Жээнкулова Г.К

Динамиканын дифференциалдык тендемелери

Дифференциалдык теңдеме деп белгисиз функциянын туундусун жана дифференциалын кармаган барабарсыздыкты айтабыз.

Эгерде белгисиз функция бир гана аргументтен көз каранды болсо анда дифференциалдык теңдеме жөнөкөй деп аталат, ал эми белгисиз функция бир нече аргументтен көз каранды болуп жана бул аргументтер башкача айтканда дифференциалдык теңдеме алардын жекече туундусун кармаса, анда жекече туундулар менен берилген дифференциалдык теңдеме деп аталат.

Дифференциалдык теңдемелерди физикада да колдонууга болот. Динамиканын негизги закондору болгон Ньютондун законуна дифференциалдык теңдемелерди түзүү жолдоруна токтололу:

а) Дифференциалдык теңдемелерди түзүү.

Физиканын закондорунун ичинен эң негизгилеринин бири болуп Ньютондун экинчи закону эсептелет. Кыймыл учурунда телонун массасы турактуу болгондо Ньютондун экинчи закону төмөндөгүдөй түрдө жазылат:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Эгерде кыймыл түз сызыктуу болуп, күчтүн жана ылдамдануунун багыты түз сызык боюнча багытталган болсо, бул закон жөнөкөй түрдө төмөндөгүдөй жазылат.

F= ma

Эскертүү: Космос ракеталары чыга электен мурда массанын турактуу болушу практикалык эсептөөлөр үчүн чоң роль ойногон. Азыркы кезде ракеталардын учушу массанын өзгөрүшү менен байланыштуу себептерге жана шарттарга дуушар болот. Мисалы: Ракетанын күйүүчү майынын массасынын убакыт өтүшү менен жана ракетанын баскычтарынын ажырашы менен ракетанын массасынын азайышы. Ылдамдык телонун координатанын биринчи тартиптеги туундусу ал эми ылдамдануу экинчи тартиптеги туундусу болгондуктан төмөнкү барабардыктар орун алат жана Ньютондун экинчи закону дифференциалдык теңдеме түрүндө жазылат.

$$V = y' \;;\quad a = v' = y''$$

$$F = my''$$

Көпчүлүк учурларда F үч өзгөрүлмөгө:

t- убакытка, y - чекиттин координатасына жана y' - ылдамдыгына көз каранды болгондуктан төмөндөгү көрүнүштөгү дифференциалдык теңдеме алынат.

$$my'' = F(t, y, y')$$

Биз экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени алдык жана бул теңдемени интегралдоо менен кыймылдын y= f (t) закону табылат.

Динамиканын маселелерине дифференциалдык теңдемелерди түзүүнүн мисалдарын карайлы:

1- мисал: Эгерде абанын каршылыгынын күчү кыймылдын ылдамдыгына прапорциялаш болсо, парашютисттин кыймылынын теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу: Оордук күчү mg га барабар, мында m- парашютисттин жалпы массасы (жүгү менен), ал эми абанын каршылык күчү ылдамдыкка прапорциалдуу жана кыймылдын ылдамдыгына карама-каршы багытталгандыктан –kv га барабар болот. Парашютистке таасир этүүчү жалпы күч $F = mg - kv$ га барабар болот.

Жогоруда баяндалган жалпы жоболордун негизинде төмөнкү дифференциалдык теңдемеге ээ болобуз.

$$ma = mg - kv$$

$$my'' = mg - ky'$$

Эскертүү: Парашютисттин түшүшү түз сызык боюнча түшөт.

2-мисал: Жер бетинен алыстан учуучу ракетанын эркин учуусунун дифференциалдык теңдемесин түзгүлө.

Чыгаруу: Жер бетине алыстаган сайын тартуу күчү азая тургандыктан тартылуу законун дагы эске алышыбыз зарыл. Бүткүл дүйнөлүк тартылуу закону боюнча

$$|F| = -G\frac{mM}{y^2}$$

Мында m- ракетанын массасы

М-жердин массасы

G-гравитациалык турактуу

У- жердин борборунан ракетага чейинки аралык

Анда ракетанын кыймылынын дифференциалдык теңдемеси төмөндөгүдөй көрүнүштө болот.

$$my'' = -\frac{GmM}{y^2} \quad \text{же} \quad y'' = -\frac{GM}{y^2}$$

Жердин бетинде, башкача айтканда y= R болгондо (R- жердин радиусу).

F= -mg болгондуктан - mg= - $\frac{mMG}{R^2}$ же MG = gR^2

Демек, ракетанын кыймылынын теңдемеси төмөнкүдөй түрдө болот.

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2} \qquad (1)$$

Биз дифференциалдык теңдемеге келүүчү динамиканын маселелеринен мисал келтирдик.

б) Физикалык маселелерге дифференциалдык теңдемелерди түзүүгө жалпы көрсөтмөлөр:

Жогорку мисалдарга тиешелүү физикалык закондордун калыптандырылышында ылдамдык жана ылдамдануу катышкандыктан дифференциалдык теңдемелерди түзүү салыштырмалуу түрдө жеңил болот. Эми геометриялык маселелерде дифференциалдык теңдемени түзүү y' - бурчтук коэффициент экендигине негизделет.

Эгерде физикалык процесстерде ылдамдык жана ылдамдануу катышпаса төмөндөгүдөй жалпы жобо колдонулат:

Жалпысынан физикалык процесстерде убакыттын өтө кичинекей өлчөмүндө процесстин өзгөрүү тездиги өтө аз өзгөргөндүктөн аны турактуу деп кабыл алууга болот.

в) Дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу.

Дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу физика-математикалык адабияттарда кеңири чагылдырылгандыктан биз төмөнкү маселени чыгаруу менен чектелебиз.

Экинчи космос ылдамдыгын эсептеп чыгаруу.

Жердин бетинен баштапкы ылдамдыгы Vo болгон ракета учуп чыксын. Эгерде ракетанын ылдамдыгы салыштырмалуу аз болсо ракета кандайдыр бир бийиктикке көтөрүлөт да, тартылуу күчүнүн таасири астында жерге кулап түшөт.

Механиканын закондорунун негизинде жер бетиндеги чекиттен ракета горизанталдуу багытта учуп чыгып, жердин айланасындагы тегерек орбита боюнча кыймылдаган жандоочу болуп кала турган V_1 ылдамдыгы эсептелип чыккан жана ал биринчи космос ылдамдыгы деп аталат. Эсептөөлөр V= 7,90 км/сек экендигин көрсөттү.

Биз вертикалдык багыт боюнча учуп көтөрүлүп жер бетинен каалагандай аралыкка алыстай турган V_2 ылдамдыгын эсептейли. Бул V_2 ылдамдыгы экинчи космос ылдамдыгы деп аталат.

Биз караган 1- маселеде ракетанын кыймылынын теңдемеси

$y'' = -\frac{gR^2}{y^2}$ түрүндө болот.

Мында:

g-оордук күчүнүн ылдамдануусу

R-жердин радиусу

y (t)- t моментинде ракетанын жер бетинен алыстаган аралыгы

Маселени чыгаруу үчүн (1) теңдеменин эки жагын $2\,y'$ ке көбөйтөбүз.

$$2y'\cdot y'' = -.\frac{2gR^2}{y^2}\cdot y' \quad \text{же} \quad \left((y)^2\right)' = \left(2gR^2\cdot\frac{1}{y}\right)' \qquad (2)$$

Мында 1) $\left((y')^2\right)' = 2y'\cdot(y') = 2y'\cdot y''$

$$2)\left(2gR^2\cdot\frac{1}{y}\right)' = 2gR^2\cdot\left(\frac{1}{y}\right)' = -2gR^2\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot y' = -\frac{2gR^2}{y^2}\cdot y' \quad \text{болгондуктан}$$

(2) теңдеме туура түзүлгөн.

(2) тендемени функциянын туундусун интегралдоо методун колдонуу жолу менен чыгарганда төмөндөгүнү алабыз.

$$(y')^2 = \frac{2gR^2}{y} + C \quad \text{болгон} \quad y' = V \quad \text{болгондуктан} \quad V^2 = \frac{2gR^2}{y} + C \qquad (3)$$

Бул дифференциалдык теңдеменин жалпы чечими. Төмөнкү шарттарга ылайык дифференциалдык тендеменин жекече чечимин табалы б.а. С нын жердин бетинен ракета учуп чыккандагы баштапкы ылдамдыкты аныктайлы.

Демек, t=0 болгондо V=V_2 баштапкы ылдамдыгы менен кыймылга келген моментте ракета жердин бетинде же жердин борборунан y=R (R-жердин радиусу) аралыкта болот. Төмөнкү баштапкы шарттарды колдонобуз.

$\begin{cases} t = 0 \\ y = R \end{cases}$ $\quad V_2^2 = \dfrac{2gR^2}{R} + C \quad V_2^2 = 2gR + C$ мындан $C = V_2^2 - 2gR$ болот жана (3) теңдеме төмөнкү түргө келет:

$V_2^2 = \dfrac{2gR^2}{y} + V_2^2 - 2gR$ Эгерде ракета каалагандай у бийиктигине көтөрүлгөн болсо, $\dfrac{2gR^2}{y}$ тин мааниси каалаганчалык кичинекей болот, жана $V_2^2 - 2gR \geq 0$ барабардыгы аткарылыш керек.

Бул барабарсыздыктын эң кичинекей чечими $V_2^2 - 2gR = 0$ болгондо табылат $V_2^2 = 2gR$ же $V = \sqrt{2gR}$

Экинчи космос ылдамдыгын эсептеп чыгаралы.

R= 6370 км; g= $0{,}00981\dfrac{км}{сек^2}$

$$V_2 = \sqrt{2\cdot 0.00981\cdot 6370} \approx 11.19\frac{км}{сек}$$

Эскертүү: $y'' = -\dfrac{gR^2}{y^2}$

Дифференциалдык теңдемесин чечилмесин колдонуп тартибин төмөндөтүү менен чыгарса болот.

Корутунду

Физикалык маселелердин (макалада динамиканын маселелерин) дифференциалдык теңдемелерин түзүү жана эсептеп чыгаруу физикалык процесстерди изилдөө жана натыйжаларды алууда өтө эффективдүү каражат экендиги байкалат.

Адабияттар

1. В.П.Демирович « Сборник задач математическому анализу» Москва, «Наука» 1990г.

2. М.Л.Краснов, А.И.Киселев, Г.И. Маляренко « Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям» Москва, «Высшая школа» 1978г.

3. Я.Б.Зельдович «Высшая математика для начинаюүих» 1963г.

4. Г.И. Занфожец «Руководство к решению задач по математическому анализу» Москва, «Высшая школа» 1964г.