КЕНЖЕГУЛОВ Б.
lib.knu@mail.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И УДЛИНЕНИЯ ТРУБЫ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Атырауский госуниверситет им. Х.Досмухамедова, Атырау, Республика Казахстан

В работе на основе энергетического принципа в сочетании квадратичного конечного элемента численно моделируется установившиеся процесс распределение поле температуры по длине трубы ограниченной длины и постоянного поперечного сечения. При этом на площади поперечного сечения левого конца подводится тепловой поток, а через площади поперечного сечения правого конца происходит теплообмен с окружающей ее средой. Также происходит теплообмен через площади внутренней и наружной боковых поверхностей. При этом учитываются температуры всех окружающих сред.

Предположим, что дана труба ограниченной длины $\lambda\,(см)$, наружный и внутренней радиус которого $r_1\,(см)$ и $r_2\,(см)$ соответственно. Коэффициент теплопроводности материала трубы $K_{xx}\left[\frac{Вт}{(см\cdot{}^{o}C)}\right]$, теплового расширения $\alpha\left[\frac{1}{{}^{o}C}\right]$. На площадь поперечного сечения левого конца трубы подводится тепловой поток $q\left[\frac{Вт}{см^2}\right]$. Через площади наружных и внутренних боковых поверхностей происходит теплообмен с окружающими их средами. При этом коэффициенты теплообменов h_1, $h_2\left[\frac{Вт}{(см^2\cdot{}^{o}C)}\right]$, а температуры окружающих этих поверхностей сред T_{oc1} и T_{oc2} $[{}^{o}C]$ соответственно (рис.-1).

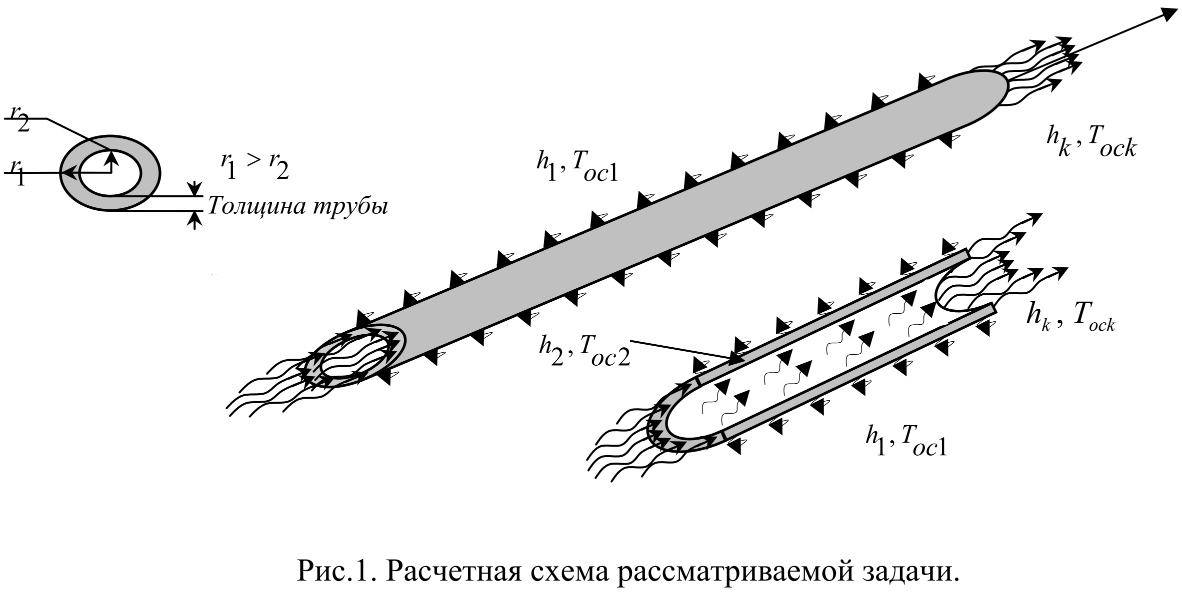

Рис.1. Расчетная схема рассматриваемой задачи.

Через площадь поперечного сечения правого конца также происходит теплообмен с окружающей ее средой. При этом коэффициент теплообмена h_k и T_{ock} соответственно.

Для рассматриваемой задачи функционал выражающую полную тепловую энергию имеет следующий вид [1,2]

$$J = \int_V \frac{K_{xx}}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dV + \int_{S_i} qTdS + \int_{S_н} \frac{h_1}{2}(T - T_{oc1})^2 dS + \int_{S_в} \frac{h_2}{2}(T - T_{oc2})^2 dS + \int_{S_к} \frac{h_к}{2}(T - T_{оск})^2 dS \quad (1)$$

где *V*– объем трубы; S_i– площадь поперечного сечения левого конца; $S_н$– площадь наружной боковой поверхности; $S_в$– площадь внутренней боковой поверхности; S_k– площадь поперечного сечения правого конца $T = T(x)$.

В рассматриваемой задаче поле распределения температуры по длине стержня будет гладкой кривой. По этому этот кривой с определенной точностью аппроксимируем кривой второго порядка [2]

$$T(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_2 x^2 = \varphi_i(x)\cdot T_i + \varphi_j(x)\cdot T_j + \varphi_k(x)\cdot T_k. \quad (2)$$

где $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$ и $\varphi_k(x)$ являются функций формы для квадратичного конечного элемента с тремя узлами *i*, *j* и *k*. При этом координаты этих узлов следующие $x_i = 0$, $x_j = \dfrac{\lambda}{2}$, $x_k = \lambda$.

$$\varphi_i(x) = \frac{\lambda^2 + 3\lambda x + 2x^2}{\lambda^2}; \quad \varphi_j(x) = \frac{4(\lambda x - x^2)}{\lambda^2}; \quad \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - \lambda x}{\lambda^2}. \quad (3)$$

Обозначая площадь поперечного сечения трубы через $F = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$, а, также учитывая (2) из (1) получим интегрированный вид функционала *J*.

$$J = \frac{K_{xx}F}{2\lambda}\left[\frac{7}{3}T_i^2 - \frac{16}{3}T_iT_j + \frac{2}{3}T_iT_k - \frac{16}{3}T_jT_k + \frac{16}{3}T_j^2 + \frac{16}{3}T_k^2\right] +$$
$$+ \pi r_1 h_1\left[\frac{2\lambda}{15}T_i^2 + \frac{2\lambda}{15}T_iT_j - \frac{\lambda}{15}T_iT_k + \frac{8\lambda}{15}T_j^2 + \frac{2\lambda}{15}T_k^2 + \frac{2\lambda}{15}T_iT_k - \frac{\lambda}{3}T_{oc1}T_i - \frac{4\lambda}{3}T_{oc1}T_j -\right.$$
$$\left.- \frac{\lambda}{3}T_{oc1}T_k + \lambda T_{oc1}^2\right] + \pi r_2 h_2\left[\frac{2\lambda}{15}T_i^2 + \frac{2\lambda}{15}T_iT_j - \frac{\lambda}{15}T_iT_k + \frac{8\lambda}{15}T_j^2 + \frac{2\lambda}{15}T_k^2 + \frac{2\lambda}{15}T_jT_k -\right.$$
$$\left.- \frac{\lambda}{3}T_{oc2}T_i - \frac{4\lambda}{3}T_{oc2}T_j - \frac{\lambda}{3}T_{oc2}T_k + \lambda T_{oc2}^2\right] + \frac{h_kF}{2}(T_k - T_{ock})^2 + FqT_i \quad (4)$$

Далее минимизируя последний функционал по узловым значениям температуры T_i, T_j и T_k получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых величин

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial J}{\partial T_i} = 0; \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{2\lambda}\left[\frac{14}{3}T_i - \frac{16}{3}T_j + \frac{2}{3}T_k\right] + \pi r_1 h_1 \lambda\left[\frac{4}{15}T_i + \frac{2}{15}T_j - \frac{1}{15}T_k - \frac{T_{oc1}}{3}\right] + \\
&+ \pi r_2 h_2 \lambda\left[\frac{4}{15}T_i + \frac{2}{15}T_j - \frac{1}{15}T_k - \frac{T_{oc2}}{3}\right] + Fq = 0; \\
&\frac{\partial J}{\partial T_j} = 0; \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{2\lambda}\left[-\frac{16}{3}T_i + \frac{32}{3}T_j - \frac{16}{3}T_k\right] + \pi r_1 h_1 \lambda\left[\frac{2}{15}T_i + \frac{16}{15}T_j + \frac{1}{15}T_k - \frac{4T_{oc1}}{3}\right] + \\
&+ \pi r_2 h_2 \lambda\left[\frac{2}{15}T_i + \frac{16}{15}T_j - \frac{2}{15}T_k - \frac{4T_{oc2}}{3}\right] = 0; \\
&\frac{\partial J}{\partial T_k} = 0; \Rightarrow \frac{FK_{xx}}{2\lambda}\left[\frac{2}{3}T_i - \frac{16}{3}T_j + \frac{14}{3}T_k\right] + \pi r_1 h_1 \lambda\left[-\frac{1}{15}T_i + \frac{2}{15}T_j + \frac{4}{15}T_k - \frac{T_{oc1}}{3}\right] + \\
&+ \pi r_2 h_2 \lambda\left[-\frac{1}{15}T_i + \frac{2}{15}T_j + \frac{4}{15}T_k - \frac{T_{oc2}}{3}\right] + Fh_kT_k - Fh_kT_{ock} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Здесь следует отметить, что для того чтобы получит более точные численные решения рассматриваемые труба дискретизируется большими количествами квадратичных элементов. Вследствие чего число уравнений в системе увеличивается. Число уравнений: *чу*=2(*чкэ*)+1; где *чкэ* - число квадратичных конечных элементов в трубе. Для того чтобы получить конкретный численный результат значение параметров в системе уравнении (5) примем следующими:

$K_{xx} = 72\left[\dfrac{Bm}{(см\cdot{}^{o}C)}\right]$; $r_1 = 4\,[см]$; $r_2 = 2\,[см]$; $\lambda = 15\,[см]$; $h_1 = 10\left[\dfrac{Bm}{(см^2\cdot{}^{o}C)}\right]$;

$h_2 = 5\left[\dfrac{Bm}{(см^2\cdot{}^{o}C)}\right]$; $h_k = 8\left[\dfrac{Bm}{(см^2\cdot{}^{o}C)}\right]$; $T_{oc1} = 40\,[{}^{o}C]$; $T_{oc2} = 20\,[{}^{o}C]$; $T_{ock} = 30\,[{}^{o}C]$;

$F = \pi(r_1^2 - r_2^2) = 12\pi\,[см^2]$; $q = -150\left[\dfrac{Bm}{см^2}\right]$;

При этих исходных данных система (5) имеет следующий вид

$$\left.\begin{aligned} 334{,}4\cdot T_i - 53{,}6\cdot T_j - 30{,}8\cdot T_k &= 10800\\ -53{,}6\cdot T_i + 1107{,}2\cdot T_j - 53{,}6\cdot T_k &= 36000\\ -30{,}8\cdot T_i - 53{,}6\cdot T_j + 430{,}4\cdot T_k &= 11880 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Решая последнего получим, что

$$T_i = 41{,}33\ {}^{o}C;\ T_j = 36{,}21\ {}^{o}C;\ T_k = 35{,}07\ {}^{o}C.$$

Тогда распределение поля температур по длине трубы имеет следующий вид

$$T(x) = \frac{\lambda^2 + 3\lambda x + 2x^2}{\lambda^2}\cdot 41{,}33 + \frac{4(\lambda x - x^2)}{\lambda^2}\cdot 36{,}21 + \frac{2x^2 - \lambda x}{\lambda^2}\cdot 35{,}07.$$

Удлинение трубы от распределения поля температур по ее длине определяется следующим образом [3].

$$\Delta\lambda_T = \int_0^{\lambda}\alpha T(x)dx = \alpha\int_0^{\lambda}\left[\varphi_i(x)\cdot T_i + \varphi_j(x)\cdot T_j + \varphi_k(x)\cdot T_k\right]dx = \frac{\alpha\lambda}{6}(T_i + 4T_j + T_k) = 0{,}0069\ см.$$

Как сказано выше при необходимости численных решений высокой точности рассматриваемая труба дискретизируется большими количествами квадратичных конечных элементов, вследствие чего решение рассматриваемой задачи приводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с большими количествами уравнений. Предлагаемый вычислительный алгоритм и соответствующий к ним численный метод являются относительно универсальными. Универсальность, которых, заключается в том, что с их помощью можно учитывать все существующие многочисленные неоднородные граничные условия.

Литература

1. Ноздрев В.Ф. Курс термодинамики. М.: Просвещение, 1967.
2. Сегерлинд Л., Применение метода конечных элементов, М.: «Мир», 1979.
3. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов, “Вища Школа”, Киев, 1973, 672 с.