cos x} - ctgx + \sin 3x = 0$.

Тригонометриялык теңдемелерди чыгаруунун төмөндөгү-дөй жолдору бар:

1. Көбөйтүүчүлөргө ажыратуу;

2. Жаңы өзгөрүлмөнү киргизүү.

Тригонометриялык теңдемелерди чыгарууда аталган жолдордон башка да ар кандай жолдор колдонулат. Бул жолдорду колдонуудагы негизги максат, берилген теңдемени эң жөнөкөй тригонометриялык теңдемелердин бирине келтирүү болуп эсептелет.

М и с а л д а р. 1. $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$.

Теңдемеде төмөндөгүдөй өзгөртүүлөрдү аткаралы

$$\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x - 1 = 0,$$

$\sin 5x + \sin x$ туюнтмасын көбөйтүндүгө өзгөртүп түзөлү

$$\sin 5x + \sin x = 2\sin 3x \cdot \cos 2x .$$

$2\sin^2 x - 1 = (1 - \cos 2x) - 1 = -\cos 2x$ болгондуктан теңдеме төмөн-дө-гүдөй көрүнүштү алат

$$2\sin 3x \cdot \cos 2x - \cos 2x = 0,$$

мындан $\cos 2x(2\sin 3x - 1) = 0$ ээ болобуз. Бул теңдемеден

$$\cos 2x = 0 \quad \text{же} \quad 2\sin 3x - 1 = 0$$

теңдемелерди алабыз. Биринчи теңдеменин чечими

$$\cos 2x = 0,\ 2x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\pi n .$$

Экинчи теңдеменин чечими

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} n,\ n \in Z .$$

Демек берилген теңдеменин чечими

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n,\ x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} n,\ n \in Z$$

болот.

2. $2\cos^2 x + 14\cos x = 3\sin^2 x$ теңдемесин чыгаруу талап кылынсын.

Теңдемени чыгаруу үчүн төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүүлөр-дү аткаралы: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ болгондуктан,

$$2\cos^2 x + 14\cos x = 3 - 3\cos^2 x \qquad \text{же} \qquad 5\cos^2 x + 14\cos x - 3 = 0 .$$

$\cos x = y$ деп белгилесек

$$5y^2 + 14y - 3 = 0$$

теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдемени чыгарсак

$$y_1 = \frac{1}{5},\ y_2 = -3 .$$

Демек

$$\cos x = \frac{1}{5},\ \cos x = -3 .$$

Биринчи теңдеменин чечими

$$x = \pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in Z .$$

Экинчи теңдеменин чечими жашабайт $(|\cos x| \le 1!)$. Жыйынтыгында берилген теңдеменин чечими

$$x = \pm \arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in Z .$$

Тригонометриялык теңдемелерди чыгаруунун жогоруда аталган түрлөрүнөн башка жолдору да бар. Мындай жолдордун бири болгон универсалдык оордуна коюу деп аталган жолго токтололу.

$R(\sin x, \cos x) = 0$ теңдемеси берилсин. Мында $R(\sin x, \cos x)$ – $\sin x,\ \cos x$ ке карата рационалдык туюнтма.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}},$$

$x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$ болгондуктан

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}},\ \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}\right)$$

туюнтмага ээ болобуз. $tg\frac{x}{2} = y$ деп белгилесек $R\left(\frac{2y}{1 + y^2},\ \frac{1 - y^2}{1 + y^2}\right)$ – y ке карата рационалдык туюнтма келип чыгат. Демек берилген тригонометриялык теңдеме рационалдык теңдемеге келтирилди. Рационалдык теңдемелерди чыгаруунун жолдору менен биз жогоруда таанышканбыз. $tg\frac{x}{2} = y$ ордуна коюусу универсалдык деп аталат.

М и с а л. 1. $3\sin x + 4\cos x = 5$. $x = \pi + 2\pi n$ десек $-4 = 5$, б.а. $x = \pi + 2\pi n$ берилген теңдеменин тамыры болбойт. $\sin x, \cos x$ функцияларын $tg\frac{x}{2}$ аркылуу туюнтуп, $tg\frac{x}{2} = y$ деп белгилеп, төмөндөгүгө ээ болобуз

$$3 \cdot \frac{2y}{1 + y^2} + 4 \cdot \frac{1 - y^2}{1 + y^2} = 5.$$

Бул теңдемени чыгарсак $y = \frac{1}{3}$ болот. $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, мындан

$$\frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n,\ x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

6.4.11 Теңдемелерди чыгаруунун графиктик жолу.

$f(x) = 0$ теңдемеси берилсин.

$y = f(x)$ функциясын карайлы жана анын графигин тургузалы. График x огун $x_1, x_2, ..., x_n$ чекиттеринде кесип өтсүн. Бул чекиттердеги функциясынын маанилерин табалы

$$f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 0,\ ....,\ f(x_n) = 0.$$

Демек $x_1, x_2, ..., x_n$ сандары берилген теңдеменин тамырлары болот.

Тамырларды табуунун мындай жолун графикалык деп айтабыз.

Эгерде график x огун кесип өтпөсө, анда теңдеменин чыныгы тамырлары жашабайт.

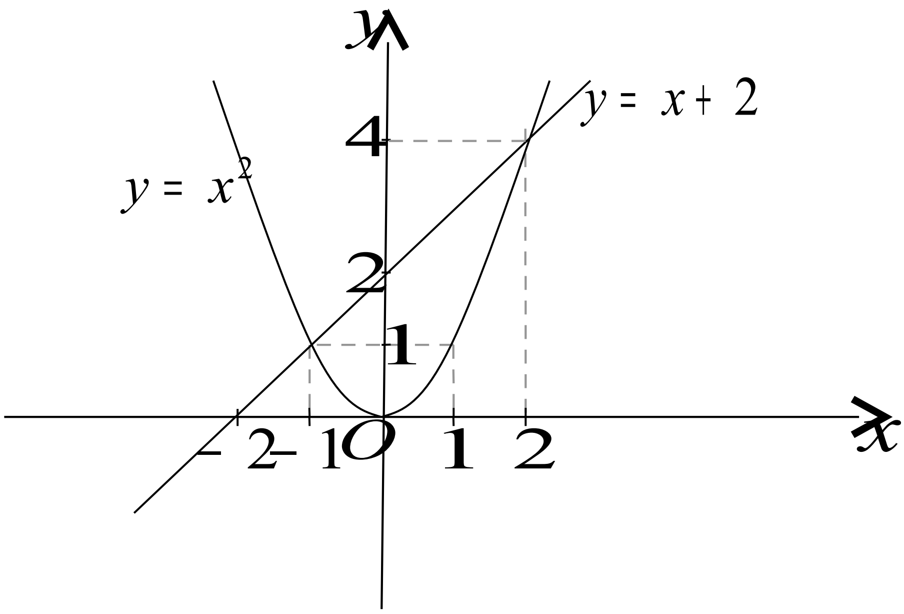
$f(x)$ функциясынын графигин тургузуу кыйынчылыктарды пайда кылса $f(x)=0$ теңдемесин $g(x)=h(x)$ түрүндө жазышат жана $y=g(x)$ жана $y=h(x)$ функцияларынын графиктери чийилет. Эки графиктин кесилиш чекиттеринин абциссалары берилген теңдеменин тамырлары болот.

М и с а л д а р. 1. $x^2-x-2=0$ теңдемесин графиктик жол менен чыгаралы.

Теңдемени

$$x^2=x+2$$

түрүндө жазалы жана $y=x^2$, $y=x+2$ функцияларынын графиктерин бир эле координаталык тегиздикте чийели

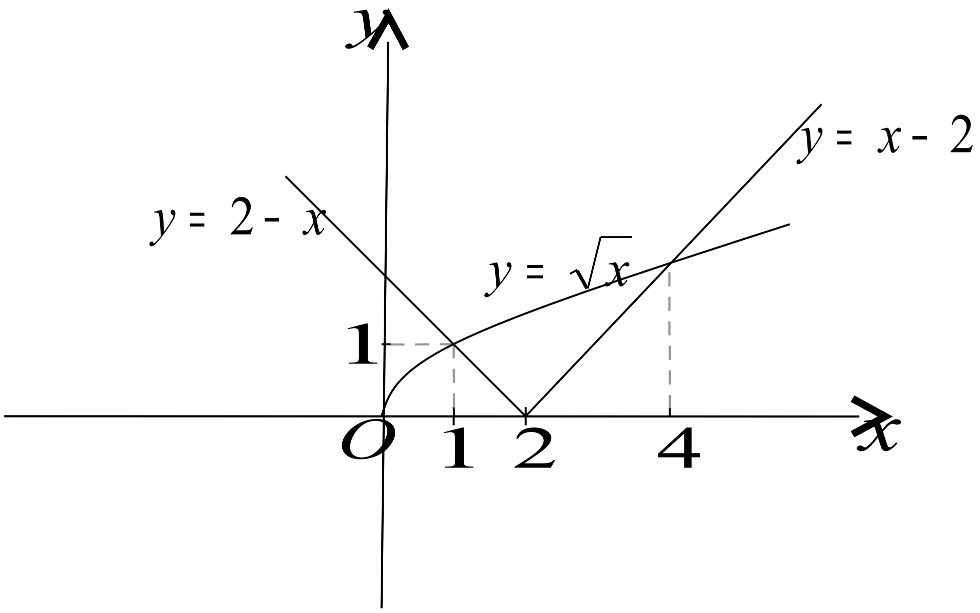


Функциялардын графиктери эки чекитте кесилишет. Бул чекиттердин абциссалары $x=-1$, $x=2$. Демек бул сандар берилген теңдеменин тамырлары болушат.

2. $\sqrt{x}=|x-2|$. $y=\sqrt{x}$, $y=|x-2|$ функцияларын карайлы. $y=\sqrt{x}$, функциясынын аныкталуу областы $x\geq 0$ болгон x тин маанилери болот. $\sqrt{x}=|x-2|$ функциясын модулдун аныктоосун эске алуу менен төмөндөгүдөй жаза алабыз

$$y=\begin{cases} x-2, & x\geq 2, \\ 2-x, & x<2. \end{cases}$$

Функциялардын графиктерин чийели.



Теңдемелердин тамырлары болуп $x = 1,\ x = 4$ сандары эсептелет.

7. Теңдемелердин системалары

7.1. Эки өзгөрүлмөлүү теңдеме

А н ы к т а м а. $f(x,y) = 0$ теңдемеси эки өзгөрүлмөлүү тең-деме деп аталат.

А н ы к т а м а. $(x_0; y_0)$ түгөйү $f(x,y) = 0$ барабардыгын ка-наат-тандырса, анда $(x_0; y_0)$ берилген теңдеменин тамыры деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $3x - y + 1 = 0$ теңдемесинин чечимдерин тапкыла.

$(0;1)$ түгөйү чечим болот, анткени $3 \cdot 0 - 1 + 1 = 0$;

$\left(-\frac{1}{3};0\right)$ чечим: $3 \cdot \left(-\frac{1}{3},0\right) - 0 + 1 = 0$;

$(-1;1)$ түгөйү чечим боло албайт, себеби дегенде

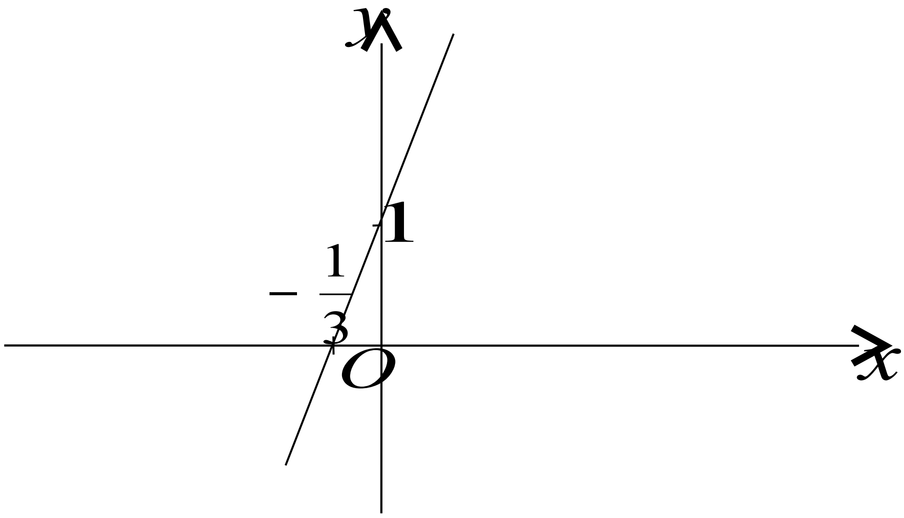
$$3 \cdot (-1) - 1 + 1 = -3 \neq 0.$$

Берилген теңдеменин чечимдерин табуу үчүн, теңдемеден y ти x аркылуу туюнталы

$$y = 3x + 1.$$

Бул барабардыкта x ке каалагандай маани берүү менен, ага тиешелеш болгон y тин маанисин табабыз жана $(x;y)$ түгөйүн түзөбүз. $(x;y)$ – теңдеменин тамыры болот. Мисалы $x = -2$ десек $y = -5$, $(-2;-5)$; $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$; ж.у.с. Мындай жол менен чексиз көп түгөйлөрдү түзө алабыз. Демек берилген теңдеменин чексиз көп чечими жашайт.

$y = 3x + 1$ функциянын графигин чийели



Функциянын графиги түз сызык болот. Түз сызыкты аныктаган чекиттердин координаталары теңдеменин тамырлары болуп эсептелет.

2. $x^2 + y^2 = 0$ теңдемесинин тамырларын тапкыла.

Каалагандай $x, y \in R$ үчүн $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$. Демек $x^2 + y^2 \geq 0$. Барабардык белгиси $x = 0$, $y = 0$ болгондо гана аткарылат. Анда берилген теңдеменин бир гана $(0;0)$ чечими жашайт.

3. $x^2 + y^2 = -1$ теңдемеси берилсин.

2 – мисалда көрсөтүлгөндөй $x, y \in R$ үчүн $x^2 + y^2 \geq 0 \neq -1$ болгондуктан, берилген теңдеменин чечими жашабайт.

Каралган мисалдар көрсөтүп жаткандай эки өзгөрүлмөлүү теңдемелер чексиз, чектүү же таптакыр чечимдери жашабай калышы да мүмкүн.

7.2. Эки өзгөрүлмөлүү теңдемелердин системалары

А н ы к т а м а. $f(x, y) = 0$ жана $g(x, y) = 0$ эки өзгөрмөлүү эки теңдеменин жалпы чечимин табуу маселеси каралса, анда бул теңдемелер система деп аталат.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

түрүндө белгиленет.

А н ы к т а м а. Теңдемелер системасынын чечими деп, берилген теңдемелердин ар бирин канааттандыруучу $(x_0; y_0)$ түгөйлөрдүн көптүгүн айтабыз.

А н ы к т а м а. Теңдемелер системасынын чечимдери дал келсе, анда алар тең күчтө деп аталат.

Теңдемелер системасынын чечимдерин табууда негизги ык болуп системаларды кандайдыр бир өзгөртүп түзүүлөр аркылуу тең күчтөгү, чыгарууга жөнөкөй теңдемелер системасына келтирүү эсептелет.

Теңдемелер системасын өзгөртүп түзүүдө төмөндөгүдөй эрежелерди колдонсо болот.

1. Теңдемелер системасында бир теңдемени өзгөртүүсүз калтырып, экинчисин тең күчтөгү теңдемеге алмаштыруудан тең күчтөгү система келип чыгат.

2. Теңдемелер системасында бир теңдемени өзгөртүүсүз калтырып, экинчисине биринчи теңдемени кандайдыр бир санга көбөйтүп (бөлүп) кошуудан тең күчтөгү системага ээ болобуз.

М и с а л д а р. 1. $\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ жана $\begin{cases} x=10+3y, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ системалары тең күчтө болот.

2. $\begin{cases} x-3y=10, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ жана $\begin{cases} (x-3y)+(3x-2y)=10+2, \\ 3x-2y=2 \end{cases}$ системалары тең күчтө болот.

3. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+y=0, \\ 2x^2+2y^2+x-3y-5=0. \end{cases}$

Системанын биринчи теңдемесин (-2) ге көбөйтүп экинчи теңдемеге кошолу. Келип чыккан система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+y=0, \\ (2x^2+2y^2+x-3y-5)-2(x^2+y^2-2x+y)=0 \end{cases}$$

берилген системага тең күчтө.

7.3. Эки өзгөрүлмөлүү теңдемелер системасын чыгаруунун методдору.

Төмөндөгүдөй методдорду колдонуу сунушталат

1. Ордуна коюу.

Бул методду колдонуудагы негизги этаптар төмндөгүдөй

а) Теңдемелердин биринен өзгөрүлмөнүн бирөөсү экинчиси аркылуу туюнтулат (маселен y ти x аркылуу).

б) Табылган өзгөрүлмөнүн маанисин экинчи теңдемеге коюу менен бир өзгөрүлмөлүү теңдеме алынат.

в) Бир өзгөрүлмөлүү теңдеменин тамырлары табылат.

г) Өзгөрүлмөлөрдүн бири экинчиси аркылуу туюнтулган туюнтмадан экинчи өзгөрүлмөнүн маанилери табылат.

М и с а л. $\begin{cases} x - 3y = 10, \\ x^2 - 24y = 100 \end{cases}$ системасын чыгаруу талап кылынсын.

Биринчи теңдемеден x ти y аркылуу туюнталы $x = 3y + 10.$ Табылган x тин маанисин экинчи теңдемеге коюу аркылуу

$$\begin{cases} x = 3y + 10, \\ (3y + 10)^2 - 24y = 100 \end{cases}$$

системага ээ болобуз. Мындан

$$\begin{cases} x = 3y + 10, \\ 9y^2 + 60y + 100 - 24y = 100 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x = 3y + 10, \\ 9y^2 + 36y = 0. \end{cases}$$

Экинчи теңдемеден y тин маанилерин тапсак

$$y_1 = 0,\ y_2 = -4.$$

Бул маанилерге тиешелеш болгон x тин манилерин биринчи теңдемеден табалы

$$x_1 = 10,\ x_2 = -2.$$

Натыйжада системанын чечимдери $(10;0), (-2;-4)$ болот.

2. Кошуу методу.

Бул методдун негизин 7.2 бөлүмдөгү эрежелер түзөт. Төмөндөгүдөй мисалдарды келтирели.

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$

Системанын экинчи теңдемесин 3 кө көбөйтөлү

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 9x - 3y = 48. \end{cases}$$

Биринчи теңдемени экинчисине кошолу

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 11x = 55. \end{cases}$$

Экинчи теңдемеден $x = 5$ маанисин табабыз. Бул маанини биринчи теңдемеге койсок $y = -1.$ Системанын чечими $(5;-1).$

3. Жаңы өзгөрүлмөнү киргизүү

Системанын бир теңдемеси же эки теңдемеси үчүн жаңы өзгөрүлмө киргизилет.

М и с а л д а р. 1. Системаны чыгаргыла:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$$

$\dfrac{x}{y}=z$ деп белгилесек биринчи теңдеме төмөндөгүдөй түргө ке-

лет

$$z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6}.$$

Мындан $z^2-\dfrac{13}{6}\cdot z+1=0$ теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеменин та-

мырлары

$$z_1=\frac{3}{2},\ z_2=\frac{2}{3}.$$

Табылган z тин маанилерин эске алсак

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ x+y=5 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}, \\ x+y=5 \end{cases}$$

системаларына ээ болобуз. Системалардын биринчи теңдемелеринен x терди таап, экинчи теңдемелерге коелу.

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ \dfrac{3}{2}y+y=5 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y, \\ \dfrac{2}{3}y+y=5. \end{cases}$$

Мындан

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}y, \\ y=2 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}y, \\ y=3 \end{cases}$$

же

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

Системанын чечимдери $(3;2)$, $(2;3)$ түгөйлөрү болушат.

2. Системаны чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32, \\ x\cdot y+2(x+y)=26. \end{cases}$$

Биринчи теңдемеге $2xy$ туюнтмасын кошолу жана кемители

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2-2xy+x+y=32, \\ x\cdot y+2(x+y)=26 \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=32, \\ x\cdot y+2(x+y)=26. \end{cases}$$

$x+y=u,\ x\cdot y=v$ деп белгилейли, анда

$$\begin{cases} u^2+u-2v=32, \\ 2u+v=26 \end{cases}$$

системасына ээ болобуз. Бул системаны ордуна коюу методу менен чыгаралы. Экинчи теңдемеден v ны табалы $v=26-2u.$ Табылган маанини биринчи теңдемеге коюп u га карата теңдемеге ээ болобуз

$$u^2+u-2(26-2u)=32.$$

Мындан

$$u^2+5u-84=0 \quad \text{же} \quad u_1=7,\ u_2=-12.$$

u ларга тиешелеш болгон v лардын маанилери $v=26-2u$ туюнтмасынан табылат, б.а.

$$v_1=12,\ v_2=50.$$

x жана y чоңдуктарына кайрылсак

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x\cdot y=12 \end{cases} \quad \text{жана} \quad \begin{cases} x+y=-12, \\ x\cdot y=50 \end{cases}$$

системаларына ээ болобуз. Бул системалардын ар бирин ордуна коюу жолу менен чыгаралы.

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x\cdot y=12, \end{cases} \quad \begin{cases} x=7-y, \\ (7-y)\cdot y=12, \end{cases} \quad \begin{cases} x=7-y, \\ -y^2+7y-12=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=7-y, \\ y_1=4, y_2=3. \end{cases}$$

Демек $x_1=3,\ x_2=4$. Системанын чечими $(3;4),\ (4;3)$.

$$\begin{cases} x+y=-12, \\ x\cdot y=50, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-12-y, \\ -y(12+y)=50, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-12-y, \\ -y^2-12y-50=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-12-y, \\ y^2+12y+50=0. \end{cases}$$

Экинчи теңдеме чыныгы тамырларга ээ болбойт, андыктан системанын да чыныгы тамырлары жашабайт.

Жыйынтыкта берилген системанын чечимдери болуп $(3;4),\ (4;3)$ түгөйлөрү эсептелет.

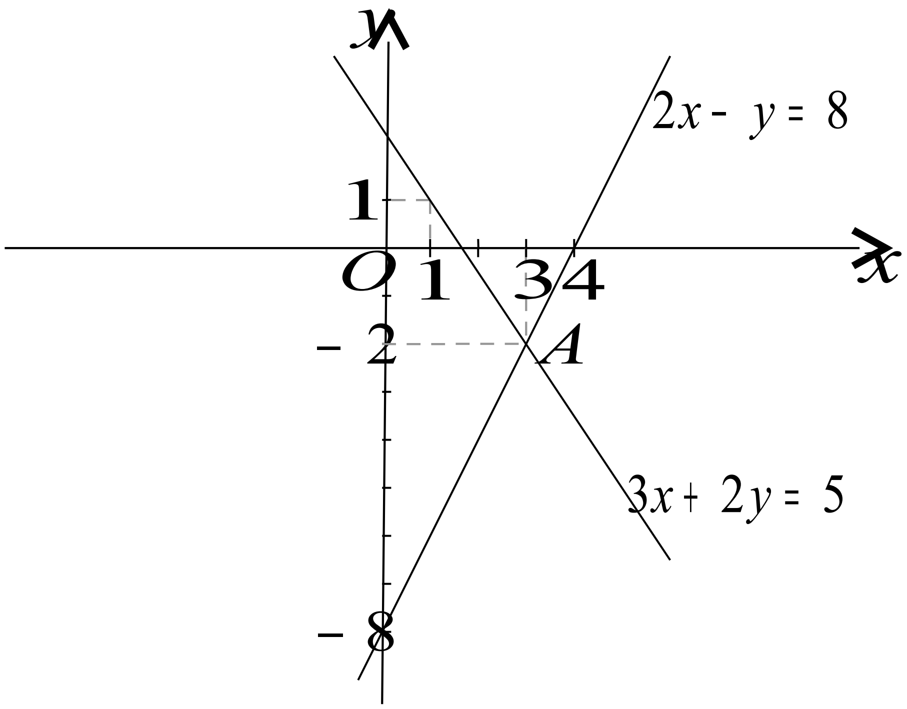
4.Системаны чыгаруунун графиктик жолу

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

системасы берилсин. Бул системаны графиктик жол менен чыгаруу үчүн $f(x,y)=0$ жана $g(x,y)=0$ теңдемелеринин графиктерин бир эле координаталык тегиздикте сүрөттөө керек. Графиктердин кесилиши чекиттеринин координаталары, системанын тамырлары болуп эсептелет.

М и с а л ы. 1. $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ системасын графиктик жол менен чыгаргыла.

Системадагы ар бир теңдеме түз сызыкты сүрөттөйт. Эки чекит аркылуу бир гана түз сызык жүргүзүүгө мүмкүн болгондуктан биринчи теңдеменин графигин $(1;1), (3;-2)$ чекиттери, экинчи теңдеменин графигин $(0;-8), (4;0)$ чекиттери аркылуу тургузалы



Графиктер $A(3;-2)$ чекитинде кесилишет, демек бул чекиттин координаталары берилген системанын чечими болот.

Көнүгүүлөр

1. Теңдемелер (жалпы учур)

1.1. Төмөндөгү теңдемелердин кайсылары рационалдык болот.

$x^2 - xy + y^2 = 3,\qquad \dfrac{x+y}{x-y} = -\dfrac{1}{2},\qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0,$

$\sin x + \sin y - \sqrt{2} = 0,\qquad \dfrac{ax^2 + вx + c}{a_1x^2 + в_1x + c_1} = 1,\qquad \sqrt{\dfrac{ax^2 + вx + c}{a_1x^2 + в_1x + c_1}} = 5.$

1.2. Теңдемелердин аныкталуу областтарын тапкыла.

$x - y + 1 = 0,\qquad \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3} = 2,\qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 = 0,$

$$\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x - 4} = 3, \qquad \sqrt{x + y - 1} = \frac{1}{2}, \qquad \sqrt{x^2 - xy + y^2} = \frac{2}{3},$$

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{\frac{20y}{x}}, \qquad \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = \sqrt{\frac{16x}{5y}}, \qquad \sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$

1.4. Теңдемелердин тамырларын тапкыла.

$$3x + 1 = x - 2, \qquad \frac{1}{2}x - 5 = 4x + 6, \qquad x^2 + y^2 = 25,$$

$$xy = 12, \qquad 3x + y = 5, \qquad 2x - y = 8,$$

$$x^2 - x + 1 = 0, \qquad 3x - 2x - 1 = 0, \qquad (x-3)^2 + (y-1)^2 = -1,$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \qquad x^2 + y^2 + x + y = 32, \qquad xy + 2(x+y) = 26.$$

2. Сызыктуу теңдемелер

2.1. Бир өзгөрүлмөлүү сызыктуу теңдемелер.

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{15} = 0, \qquad \frac{2}{3} + \frac{x}{4} + \frac{1-x}{6} = \frac{5x}{12} - 1,$$

$$-\frac{1}{2} + x - \frac{x - \frac{2}{3}}{3} = \frac{3}{4}x + 1, \qquad 1 - 2x - \frac{x}{5} = 3x - \frac{1}{4}.$$

2.2. Модул катышкан сызыктуу теңдемелер.

$$x + 3|x| = |x - 1|, \qquad |3x - 2| = 5, \qquad |2x - 8| = 3x + 1,$$

$$|x - 2| + |3 - x| = 0, \qquad x + 2\sqrt{(x-1)^2} = 3.$$

2.3. Эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу теңдемелер.

$$2x - y = 0, \qquad \frac{1}{2}x - 3y + 1 = 0, \qquad \frac{x - y}{x^2 + xy - y^2} = 0,$$

$$|x| - \frac{1}{2}y + 1 = 0, \qquad 2x - 3|y| + 1 = 0, \qquad x - \frac{2}{3}y = -\frac{1}{2}x + y - 5,$$

$$\frac{2x - y - \frac{1}{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0.$$

2.4. Теңдеме түзүүгө маселелер.

1) Тик бурчтуктун жактары x, y жана периметри a болсун. Бул чоңдуктарды байланыштырган формуланы жазгыла. $a = 1; \frac{3}{2}; 3, 5$ болсо x жана y тин маанилерин тапкыла

2) Эки жумушчу биригип бир ишти p саатта бүтүрөт. Жумушчулардын эмгек өндүрүмдүүлүгүн туюнткан формуланы жазып, $p = 1, 2, 3$ үчүн изилдегиле.

3) Экскурсия үчүн акча жыйноо талап кылынат. Ар бир экскурсант 75 тыйындан жыйнаса, анда чыгымга 4,4 сом жетпей калат, 80 тыйындан жыйнаса, 4,4 сом калат. Экскурсияга канча адам катышат?

4) Бир нече адам 72 сомдон төлөөгө тийиш. Эгерде алардын саны 3 кө кем болсо, анда алар 4 сомдон ашыкча төлөшөт. Канча адам болгон?

5) Китептин биринчи томунун 60 даанасы жана экинчи томунун 75 даанасы 405 сом турат. Биринчи томунун баасын 15% ке, экинчисин 10% төмөндөткөндө 355 сом 50 тый. төлөнөт. Ар бир томдун баасын тапкыла.

6) Дүкөн эки буюмду 225 сомго алып, кайрадан сатуудан 40% киреше алды. Эгерде биринчи буюмдан киреше 25%, экинчисинен 50% түшсө, ар бир буюмду дүкөн канчадан сатып алган?

7) Үч я¿икте биригип 64,2 кг кант болгон. Экинчи я¿икте биринчи я¿иктеги канттын $\frac{4}{5}$ бөлүгү үчүнчү я¿икте экинчи я¿иктеги канттын $42\frac{1}{2}\%$ бар. Ар бир я¿иктеги кантты тапкыла?

3. Квадраттык (биквадраттык) теңдемелер

3.1. Квадраттык теңдемелердин тамырларын тапкыла:

а) $x^2 + x + 6 = 0$; б) $0{,}2x^2 + 3x - 20 = 0$; в)$10x^2 + 5x - 5 = 0$;

г) $0{,}1x^2 + 0{,}4 = 0$; д) $9x^2 - 9x + 2 = 0$; е) $-2x^2 - x - 0{,}125 = 0$.

3.2. Виеттин теоремасы.

$x^2 + px + q$ квадраттык үч мүчөнүн тамырлары x_1 жана x_2 болсо, анда p, q сандарын тапкыла:

а) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$; б) $x_1 = -4,\ x_2 = 1$; в) $x_1 = -1,\ x_2 = -2$;

г) $x_1 = 5,\ x_2 = -3$.

3.3. Бөлчөктөрдү кыскарткыла:

а) $\dfrac{3x + 2}{3x^2 - 13x + 10}$; б) $\dfrac{4x + 4}{3x^2 + 2x - 1}$; в) $\dfrac{16 - в^2}{-в^2 + в + 12}$;

г) $\dfrac{-p^2 + 11p - 10}{p^2 - 8p - 20}$; д) $\dfrac{x^2 - 11x + 24}{x^2 - 64}$; е) $\dfrac{2y^2 + 9y - 5}{4y^2 - 1}$.

3.4. Теңдемелерди чыгаргыла:

а) $\dfrac{a^2 + x}{в^2 - x} = \dfrac{4aвв + 2a^2 - 2в^2}{в^4 - x^2}$; б) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a + x} + \dfrac{1}{a + 2x} = 0$;

в) $\dfrac{2x}{x + в} - \dfrac{x}{в - x} = \dfrac{в^2}{4(x^2 - в^2)}$; г) $1 - \dfrac{2a}{x - a} = \dfrac{в^2 - a^2}{a^2 + x^2 - 2ax}$;

д) $\dfrac{x^2}{ав-2в^2}=\dfrac{а-в}{ас^2-2вс^2}+\dfrac{x}{вс}$; е) $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{2x}{x-a}=\dfrac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$;

ж) $\dfrac{x^2+1}{n^2x-2n}-\dfrac{1}{2-nx}=\dfrac{x}{n}$; з) $\dfrac{a-x^2}{(a-x)^2}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1x}{a^3-ax(2a-x)}$;

и) $1-\dfrac{2в}{x-a}=\dfrac{a^2-в^2}{a^2+x^2-2ax}$; й) $\dfrac{a+x-2n}{2a-n}-\dfrac{a-2n}{x}=1$;

к) $\dfrac{1}{2n+nx}-\dfrac{1}{2x-x^2}=\dfrac{2(n+3)}{x^3-4x}$.

3.5. Биквадраттык теңдемелерди чыгаргыла:

а) $x^4-25x^2+144=0$; б) $x^4-5x^2-36=0$; в) $4x^4-5x^2+1=0$;

г) $9x^4-9x^2+2=0$; д) $x^4-4x^2+4=0$; е) $y^4-6y^2+8=0$.

3.6. Түрдүү мисалдар, маселелер.

а) $5x^2-kx+1=0$ теңдемесинин тамырларынын айырмасы бирге барабар болгондой k нын маанисин тапкыла.

б) $x^2-3ax+a^2=0$ теңдемесинин тамырлары $x_1^2+x_2^2=1{,}75$ болсо, a санын аныктагыла.

в) $ax^2+вx+c=0$ теңдеменин тамырлары x_1, x_2 болсун. Тамырлары $\dfrac{x_1}{x_2}, \dfrac{x_2}{x_1}$ боло турган квадраттык теңдеме түзгүлө.

г) $ax^2+вx+c=0$ теңдемеси берилсин. Тамырлары:

1. берилген теңдеменин тамырларынан эки эсе чоң болгон;

2. берилген теңдеменин тамырларына тескери болгон квадраттык теңдеме түзгүлө.

д) $6x^2+7x^2-16x+m=0$ теңдемесинин бир тамыры 2 болсо калган тамырларын тапкыла.

е) 2 жана 3 сандары $2x^2+mx^2-13x+n=0$ теңдеменин тамырлары болсо, m, n сандарын жана үчүнчү тамырды тапкыла.

ж) Тамырларынын квадраттарынын суммасы 50, көбөй-түндүсү 144 болгон биквадраттык теңдеме түзгүлө.

3.7. Теңдеме түзүүгө маселелер.

а) Мектептин бүтүрүүчүлөрү өз ара 870 сүрөт алмаштырышкан. Канча бүтүрүүчү болгон?

б) Үч сан берилген. Экинчи сан биринчисинен канчага чоң болсо, үчүнчү сан экинчисинен ошончого чоң. Сандардын эң кичинелеринин көбөйтүндүсү 85, эң чоңдорунун көбөйтүндүсү 115 болсо бул сандарды аныктагыла.

в) Темир жолдогу эки станциянын аралыгы 96 км. Биринчи поезд бул аралыкты, экинчисине караганда 40 мин тез өтөт. Биринчи поезддин ылдамдыгы экинчисине караганда 12 км/саатка чоң болсо поезддердин ылдамдыктарын тапкыла.

г) A жана B шаарларынан бир мезгилде эки жолоочу бири-бирине карай чыгышты. Биринчи жолоочу экинчисине караганда саатына 2 км жолду ашыкча өтүп, B шаарына 1 саат мурда келди. A жана B нын аралыгы 24 км болсо жолоочулардын ылдамдыктарын тапкыла.

д) Мастерскаялардын бири 810 костюм, экинчиси 900 костюмду бир эле мөөнөттө тигүүгө тийиш эле. Биринчиси заказды 3 күн, экинчиси 6 күн эрте бүтүштү. Эгерде экинчи мастерская биринчисине караганда күнүнө 4 костюмдан көп тиксе, ар бир мастерская күнүнө канчадан костюм тигет.

е) Эки пароход жолуккандан кийин бири түштүккө, экинчиси батышка жөнөдү. Эки сааттан кийин алардын ортосундагы аралык 60 км болду. Биринчи пароходдун ылдамдыгы 6 км/саатка көп болсо, ар бир пароходдун ылдамдыгын тапкыла.

ж) Эки кран биригип бассейнди 6 саатта толтурат. Биринчи кран, жалгыз бассейнди экинчисине караганда 5 саат эрте толтуруусу белгилүү. Ар бир кран өз алдынча бассейнди канча убакта толтурат?

з) Үч идиште суу бар. Биринчи идиштеги суунун $\frac{1}{3}$ бөлүгүн экинчи идишке куюп, экинчи идиштеги суунун $\frac{1}{4}$ бөлүгүн үчүнчү идишке куюп, үчүнчү идиштеги суунун $\frac{1}{10}$ бөлүгүн биринчи идишке куйгандан кийин ар бир идиште 9 л суу болуп калган. Ар бир идиште канча суу болгон?

и) Сыйымдуулугу 64 л болгон идиште толтура спирт болгон. Идиштеги спирттин кандайдыр бир бөлүгүн алып оордуна ошончо суу куюшту. Экинчи жолу, кошулмадан биринчи жолу алынгандай кошулманы алышкандан кийин идиште 49 л таза спирт калган. Ар бир жолу идиштен канча литрден спирт алынган?

й) Үч жумушчу бирдикте жумушту t саатта бүтүрүшөт. Биринчи жумушчу өзү жалгыз бул жумушту үчүнчүсүнө караганда эки эсе тез, экинчисине караганда бир саатка эрте бүтөт. Ар бир жумушчу өз алдынча жумушту канча убакта аткарат?

4. Логарифмалык, көрсөткүчтүү теңдемелер

1. $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$. 2. $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$.

3. $\log_a y + \log_a(y+5) + \log_a 0{,}02 = 0$. 4. $\dfrac{\lg(35 - x^3)}{\lg(5-x)} = 3$.

5. $1 + \lg x = \dfrac{1}{3}\lg\left[b - \dfrac{(3a-b)(a^2+ab)^{-1}}{b^{-2}}\right] - \dfrac{4}{3}\lg b + \dfrac{1}{3}\lg(a^3 - ab^2)$.

6. $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2{,}25 = (\log_x \sqrt{5})^2$.

7. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$. 8. $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \dfrac{3}{4}$.

9. $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{7x-3}$. 10. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

11. $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$. 12. $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.

13. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$. 14. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{\lg 4}{\lg 8}$.

15. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$. 16. $3\log_{xa^2} x + \dfrac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} = 2$.

17. $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$. 18. $\log_x(5x^2) \cdot \log_5^2 x = 1$.

19. $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$. 20. $4^{x-2} - 172^{x-4} + 1 = 0$.

21. $2 \cdot 4^{2x} - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$. 22. $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$.

23. $2(\lg 2 - 1) + \lg\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \lg\left(5^{1-\sqrt{x}} + 5\right)$.

24. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$. 25. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$.

5. Тригонометриялык теңдемелер.

1. $1 - \sin 5x = \left(\cos\dfrac{3x}{2} - \sin\dfrac{3x}{2}\right)^2$. 2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

3. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$. 4. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

5. $\sin(x - 60^\circ) = \cos(x + 30^\circ)$.

6. $\sin^2 x(tgx + 1) = 3\sin x(\cos x - \sin x) + 3$.

7. $\cos 4x = -2\cos^2 x$. 8. $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sin x}$.

9. $\sin 3x = \cos 2x$. 10. $\sin^4\dfrac{x}{3} + \cos^4\dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{8}$.

11. $3tg^2x+\sec^2 x=1$. 12. $3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0$.

13. $\cos^2 x+3\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x=1$.

14. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$. 15. $\sin x+\cos x=1$.

16. $\sin x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin 5x$. 17. $\cos x\cdot\sin 7x=\cos 3x\cdot\sin 5x$.

18. $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$. 19. $tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+tgx-2=0$.

20. $8tg^2\frac{x}{2}=1+\sec x$. 21. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos x}=\sec^2\frac{x}{2}-1$.

22. $\frac{1-tg\frac{x}{2}}{1-ctg\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}$. 23. $tgx+tg2x=tg3x$.

24. $1+\sin x+\cos x=2\cos\left(\frac{x}{2}-45^\circ\right)$.

25. $1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

26. $(1-tgx)(1+\sin 2x)=1+tgx$. 27. $\cos x+\sin x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$.

28. $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x$.

29. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{tg\frac{x}{2}+ctg\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}$.

30. $2\sqrt{2}\sin(45^\circ+x)=\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}$. 31. $\sin 3x=4\sin x\cdot\cos 2x$.

32. $\frac{tg2x\cdot tgx}{tg2x-tgx}-2\sin(45^\circ+x)\cdot\sin(45^\circ-x)=0$.

33. $tg(x+\alpha)+tg(x-\alpha)=2ctgx$.

34. $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=\frac{2}{tg\frac{x}{2}-tg\frac{x+\pi}{2}}$. 35. $\sin^4 x+\sin^4\left(\frac{x+\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

36. $tg(x-45^\circ)\cdot tgx\cdot tg(x+45^\circ)=\frac{4\cos^2 x}{tg\frac{x}{2}-ctg\frac{x}{2}}$.

37. $\frac{\sin(60^o+x)+\sin(60^o-x)}{2}=\frac{tgx}{(1+tg^2x)^2}+\frac{ctgx}{(1+ctg^2x)^2}$.

38. Эсептегиле:

$$2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+arcctg(-1)+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\arccos(-1).$$

39. $tg(\arccos x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ болоорун далилдегиле.

40. $tg(\arcsin x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ болоорун далилдегиле.

Төмөндөгүлөрдү эсептегиле

41. $\sin\left[\frac{1}{2}arcctg\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.

42. $\sin\left[\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$.

43. $ctg\left[\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right]$.

44. $tg\left(5arctg\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

45. $\sin\left(3arctg\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Теңдештиктерди далилдегиле

46. $arctg(3+2\sqrt{2})-arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

47. $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\arccos\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$.

48. $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$.

Теңдемелерди чыгаргыла

49. $arctg(x^2-3x-3)-\pi=0$.

50. $6\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\pi$.

51. $arctg(x+2)-arctg(x+1)=\dfrac{\pi}{4}$.

52. $2arctg\dfrac{1}{2}-arctgx=\dfrac{\pi}{4}$.

6. Теңдемелер системасы

1. $\begin{cases} x+y=3,\\ y^2-x=39.\end{cases}$

2. $\begin{cases} x-y=-1,\\ x+y^2=-1.\end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y=14,\\ y-x=8.\end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=4,\\ y+xy=6.\end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y=2,\\ x^2-y^2=8.\end{cases}$

6. $\begin{cases} x+y=-3,\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$

7. $\begin{cases} x-y=3,\\ x^3-y^3=9.\end{cases}$

8. $\begin{cases} x+y=2,\\ x^3+y^3=26.\end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=0,\\ x^2+y^2=20.\end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+xy-6y^2=0,\\ x^2-5xy+2y^2=-4.\end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3+y^3=65,\\ x^2y+xy^2=20.\end{cases}$

12. $\begin{cases} xy - x - y = 29, \\ x^2 + y^2 - x - y = 72. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^5 - y^5 = 3093, \\ x - y = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2), \\ x + y = 6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y^2 = 7, \\ x \cdot y^2 = 12. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2 - y = 23, \\ x^2y = 50. \end{cases}$

19. $\begin{cases} (x^2 - y^2)xy = 180, \\ x^2 - xy - y^2 = -11. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 35 = 0, \\ 5x^2 + 10y^2 - 5 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}xy, \\ x - y = \dfrac{1}{4}xy. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = 5\dfrac{1}{5}, \\ xy = 6. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + y - 2\sqrt{xy} = 4, \\ x + y = 10. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + вy + cz = d, \\ a^2x + в^2y + c^2z = d^2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 2y + 3z = 5, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61, \\ xy + xz + = 2yz. \end{cases}$

8. Барабарсыздыктар

8.1. Барабарсыздыктын аныктоосу, чечими.

$F(x_1, x_2 ..., x_n)$, $G(x_1, x_2 ..., x_n)$ туюнтамалары берилсин, мында $x_1, x_2 ..., x_n$ өзгөрүлмө чоңдуктар.

А н ы к т а м а. Эгерде туюнтмалар «≥», «≤», «>», «<» белгилери аркылуу бириктирилип жазылса, бул жазуу барабарсыздык деп аталат.

Мисалы $F(x_1, x_2 ..., x_n) \geq G(x_1, x_2 ..., x_n)$.

М и с а л д а р. $2x - 3 > 0$, $-x^2 + 1 - \frac{1}{2}x\frac{2}{3} \geq 0$, $x - y + 1 > 0$, $x + y + z - 5 \leq 0$, $x^2 - 4x + 1 \geq 0$, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$, $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, $\frac{x + y}{x - y + 1} \geq 0$.

А н ы к т а м а. Барабарсыздык туура болгон өзгөрүлмө чоңдуктардын маанилери барабарсыздыктын чечими деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $2x - 3 > 0$ берилсин.

$x = 0$ болсо, $2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$, демек $x = 0$ чечим боло албайт.

$x = 2$, анда $2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$, $x = 2$ чечим боло алат.

2. $x - y + 1 > 0$ берилсин.

$x = 0$, $y = 0$, б.а. $(0;0)$ түгөйүн алалы. x жана y тин ордуна бул маанилерди койсок $0 - 0 + 1 = 1 > 0$. Туура барабарсыздыкка ээ болдук, демек $(0;0)$ берилген барабарсыздыктын чечими болот. $(-1;-1)$ түгөйү барабарсыздыктын чечими боло албайт. $(1;-1)$ чечим болот.

3. $x^2 + y^2 \leq 0$ барабарсыздыгынын чечимдерин тапкыла.

Каалагандай $x \in R$, $y \in R$ үчүн $x^2 + y^2 \geq 0$ болгондуктан, берилген барабарсыздыктын бир гана $(0;0)$ чечими жашайт.

4. $x^2 + y^2 \leq -1$ берилсин. $x^2 + y^2 \geq 0$ болгондуктан барабарсыздыктын чечими жашабайт.

Каралган мисалдар көрсөтүп жаткандай барабарсыздыктардын бир нече, бир же таптакыр чечими жашабай калышы мүмкүн.

8.2. Барабарсыздыктардын тең күчтүүлүгү жана теңдеш өзгөртүп түзүү эрежелери.

А н ы к т а м а. Барабарсыздыктардын чечимдеринин көп-түктөрү дал келсе, анда алар тең күчтө деп аталышат.

Барабарсыздыктарды теңдеш өзгөртүп түзүүдө төмөндөгү-дөй эрежелер колдонулат.

1. Барабарсыздыктын бир бөлүгүнөн экинчи бөлүгүнө кошулуучуну карама-каршы белгиде алып өтүүдөн барабарсыздык өзгөрбөйт.

2. Барабарсыздыктын эки бөлүгүн бир эле оң санга көбөй--түүдөн же бөлүүдөн барабарсыздык өзгөрбөйт. Терс санга көбөйтүүдөн же бөлүүдөн барабарсыздыктын белгиси карама-каршыга өзгөрөт.

3. Барабарсыздыктын эки бөлүгүн оң гана маанилерди ала турган туюнтмага көбөйтүүдөн же бөлүүдөн барабарсыздык өзгөрбөйт.

Терс гана маанини алуучу туюнтмага көбөйтүүдөн же бөлүүдөн барабарсыздыктын белгиси карама-каршыга өзгөрөт.

Мисалдар. 1. $x^2+5x<6$ жана $x^2+5x-6<0$;

2. $x^2+y^2\le 2x-2y$ жана $x^2+y^2-2x+2y\le 0$;

3. $3x-y<3x+1$ жана $x-\frac{1}{3}y<x+\frac{1}{3}$;

4. $x^2-y^2\ge -3x^2+2y^2$ жана $-x^2+y^2\le 3x^2-2y^2$;

5. $x^2-2xy-y^2\le x^2+y^2+1$ жана $\frac{x^2-2xy-y}{x^2+y^2+1}\le 1$ тең күчтөгү барабарсыздыктар болушат.

8.3. Барабарсыздыктын айрым түрлөрү (жөнөкөй барабарсыздыктар) жана алардын чечимдерин табуунун жолдору.

8.3.1. Бир өзгөрүлмөлүү сызыктуу барабарсыздыктар: $ax>в$, $ax<в$, $ax\ge в$, $ax\le в$, мында $a\ne 0$, $в\in R$ сызыктуу барабарсыздыктарды чыгаруу үчүн барабарсыздыктын эки бөлүгүн тең a санына бөлүү жана a нын белгисине жараша барабарсыздыктын белгисин өзгөртүү керек.

$ax>в$, жана $a>0$, болсо, $x>\frac{в}{a}$;

$ax>в$, жана $a<0$, болсо, $x<\frac{в}{a}$.

Мисалдар. 1. $2x-1>-x+3$ берилсин.

Берилген барабарсыздык $2x+x>3+1$ барабарсыздыгына тең күчтө. Мындан

$$3x>4 \qquad \text{же} \qquad x>\frac{4}{3}.$$

2. $-x+2>2x+3$.

Теңдеш өзгөртүп түзүү аркылуу $-x-2x>3-2$ же $-3x>1$ ээ болобуз. Барабарсыздыктын эки бөлүгүн тең (–3) кө бөлсөк $x<-\frac{1}{3}$.

8.3.2. Эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу барабарсыздыктар:

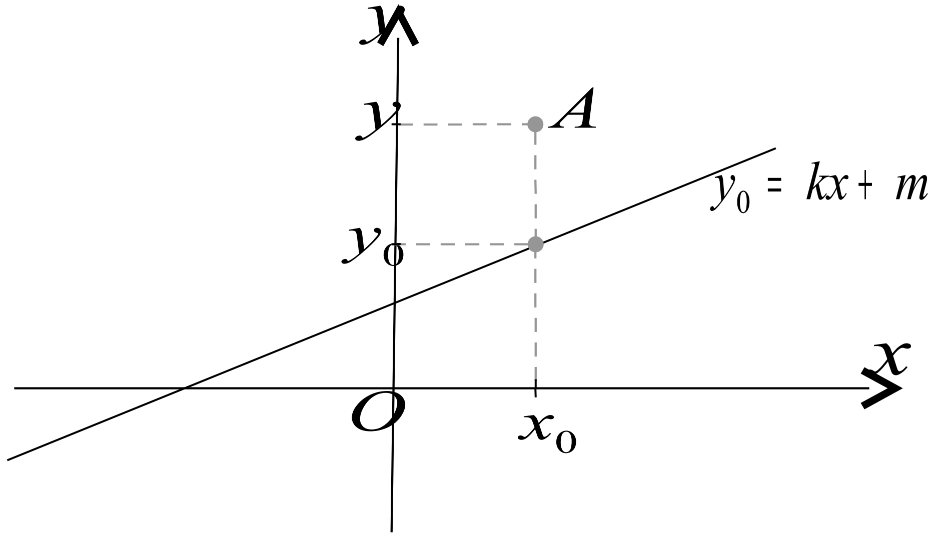
$ax+вy+c>0$, $ax+вy+c<0$, $ax+вy+c\ge 0$, $ax+вy+c\le 0$, мында $a,в,c\in R$.

Бул көрүнүштөгү барабарсыздыктарды чыгарууда төмөндөгүдөй жолду колдонуу ыңгайлуу болот. $ax+вy+c>0$ барабарсыздыгы берилсин жана $в>0, a\neq 0$ болсун. Барабарсыздыкта төмөндөгүдөй теңдеш өзгөртүп түзүүлөрдү аткаралы

$$вy>-ax-c,\ y>-\frac{a}{в}x-\frac{c}{в}.$$

$-\frac{a}{в}=k,\quad m=-\frac{c}{в}$ белгилөөлөрүн киргизели, анда барабарсыздык төмөндөгүдөй көрүнүштү алат $y>kx+m$.

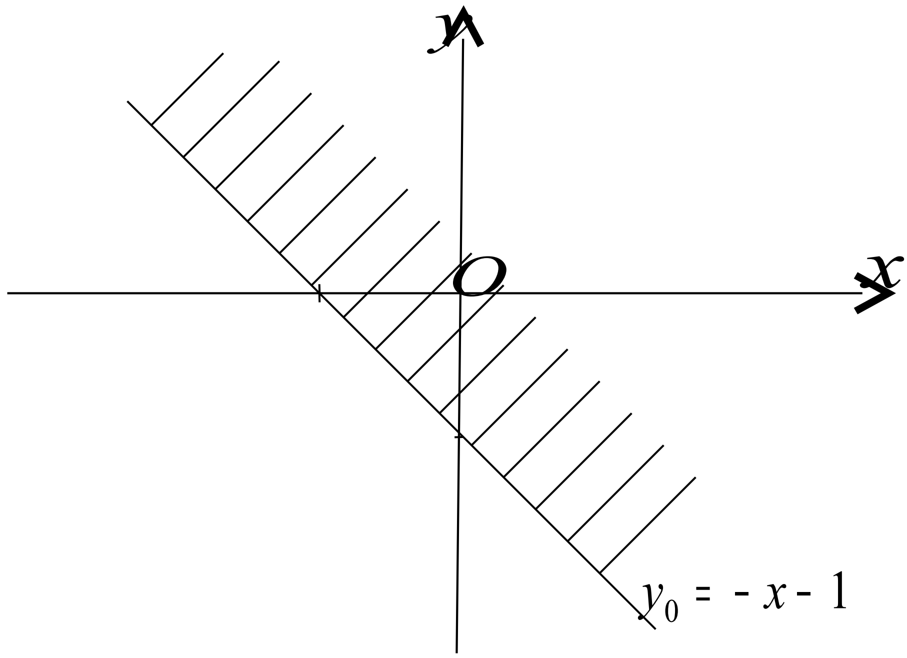
$y_0=kx+m$ функциясын карайлы. Бул функциянын графиги түз сызык болоору белгилүү



$x=x_0$ болгондо $y_0=kx_0+m$ болот. $(x_0;y_0)$ – чекити түз сызыкта жатат. $x=x_0$ түз сызыгынан $A(x_0;y)$ – чекитин алалы. Тандоо боюнча $y>y_0$ же $y>kx_0+m$. Демек $A(x_0;y)$ чекитинин координаталары $y>kx+m$ барабарсыздыгынын чечимдери болот. Анда берилген барабарсыздыктын чечимдери болуп $y_0=kx+m$ түз сызыгынын үстүңкү бөлүгүндө жайгашкан жарым тегиздиктеги чекиттердин көптүгү эсептелет.

Жогорудагыдай эле жол менен калган учурлар изилденет.

М и с а л. $x+y+1\geq 0$ барабарсыздыгынын чечимдерин тапкыла. Барабарсыздыкты $y\geq -x-1$ түргө келтирип, $y_0=-x-1$ түз сызыгын чийели.



Далилденген боюнча барабарсыздыктын чечими сызылган жарым тегиздик болот, $y_0 = -x - 1$ түз сызыгына таандык болгон чекиттер кошулат.

8.3.3. Бир өзгөрүлмөлүү экинчи даражадагы барабарсыздыктар: $ax^2 + вx + c > 0$, $ax^2 + вx + c < 0$, $ax^2 + вx + c \geq 0$, $ax^2 + вx + c \leq 0$, мында $a \neq 0$, $в$, $c \in R$.

$ax^2 + вx + c > 0$ берилсин. 1 – жол. Бул барабарсыздыктын чечимин табуу үчүн $ax^2 + вx + c$ туюнтмасынын тамырларын табабыз жана аны көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз. Тамырлар $(x_1; x_2)$ жашаса барабарсыздык төмөндөгүдөй көрүнүштө болот.

$$ax^2 + вx + c = a(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Барабарсыздыкта $a > 0$ же $a < 0$ болушу мүмкүн. $a > 0$ болсун ($a < 0$ болгон учур ушундай эле изилденет). Барабарсыздыктын эки бөлүгүн тең a га бөлөлү

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0.$$

Сол жак бөлүктө эки көбөйтүүчү болгондуктан

$$\begin{cases} x - x_1 > 0, \\ x - x_2 > 0, \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x - x_1 < 0, \\ x - x_2 < 0, \end{cases}$$

учурлардын болушу мүмкүн. Бул барабарсыздыктардын ар бирин чыгарсак

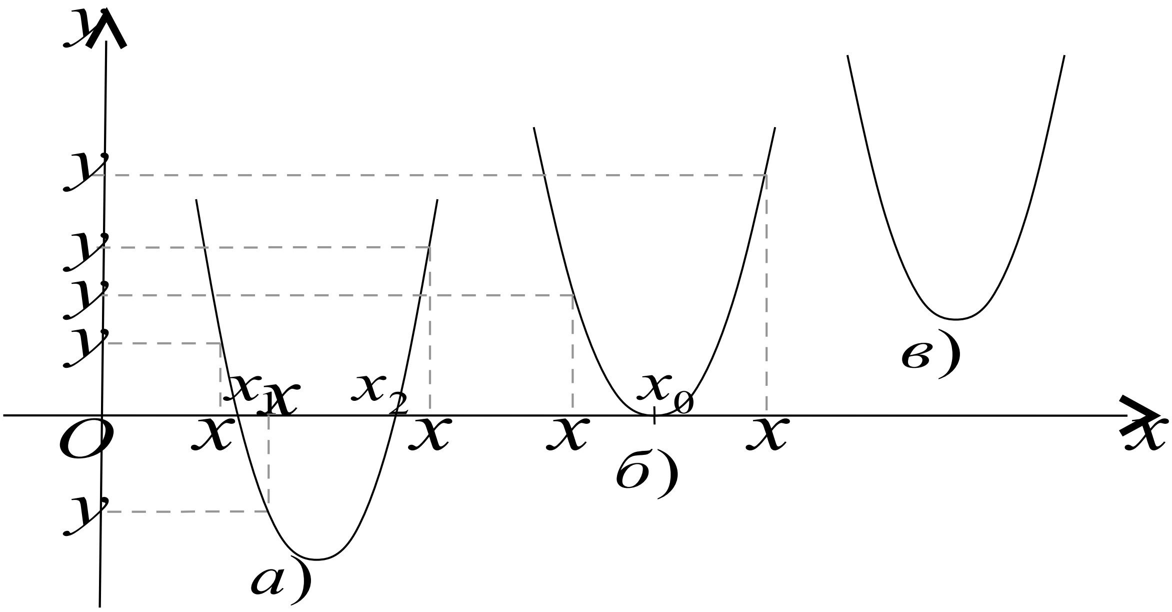
$$\begin{cases} x > x_1, \\ x > x_2, \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} x < x_1, \\ x < x_2. \end{cases}$$

Жалпы чечим x_1, x_2 сандарына карата табылат. Мисалы $x_1 > x_2$ болсо, анда $x > x_1$ же $x < x_2$, б.а. барабарсыздыктын чечими

$$X = (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty).$$

2 – жол. $y = ax^2 + вx + c$ квадраттык функциянын графигин (парабола) тургузабыз. $a > 0$ же $a < 0$ болгондуктан, тактык үчүн $a > 0$ деп эсептейли. Бул учурда параболанын бутактары жогору карайт.

Төмөндөгүдөй учурлар болушу мүмкүн:



$а)$ учурун карайлы $x < x_1$ болсо $y = ax^2 + вx + c > 0$ болот. Демек $x < x_1$ шартты канааттандырган x тер барабарсыздыктын чечими болот. $x > x_2$ болгондо $y = ax^2 + вx + c > 0$ болгондуктан бул x тер да барабарсыздыктын чечими болушат. $x_1 < x < x_2$ болсо, $y = ax^2 + вx + c < 0$, анда $x_1 < x < x_2$ шартын канааттандырган x тер барабарсыздыктын чечими болбойт.

$б)$ учурда барабарсыздыктын чечими $x \neq x_0$ шартын ка-нааттандырган x тер болот.

$в)$ учурда барабарсыздыктын чечими $R = (-\infty, +\infty)$ көптүгү болот.

8.3.4. Эки өзгөрүлмөлүү экинчи даражадагы барабарсыздыктардын айрым учурлары.

1. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ берилсин.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ теңдемесин карайлы. Бул теңдеме борбору $(x_0; y_0)$ жана радиусу r ге барабар болгон айлананын теңдемеси болот.

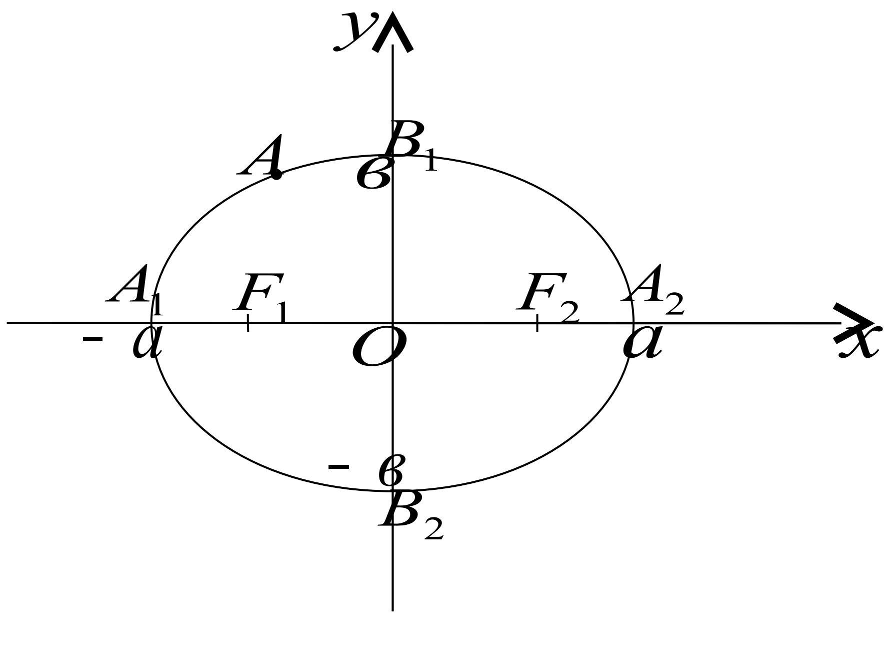
Айлананын ичинде жаткан каалагандай $(x_1; y_1)$ чекитти алалы. Борбордон бул чекитке чейинки аралык радиустан кичине. Демек берилген барабарсыздыктын чечимдеринин көптү-гү айлананын ичинде жаткан чекиттер болушат. Аныктоо боюнча бул көптүк радиусу r ге барабар болгон тегеректи аныктайт. Айланага таандык болгон чекиттер да бул көптүккө кирет.

Эгерде барабарсыздыкта барабар белгисин алып таштасак, анда айланада жаткан чекиттер бул көптүккө кирбейт.

2. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq r^2$ барбарсыздыгы жогорудагыдай эле жол менен чыгарылат. Барабарсыздыктын чечими айлананын сыртында жаткан чекиттердин көптүгү болот, айланада жаткан чекиттер бул көптүкө таандык болушат.

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} \leq 1,\ a, в \in R$ барабарсыздыгы берилсин.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$ теңдемеси эллипс деп аталуучу ийрини берет.



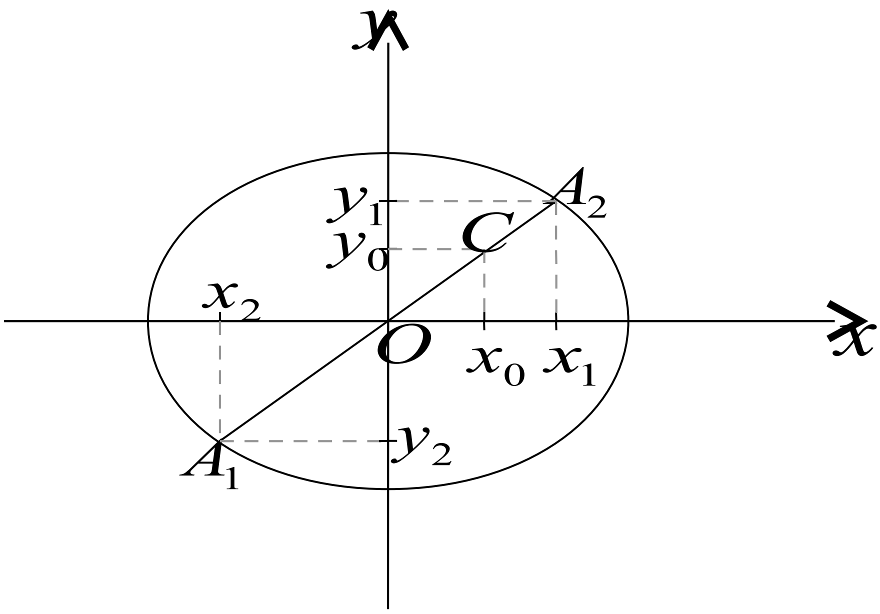
$a, в$ – сандары эллипстин чоң, кичине жарым октору, A_1, A_2, B_1, B_2 чекиттер чокулары деп аталат.

Айланада өзгөчө бөлүнгөн борбор деп аталган бир чекит болсо, эллипсте мындай чекиттер экөө: F_1, F_2. F_1, F_2 – фокус-тар деп аталат.

$\underline{A.}$ Эллипске таандык болгон каалаган $A(x;y)$ чекиттен фокустарга чейинки аралыктардын суммасы турактуу чоңдук болот, б.а. $AF_1 + AF_2 = 2a$.

$\underline{A.}$ сүйлөмүн эллипстин аныктамасы катары кабыл алуу эллипстин теңдемесин келтирип чыгарууга мүмкүнчүлүк берет.

Эллипстин ички бөлүгүндө жаткан каалагандай $C(x_0;y_0)$ чекитти алалы. C чекити жана координата башталышы аркылуу өткөн түз сызык жүргүзөлү. Бул түз сызыктын эллипс менен кесилиш чекиттерин $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$ деп белгилейли.



$$|x_0| \le |x_1|,\ |x_0| \le |x_2|,\ |y_0| \le |y_1|,\ |y_0| \le |y_2|,$$

болгондуктан

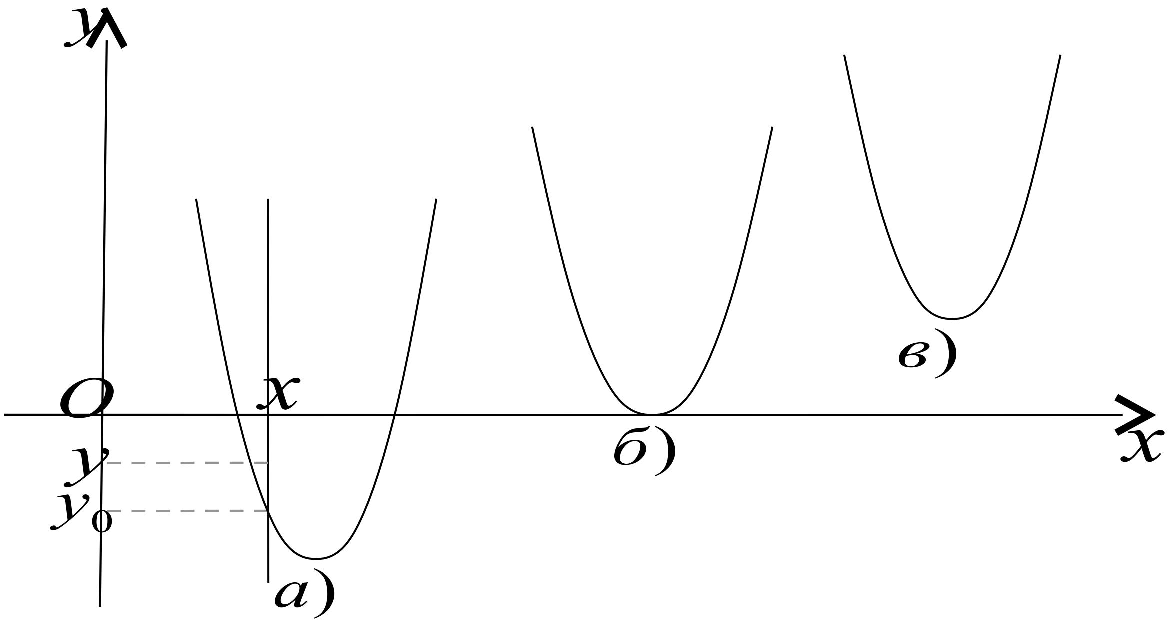
$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{в^2} \le \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{в^2} = 1,\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{в^2} \le \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{в^2} = 1.$$

Бул барабарсыздыктар көрсөтүп жаткандай берилген барабарсыздыктын чечими эллипсте жана анын ичинде жаткан чекиттер болушат.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} \ge 1$ барабарсыздыгы жогорудагыдай эле жол менен чыгарылат. Барабарсыздыктын чечими эллипсте жана анын сыртында жаткан чекиттер болот.

5. $y \ge ax^2 + вx + c\ (a > 0)$ берилсин.

Мындай көрүнүштөгү барабарсыздыктын чечимдерин табуу үчүн $y_0 = ax^2 + вx + c$ функциянын графигин тургузалы.



$a), б), в)$ учурлардын бири болот

$a)$ учурун карайлы. Параболанын ичинен каалагандай $(x;y)$ чекитти алалы. Бул чекиттен x огуна перпендикуляр түз сызык жүргүзөлү. Перпендикуляр параболаны бир гана $(x;y_0)$ чекитинде кесип өтөт. $(x;y)$ жана $(x;y_0)$ чекиттеринин координаталарын салыштырсак

$$y > y_0 = ax^2 + вx + c\,.$$

Демек $a)$ учурунда барабарсыздыктын чечими параболада жана анын ичинде жаткан чекиттерден турган көптүк болот. $б), в)$ учурлары ушундай эле изилденет.

$y \le ax^2 + вx + c$ барабарсыздыгы берилсе бул барабарсыздыктын чечими жогорудагыдай эле жол менен табылат.

8.3.5. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктар: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $(<, \ge, \le)$, $0 < a$ жана $a \ne 1$.

Мындай көрүнүштөгү барабарсыздыктарды чыгаруу үчүн көрсөткүчтүү функциянын касиетин колдонобуз $0 < a < 1$ болгондо a^x кемүүчү болгондуктан $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ болуш үчүн $f(x) < g(x)$. $a > 1$ болсо a^x өсүүчү, андыктан $f(x) > g(x)$ болууга тийиш.

Демек эки учурда тең берилген барабарсыздык $f(x) < g(x)$ же $f(x) > g(x)$ барабарсыздыктары менен алмаштырылат.

М и с а л д а р. 1. $2^{3x+7} < 2^{2x-1}$. $2 > 1$ болгондуктан $3x + 7 < 2x - 1$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Бул барабарсыздыктын чечими $x < -8$.

2. $(0{,}04)^{5x-x^2-8} \le 625$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$$625 = 25^2 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-2} = (0{,}04)^{-2} \text{ болгондуктан } (0{,}04)^{5x-x^2-8} \le (0{,}04)^{-2}.$$

$0 < 0{,}04 < 1$ демек $5x - x^2 - 8 \ge -2$. Мындан

$$5x - x^2 - 6 \ge 0,\ x^2 - 5x + 6 \le 0 \quad \text{же} \quad (x-2)(x-3) \le 0.$$

Бул барабарсыздыкты чыгарсак $2 \le x \le 3$.

8.3.6. Логарифмалык барабарсыздыктар:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)\ (<, \ge, \le),\ 0 < a \text{ жана } a \ne 1.$$

Бул барабарсыздыктарды чыгаруу үчүн $\log_a x$ функциясынын касиетинен пайдаланабыз. $0 < a < 1$ болгондо $\log_a x$ кемүүчү болгондуктан $f(x) < g(x)$, $a > 1$ үчүн $\log_a x$ өсүүчү болгондуктан $f(x) > g(x)$ барабарсыздыктарына ээ болобуз.

Экинчи жактан $f(x) > 0$ жана $g(x) > 0$ шарттары аткарылууга тийиш. Бул шарттарды эске алсак

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{же} \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

барабарсыздыктардын системасына ээ болобуз. Биринчи барабарсыздыктагы $f(x) > 0$ жана $f(x) < g(x)$ шарттарынан $g(x) > 0$ болоору келип чыгат, демек бул системанын ордуна

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

системаны алабыз. Ошондой эле экинчи системадан $f(x) > g(x)$ жана $g(x) > 0$ шарттарынан $f(x) > 0$ болот, анда

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

системага ээ болобуз.

М и с а л д а р. 1. $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 59) > -2$.

$-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ деп алуу мүмкүн, демек $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 59) > \log_{\frac{1}{3}} 9.$ Мындан

$$\begin{cases} 2x + 59 > 0, \\ 2x + 59 < 9, \end{cases} \quad \begin{cases} x > -29{,}5, \\ x < -25, \end{cases}$$

же $-29{,}5 < x < -25$.

2. $\lg(x + 2) < 2 - \lg(2x - 6)$ берилсин.

Логарифмдер мааниге ээ болуш үчүн $x+2>0$, $2x-6>0$ аткарылууга тийиш. Бул барабарсыздыктарды чыгаруу менен $x>3$ болоорун табабыз.

Логарифмдин касиетинен пайдаланып берилген барабарсыздыкты төмөндөгүдөй өзгөртүп түзөлү

$$\lg(x+2)<2-\lg(2x-6) \quad \text{же} \quad \lg(x+2)+\lg(2x-6)<\lg 100,$$

$$\lg(x+2)(2x-6)<\lg 100.$$

Логарифмдин негизи $10>1$, $(x+2)(2x-6)<100$, мындан

$$2x^2-2x-112<0 \quad \text{же} \quad x^2-x-56<0$$

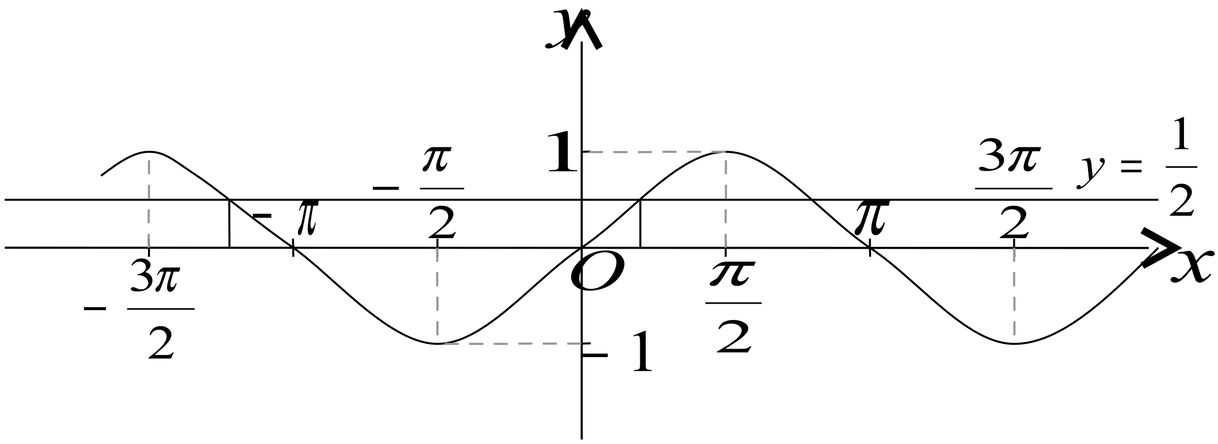
барабарсыздыгына ээ болобуз. Барабарсыздыктын чечими $-7<x<8$. Шарт боюнча $x>3$. Алынган барабарсыздыктардан $3<x<8$ болоору келип чыгат.

8.3.7. Тригонометриялык барабарсыздыктар.

$f(x)=\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ белгилесек тригонометриялык барабарсыздыктарды жалпы $f(x)>a$, $f(x)<a$ $(\geq a, \leq a)$ түрдө жаза алабыз.

Тригонометриялык барабарсыздыктарды чыгарууну мисалдарда карайлы.

1. $\sin x \leq \dfrac{1}{2}$ берилсин. Барабарсыздыктын чечимин табуу үчүн $y=\sin x$ функциясынын графигин тургузалы жана $y=\dfrac{1}{2}$ түз сызыгын жүргүзөлү.



Түз сызык жана график чексиз көп чекиттерде кесилишет. $\sin x \leq \dfrac{1}{2}$ болгондуктан, бизди $y=\dfrac{1}{2}$ түз сызыгынын төмөн жагында жайгашкан $y=\sin x$ функциясынын графигинин бөлүктөрүн аныктаган x тин маанилери кызыктырат. Мындай маанилер чексиз көп. x

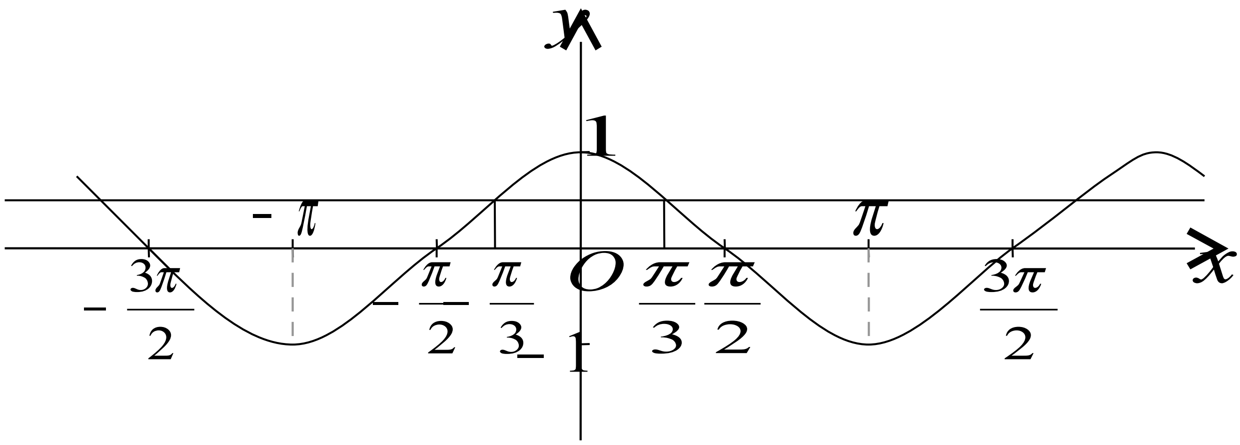
тин бул шартты канааттандырган маанилеринин бири $X = \left[-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$ аралыгы болуп эсептелет.

Барабарсыздыктын баардык чечимдерин табуу үчүн $\sin x$ тин 2π мезгилдүүлүгүн эске алсак X аралыгын x огу боюнча 2π аралыкка жылдырабыз жана алынган аралыктарды бириктиребиз.

Демек жалпы чечим $\bigcup_{k\in Z} \left[-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right]$ түрдө болот.

2. $\cos x > \frac{1}{2}$ барабарсыздыгын чыгаралы.

$y = \cos x$ функциясынын графигин тургузалы жана $y = \frac{1}{2}$ түз сызыгын жүргүзөлү. Барабарсыздыктын чечими болуп $y = \frac{1}{2}$ түз сызыгынын жогор жагында жайгашкан $y = \cos x$ функциясынын графигинин бөлүктөрүн берген x тин маанилери эсептелет.

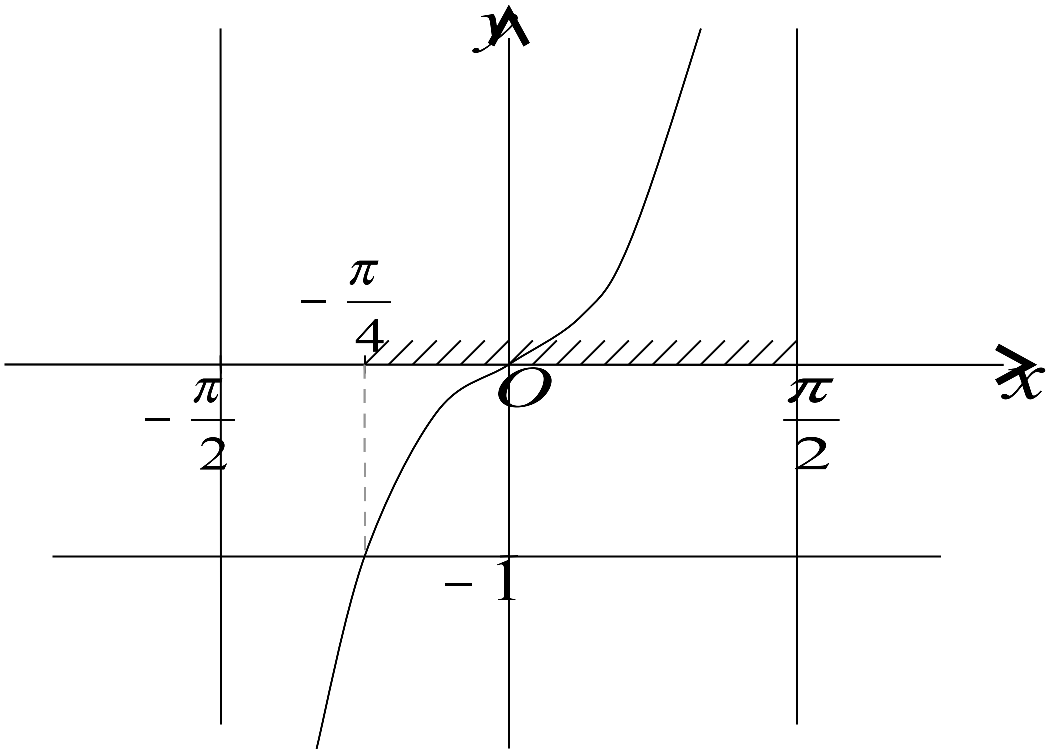


Бизге керектүү x тин маанилеринин бири болуп $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$ аралыгы эсептелет. $\cos x$ функциясынын 2π мезгилдүүлүгүн эске алып бул аралыкты x огу боюнча $2\pi k$, $k \in Z$ аралыкка жылдырып жана алынган аралыктарды бириктирүү аркылуу жалпы чечимди табабыз.

$$X = \bigcup_{k\in Z} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right].$$

3. $tgx \geq -1$ барабарсыздыгын чыгаргыла.

$y = tgx$ функциясынын графигин тургузуп, $y = -1$ түз сызыгын жүргүзөлү.



Барабарсыздыкты канааттандырган x тин маанилери $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалын түзөт. tgx функциясы π мезгилдүү болгондуктан жалпы чечим

$$X = \bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi\ , \frac{\pi}{3} + k\pi\ \right]$$

болот.

Көнүгүүлөр

1. Сызыктуу барабарсыздыктар.

1.1. $x + 4 > 2 - 3x.$ 1.2. $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3.$

1.3. $\frac{37 - 2x}{3} + x < \frac{3x - 8}{4} - 9.$ 1.4. $\frac{7 - 6x}{2} + 10x < \frac{20x + 1}{3}.$

1.5. $\frac{5 - x}{8} + \frac{3 - 2x}{4} > 0.$ 1.6. $\frac{3 + x}{7} - \frac{2 + x}{3} < \frac{4x}{5}.$

1.7. $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}x - \frac{x - 2}{5} > 0.$

2. Квадраттык барабарсыздыктар.

2.1. $x^2 - 8x - 20 < 0.$ 2.2. $2x^2 - 13x + 20 > 0.$

2.3. $-3x^2 + 5x + 2 > 0.$ 2.4. $2x^2 - 4x + 13 > 0.$

2.5. $-x^2 - 6x + 27 < 0.$ 2.6. $2x^2 - x + 4 < 0.$

2.7. $4x^2 - 4x + 1 > 0.$ 2.8. $-x^2 + 12x - 36 < 0$.

3. Төмөндөгү барабарсыздыктарды чыгаргыла:

3.1. $\dfrac{2x-3}{3x-2} > 0.$ 3.2. $\dfrac{2-3x}{2x+7} > 0.$

3.3. $\dfrac{8-3x}{7x-2} < 0.$ 3.4. $\dfrac{5x+8}{3x-7} < 0$.

4. Функциялардын аныкталуу областарын тапкыла:

4.1. $y = \sqrt{2x-3}.$ 4.2. $y = \sqrt{1-x}.$

4.3. $y = \sqrt{18-6x}.$ 4.4. $y = \sqrt{3x-12}.$

4.5. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}.$ 4.6. $y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}.$

4.7. $y = \sqrt{x^2 + 8x + 15}.$ 4.8. $y = \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}.$

4.9. $y = \sqrt{\dfrac{x-8}{12-x}}.$ 4.10. $y = \sqrt{\dfrac{4x-1}{3-2x}}$.

5. Көрсөткүчтүү барабарсыздыктар

5.1. а) $3^x > 4$; б) $6^{x^2-7x+12} > 1$; в) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8} < \dfrac{1}{9}$;

г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x} < \dfrac{1}{27}$; д) $3^x > 27$; е) $2^{x^2-8x+18} > 8$.

5.2. а) $(x+3)^{x^2-5x+6} > 1$; б) $(x^2 - 8x + 16)^{x-6} < 1$;

в) $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$; г) $\left(2^{3+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \le 16^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$;

д) $2\cdot 3^{x+3} + 7\cdot 3^{x-2} \le 493$; е) $5^{2x-1} - 5x > 100$;

ж) $33\cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} \ge 2$; з) $2^{2x}\cdot 9^x - 2\cdot 6^{3x-1} + 4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2} \le 0$;

и) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x \le 5\cdot 6^x$.

6. Логарифмалык барабарсыздыктар

6.1. а) $\log^2_{\frac{1}{2}} x > 36$; б) $2 + \log_2(x+1) > 1 - \log_{\frac{1}{2}}(4 - x^2)$;

в) $\log_x(x^2+1) > 2$; г) $\dfrac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)} < 2$.

6.2. а) $\log_{\frac{3}{10}}|2x+1| > 1$; б) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$;

в) $\log_{\frac{2}{3}}|x-2| > \log_{\frac{2}{3}} 6$; г) $\log_2 \dfrac{4x-1}{x+3} < 1$;

д) $\log_{\frac{1}{2}}(x+8) > \log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(3x)$;

е) $\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2}-9)\cdot\log_3(3^x-1)>3$;

ж) $\frac{\log_2^2 x-\log_2 x-2}{\log_2 x+1}\le 1$; з) $\lg(3x^2+28)-\lg(3x-2)\le 1$;

и) $\lg\sqrt{3x+1}+\lg\sqrt{x+4}\ge \lg 12$; й) $\lg(x^2+1)-\lg(x-2)\ge 1$;

к) $\lg^2 x-\lg x^2\le 1$; л) $2\lg\lg x\ge \lg(3-2\lg x)$.

7. Тригонометриялык барабарсыздыктар

7.1. а) $\sin x<0$; б) $\sin x>0$; в) $\sin x<1$; г) $\sin x<-\frac{1}{2}$;

д) $\sin x>-\frac{1}{2}$; е) $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $|\sin x|<\frac{1}{2}$; з) $\sin x>\frac{1}{2}$.

7.2. а) $\cos x<0$; б) $\cos x>0$; в) $\cos x>-1$; г) $\cos x<1$;

д) $\cos x<\frac{1}{2}$; е) $\cos x>\frac{1}{2}$; ж) $|\cos x|<\frac{1}{2}$; з) $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7.3. а) $tgx<-\sqrt{3}$; б) $tgx>-\sqrt{3}$; в) $|tgx|<\sqrt{3}$.

7.4. а) $ctgx<-1$; б) $ctgx>1$; в) $ctgx<-\sqrt{3}$; г) $|ctgx|<1$.

7.5. а) $3\sin^2 x+\cos^2 x-2\ge 0$; б) $7\sin^2 x-5\cos^2 x+2\le 0$;

в) $tgx+ctgx<0$; г) $\sin^2 x-\cos^2 x\ge \cos x$;

д) $\frac{\sin 2x}{\cos x}\le 0$; е) $\cos^2 x+\sin x\cos x-1\ge 0$;

ж) $\sin x\le \frac{1}{\cos x}$; з) $tg^3x-tg^2x-3tgx-3\ge 0$;

и) $\sin^2 x-10\sin x\cos x+21\cos^2 x\le 0$;

е) $8\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x-4\le 0$.

Колдонулган адабияттар

1. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: Справ. материалы: Кн. для уча¿ихся. –М.: Просве¿ение, 1988.–416 с.
2. Антонов Н.П. и др. Сборник задач по элементарной математике. –М.: Наука, 1974.–416 с.
3. Болтянский В.Г. и др. Лекции и задачи по элементарной математике. –М.: Наука, 1974.–576 с.
4. Бекбоев И.Б. ж.б. Математика: Орто мектептин 6-кл. үчүн окуу китеби. –Б.: Билим, 2006.–224 б.
5. Ибраева Н.И., Касымов А.А. Алгебра: Жалпы билим берүүчү орто мектептердин 7-кл. үчүн окуу китеби. –Б.: Aditi, 2009.–168 б.
6. Байзаков А.Б. ж.б. Алгебра: Жалпы билим берүүчү орто мектептердин 8-кл. үчүн окуу китеби. –Б.: Aditi, 2009.–208 б.