УДК. 515.123. Ч. А. АБЛАБЕКОВА

ОБ УСИЛЕНИИ РАВНОМЕРНО ПЕРИСТЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

τ

τ

$\le \tau$

τ

τ

$\le \tau$

τ

$\le \tau$

В данной работе вводится подкласс равномерно τ - перистых пространств сильно равномерно τ - перистые пространства. Устанавливается их характеристики и доказывается, что в этом классе пространств полнота равносильна полноте по семейству равномерных покрытий мощности $\le \tau$. Ниже рассматриваемые равномерные пространства, свойства равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений можно почерпнуть в книгах /1/, /2/. Для всех равномерных пространств равномерные структуры задаются в терминах равномерных покрытий. Далее необходимую информацию о равномерных пространствах и равномерно непрерывных отображениях мы будем напоминать по контексту, со ссылкой на источники.

Определение 1 /1/. Равномерное пространство $(\ ,\mathcal{U})$ называется τ - , если существует такая псевдоравномерность $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, что выполнены следующие условия:

1^0. $(\mathcal{V})\le\tau$, т.е. у псевдоравномерности $\mathcal{V}$, существует база мощности $\le\tau$.

2^0. $\cap\{\alpha((\ ):\alpha\in\mathcal{V}\}=$ - бикомпакт для любого $\in$, где $\alpha(\ )=\cup\{\ \in\alpha:\ \in\ \}$ звезда точки относительно покрытия α.

3^0. Семейство $\{\alpha(\ ):\alpha\in\mathcal{V}\}$ образует базу окрестностей бикомпакта в $(\ ,\tau_{\mathcal{U}})$, где $\tau_{\mathcal{U}}$ - топология, порожденная равномерностью $\mathcal{U}$ и $\alpha(\ )=\cup\{\ \in\alpha:\ \cap\ \neq\emptyset\}$

Когда $\tau=\aleph_0$, равномерно $\aleph_0$- перистые равномерные пространства называются равномерно перистыми. Основным толчком для введения равномерно перистых пространств получила характеристика перистых, в смысле А.В. Архангельского /2/, паракомпактов, т.е. если перистый паракомпакт и $\mathcal{U}$ - универсальная равномерность на , то равномерное пространство $(\ ,\mathcal{U})$ – равномерно material перисто. Напомним, что универсальная равномерность $\mathcal{U}$ тихоновского пространства , это сильнейшая равномерность на , порождающая исходную топологию пространства /3/,/4/.

Для равномерного пространства $(\ ,\mathcal{U})$ все конечные равномерные покрытия равномерности $\mathcal{U}$ образуют равномерность $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}$, сильнейшую предкомпактную равномерность в равномерности $\mathcal{U}$, порождающую топологию τ равномерного пространства $(\ ,\mathcal{U})$ /3/.

Определение 2. Равномерное пространство $(\ ,\mathscr{U})$ называется

τ , если существует такая псевдоравномерность $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$, что выполнены следующие условия:

1^{0}. $(\mathscr{V})\leq\tau$

2^{0}. $\cap\{\alpha((\ ):\alpha\in\mathscr{V}\}=$ - бикомпакт для любого $\in$

3^{0} Семейство $\{\alpha(\ ):\alpha\in\mathscr{V}\}$ образует базу окрестностей бикомпакта в $(\ ,\tau_{\mathscr{U}})$

4^{0}. $\mathscr{U}=\sup\{\mathscr{U} \ ,\mathscr{V}\}$, т.е. равномерность $\mathscr{U}$ есть верхняя грань равномерности $\mathscr{U}$ псевдоравномерности $\mathscr{V}$.

Напомним /5/, /1/, если $\mathscr{W}$ и $\mathscr{V}$- псевдоравномерности, тогда семейство $\{\omega\wedge\beta:\omega\in\mathscr{W},\beta\in\mathscr{V}\}$ образует базу псевдомерности $\mathscr{U}=\sup\{\mathscr{W},\mathscr{V}\}$.

Определение 3 /1/. Равномерно непрерывное отображение $:(\ ,\mathscr{U})\rightarrow(\ ,\mathscr{W})$ равномерного пространства $(\ ,\mathscr{U})$ в равномерное пространство $(\ ,\mathscr{W})$ называется , если оно совершенно топологически и предкомпактно, т. е. для любого $\alpha\in\mathscr{U}$ существует $\beta\in\mathscr{W}$ и конечное $\gamma\in\mathscr{U}$ такое, что $^{-1}(\beta)\wedge\gamma=\{ \ ^{-1}(\ )\cap\Gamma: \ \in\beta,\Gamma\in\gamma\}$ вписано в α. При этом отображение $:(\ ,\mathscr{U})\rightarrow(\ ,\mathscr{W})$ совершенно топологически, если совершенно отображение $:(\ ,\tau \ )\rightarrow(\ ,\tau \ )$, т.е. является непрерывным, замкнутым и $^{-1}(\ )$ бикомпакт для любого $\in$ /8/.

Теорема 4. $(\ ,\mathscr{U})$

$(\ ,\mathscr{U})$ τ

$(\ ,\mathscr{U})$

$\leq\tau$

$(\ ,\mathscr{U})$

$(\ \times \ , \mathscr{U}\times\mathscr{W})$ $(\ , \mathscr{U})$ С $(\ ,\mathscr{U})$ $(\ ,\mathscr{W})$

$\leq\tau$ $(\mathscr{W})\leq\tau$

Доказательство: (1)$\Rightarrow$ (2). Пусть $(\ ,\mathscr{U})$ - сильно равномерно $\tau-$ перисто и $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$ псевдоравномерность, удовлетворяющая всем требованиям

определения 2. Тогда для любых $, \in , \neq$ либо $\cap \ =\varnothing$, либо $\cap \ \neq\varnothing$. Легко показать, что $\cap \ \neq\varnothing$ влечет $\neq$.Тогда имеем разбиение $=\{ \ : \ \in \ \}$ пространства на попарно непересекающиеся бикомпакты . Определим отображение $: \ \rightarrow$ по правилу $^{-1}(\ )=$ для некоторого $\in$. Это отображение является сюръективным по определению. Пусть база $\mathscr{B}$ псевдоравномерности $\mathscr{V}$ и $|\mathscr{B}|\leq\tau$. Тогда для каждого $\alpha\in\mathscr{B}$ положим $\alpha^{\#}=\{ \ ^{\#}(\ ): \ \in\alpha\}$, где $^{\#}(\ )= \ \setminus \ (\ \setminus \ )$. Пусть $\in$ произвольная точка, тогда $^{-1}(\ )=$ для некоторого $\in$. Пусть $\beta\in\mathscr{B}$ звездно вписано в α, тогда $\in \ \beta(\ )\subset$ для некоторого $\in\alpha$. Тогда $(\ )= \ \in \ ^{\#}(\ )$, т.е. семейство $\alpha^{\#}$ является покрытием множества . Непосредственная проверка показывает, что для системы покрытий $\mathscr{B}^{\#}=\{\alpha^{\#}:\alpha\in\mathscr{V}\}$ выполняются следующие свойства:

(1) Если $\alpha,\beta,\gamma\in\mathscr{B}$ и γ вписано в $\alpha\wedge\beta$, тогда $\gamma^{\#}$ вписано $\alpha^{\#}\wedge\beta^{\#}$.

(2) Если $\alpha, \beta \in \mathscr{B}$ и β сильно звездно вписано в α, тогда $\beta^{\#}$ звездно вписано в

(3) $\cap\{\alpha^{\#}(\ ) : \alpha^{\#} \in \mathscr{B}^{\#}\} = \{\ \}$ для любого $\ \in\ $.

(4) Если $\alpha, \beta \in \mathscr{B}$ и β звездно вписано в α, то β вписано в $^{-1}(\alpha^{\#})$.

(5) Для каждого $\alpha \in \mathscr{B}$, $^{-1}(\alpha^{\#})$ вписано в $\alpha^{\#}$.

Выполнение условий (1^0) – (3^0) показывает, что система $\mathscr{B}^{\#}$ база некоторой равномерности $\mathscr{W}$ на при этом т.к. $|\mathscr{B}| = |\mathscr{B}^{\#}|$, то $(\mathscr{W}) \le \tau$. Условие (4^0) показывает, что отображение $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$ равномерно непрерывно. В силу условия 4^0 определения 2, для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ существует $\beta \in \mathscr{V}$ и конечное $\gamma \in \eta$ такие, что $\beta \wedge \gamma$ вписано в α.Тогда в силу условия (5), $^{-1}(\beta^{\#}) \wedge \gamma$ вписано в α. Это означает, что отображение $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$ предкомпактно. По определению отображения $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$, $^{-1}(\ ) =$ бикомпактно для любого $\ \in\ $, следовательно - бикомпактное отображение. Покажем теперь замкнутость отображения $:(\ ,\tau\ ) \to (\ ,\tau\ )$. Пусть $\mathscr{V}$ открыто в и $^{-1}(\ ) = \ \subset\ $. Тогда $\cap = \varnothing$ и $= \ \setminus\ $ замкнуто в , следовательно, существует такое $\alpha \in \mathscr{U}$, что $\alpha(\ ) \cap \alpha(\ ) = 0$ ([9]). Тогда $\alpha(\ ) \subset \ \setminus \alpha(\ ) \subset \ \setminus\ =$ или $\alpha(\ ^{-1}(\ )) \subset\ $. По одному из критериев замкнутых отображений ([7]), последнее доказывает замкнутость отображения $:(\ ,\tau_{\mathscr{U}}) \to (\ ,\tau_{\mathscr{W}})$. Итак отображение $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$ является равномерно совершенным отображением $(\ ,\mathscr{U})$ на равномерное пространство $(\ ,\mathscr{W})$ веса $(\mathscr{W}) \le \tau$.

(2)$\Rightarrow$ (3). Пусть равномерное пространство $(\ ,\mathscr{U})$ равномерно совершенно отображается на равномерное пространство $(\ ,\mathscr{W})$ веса $(\mathscr{W}) \le \tau$ посредством отображения $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$ и $(\ ,\ \mathscr{U})$- Самуэловское бикомпактное расширение равномерного пространства $(\ ,\mathscr{U})$. Тогда по одному из критериев равномерно совершенных отображений ([5]), равномерное пространство $(\ ,\mathscr{U})$ равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству $(\ ,\ \mathscr{U} \times \mathscr{W} \wedge\ )$, где $= \{(\ ,\ (\ )) :\ \in\ \} \subseteq\ \times\ $ график отображения $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{V})$.

(3)$\Rightarrow$ (2). Пусть равномерное пространство $(\ ,\mathscr{U})$ замкнуто равномерно гомеоморфно вкладывается в произведение $(\ \times\ ,\ \mathscr{U} \times \mathscr{W})$. Тогда $= \pi \mid\ :(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$- равномерно совершенное отображение, как сужение равномерно совершенного отображения $\pi\ :(\ \times\ ,\ \mathscr{U} \times \mathscr{W}) \to (\ ,\mathscr{W})$ на замкнутое подпространство $(\ ,\mathscr{U})$ /1/,/5/.

(2)$\Rightarrow$ (1). Пусть $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$ - равномерно совершенное отображение равномерного пространства $(\ ,\mathscr{U})$ на равномерное пространство $(\ ,\mathscr{W})$ веса $\le \tau$, т.е. $(\mathscr{W}) \le \tau$. Тогда семейство $\mathscr{B} = \{\ ^{-1}(\omega) : \omega \in \mathscr{W}\}$ база некоторой псевдоравномерности $\mathscr{V}$ в $\mathscr{U}$. Тогда имеем 1^0. $(\mathscr{W}) \le \tau$, т.к. $|\mathscr{B}| \le \tau$. 2^0 $^{-1}(\ )$- бикомпакт для любого $\ \in\ $ и $^{-1}(\ ) = \cap\{\ ^{-1}(\omega(\ )) : \omega \in \mathscr{W}\}$ $^{-1}(\cap\{\omega(\ ) : \omega \in \mathscr{W}\}$.

3^0. Семейство $\{\alpha(\ ^{-1}(\ ) : \alpha \in \mathscr{V}\}$ образует базу окрестностей $^{-1}(\ )$ в $(\ ,\tau_{\mathscr{U}})$. Это легко следует из выше доказанного критерия замкнутости отображения $:(\ ,\mathscr{U}) \to (\ ,\mathscr{W})$.

4^0. В силу предкомпактности отображения $:(\ ,\mathcal{U}) \to (\ ,\mathcal{W})$, для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существуют $\omega \in \mathcal{W}$ и конечное $\gamma \in \mathcal{U}$ такие, что $^{-1}(\omega) \wedge \gamma$ вписано в α. Но $\beta = \ ^{-1}(\omega) \in \mathcal{V}$, следовательно, $\beta \wedge \gamma$, вписано в α. Это означает, что $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U} \ ,\mathcal{V}\}$, т.е. равномерное пространство $(\ ,\mathcal{U})$ является сильно равномерно τ - перистым.

Теорема 5 /6/. $:(\ ,\mathcal{U}) \to (\ ,\mathcal{V})$ $(\ ,\mathcal{U})$ $(\ ,\mathcal{V})$ $\tilde{\ }:(\tilde{\ },\tilde{\mathcal{U}}) \to (\tilde{\ },\tilde{\mathcal{V}})$ $(\tilde{\ },\tilde{\mathcal{U}})$ $(\tilde{\ },\tilde{\mathcal{V}})$

Определение 6 /2/. Пусть $(\ ,\mathcal{U})$ равномерное пространство и $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ некоторое семейство равномерных покрытий. Фильтр $\mathcal{F}$ в $(\ ,\mathcal{U})$ называется $\mathcal{H}$, если $\cap\alpha \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in \mathcal{H}$.

Определение 7 /1/**.** Пусть $(\ ,\mathcal{U})$ равномерное пространство и $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ некоторое фиксированное семейство равномерных покрытий. Равномерное пространство $(\ ,\mathcal{U})$ называется $\mathcal{H}$ - , если $\cap\{\bar{\ } : \bar{\ } \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$ для любого $\mathcal{H}$ - фильтра Коши $\mathcal{F}$.

Для равномерности $\mathcal{U}$ равномерного пространства $(\ ,\mathcal{U})$ полагают $(\mathcal{U}) = \min\{\tau : |\mathcal{H}| = \tau$ и $(\ ,\mathcal{U})$ -$\mathcal{H}$ - полно$\}$ называют $(\ )$ - индексом полноты. Если $(\mathcal{U}) \leq \aleph_0$ это такие равномерные пространства называются равномерно полными по Чеху пространствами. Они введены в /7/.

Теорема 8. $(\ ,\mathcal{U})$ τ - $(\tilde{\ },\tilde{\mathcal{U}})$ $(\tilde{\mathcal{U}}) \leq \tau$

Доказательство. Пусть $(\ ,\mathcal{U})$ сильно равномерно τ household перисто. Тогда в силу теоремы 4, существует равномерно совершенное отображение $:(\ ,\mathcal{U}) \to (\ ,\mathcal{V})$ равномерного пространства $(\ ,\mathcal{U})$ на равномерное пространство $(\ ,\mathcal{V})$ веса $\leq \tau$, т.е. $\mathcal{W}(\mathcal{V}) \leq \tau$.

Тогда, в силу теоремы 5, отображение $\tilde{\ }:(\tilde{\ },\tilde{\mathcal{U}}) \to (\tilde{\ },\tilde{\mathcal{V}})$ также равномерно совершенно и $\mathcal{W}(\tilde{\mathcal{V}}) \leq \tau$ /1/.

Тогда в силу одной теоремы А.А.Борубаева (/1/, Т.1.2.10., Т.1.2.11) $(\tilde{\mathcal{U}}) \leq \ (\tilde{\mathcal{V}}) \leq \tau$ т.е. $(\tilde{\mathcal{U}}) \leq \tau$

Следствие 5.1. Пусть $(\ ,\mathcal{U})$ сильно равномерно τ - перистое пространство. Тогда равномерное пространство $(\ ,\mathcal{U})$ полно тогда и только тогда, когда $(\mathcal{U}) \leq \tau$

Доказательство. Пусть $(\ ,\mathcal{U})$ полное сильно равномерно τ - перистое равномерное пространство, тогда $(\mathcal{U}) = \ (\tilde{\mathcal{U}})$ и, в силу теоремы 8, $(\mathcal{U}) = \ (\tilde{\mathcal{U}}) \leq \tau$

Обратно, если $(\tilde{\mathcal{U}}) \leq \tau$, то всякий фильтр Коши $\mathcal{F}$ в $(\ ,\mathcal{U})$ обладает свойством $\cap\alpha \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in \mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ и $|\mathcal{H}| \leq \tau$ Так как $(\tilde{\mathcal{U}}) \leq \tau$ $\cap\{\bar{\ } : \bar{\ } \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$, следовательно $\mathcal{F}$ - сходится и $(\ ,\mathcal{U})$ является полным равномерным пространством.

Следствие 5.2. Пусть $(\ ,\mathcal{U})$ сильно равномерно перистое равномерное пространство. Тогда $(\ ,\mathcal{U})$ полно тогда и только тогда, когда $(\ ,\mathcal{U})$ равномерно полно по Чеху.

В заключении выражаю свою благодарность своему научному руководителю,
д- ру физ.-мат. наук, профессору Чекееву А.А. за подстановку задачи, обсуждение результатов и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [текст] / А.А.Борубаев. – Фрунзе: Илим, 1990.- 171с.
2. Архангельский А.В. Об одном классе пространств, содержащих метрические все метрические и все локально бикомпактные пространства [текст] / А.В.Архангельский. – Мат. Сборник, Т.97, №31, 1965. - С.55-85.
3. Y.R.Isbell. Uniform spaces, Providence, 1964. - P.175.
4. Энгелькинг Р. Общая топология [текст] / Р.Энгелькинг. - М.: Мир, 1986. - 752 с.
5. Чекеев А.А. О критерии равномерной совершенности равномерно непрерывных отображений[текст] / А.А.Чекеев, С.С.Токсонбаев. - Вестник КНУ, Т.XIII, В.У.Сер.3. - 2010. - С. 68-76.
6. Токсонбаев С.С. Об χ_0 – полноте абсолютов равномерных пространств [текст] / С.С.Токсонбаев. – Вестник КНУ, В.У. Сер. 3. - 2005. - С.126-130.
7. M.Wilhelm. Criteria of openness relations, Fund, Math.Y.124.,1981, P.219-228.
8. Вайнштейн И.А. О замкнутых отображениях метрических пространств[текст] / И.А.Вайнштейн. – ДАН СССР, 57. – 1947. - С.319-321.
9. E.Michel. Topologies on spaces subsets. Trans.Aner. Math.Soc.1951, V.71, P.152-182.