ЖУМАШЕВА Т.У.
lib.knu@mail.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА "НЕФТЬ-ВОДА"

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова,
г. Шымкент, Республика Казахстан

Проблемы повышения эффективности и совершенствования функционирования и управления многосвязными непрерывными технологическими; системами с распределенными и сосредоточенными параметрами, к которым относятся объекты добычи нефти и газа. В настоящее время в условиях дефицита энергетических ресурсов имеют первостепенную народнохозяйственную значимость в топливно-энергети-ческом балансе Республики Казахстан, так как нефть вместе с газом играет ведущую роль в объеме различных видов первичной энергии, а потребность в ней в ближайшее время будет, ещё больше расти. В настоящее время действуют несколько нефтяных и нефтегазовых месторождений в Республике. Повышение эффективности их эксплуатации является одной из актуальных задач энергообеспечения Республики.

Добыча нефти и таза происходит в сложнейших условиях, эффективность эксплуатации месторождения зависит от степени адекватности принимаемых решений по проектированию и управлению. Адекватность принимаемых решений зависит от степени соответствия математических моделей, вычислительных алгоритмов и программно-инструментальных средств, для анализа и прогнозирования технологических показателей разработки нефтегазовых месторождений современным требованиям.

При разработке нефтяных, и газовых месторождений в условиях водонапорного режима наблюдается продвижение контурных или подошвенных вод. В математическом отношении такие процессы формулируются как задачи с подвижной границей раздела и представляют собой, краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными с однородными и неоднородными граничными условиями [1]. При этом математическая модель задачи с подвижной границей раздела нефть-вода описываются системой дифференциальных уравнений параболического типа в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{{}_1h_1}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\kappa_1 h_1}{\mu_1}\right)=2\alpha m_1 h_1\frac{\partial p_1}{\partial t},(x,y)\in G_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\kappa_2 h_{21}}{\mu_2}\frac{\partial p_{21}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\kappa_2 h_2}{\mu_2}\right)=\left(I-\alpha_{ocm}\right)\beta * h_2\frac{\partial p_2}{\partial t},(x,y)\in G_2 \quad (1)$$

В качества начальных, граничных и внутренних условий берутся:

$$t=0;\, p_1=p_2=p_H(x,y),(x,y)\in G_1 U G_2 \quad (2)$$

$$c_1 q_N^{(1)}=\oint\frac{k_1 h_1}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial n_1}ds,(x,y)\in S_1, i=\overline{1,N_Q} \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial n_3}=0,\quad (x,y)\in \Gamma_2 \quad (4)$$

$$p_1(x,y)=p_2(x,y),\ (x,y)\in \Gamma_1 \tag{5}$$

$$\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial n_2}=\frac{k_2}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial n_2},\ (x,y)\in \Gamma_1 \tag{6}$$

$$-\frac{\partial l}{\partial t}=\frac{k_2}{\mu_2 m_2(\alpha-\alpha_{ост})}\frac{\partial p_2}{\partial n_2};\ l(0)=\delta(x,y),(x,y)\in \Gamma_1 \tag{7}$$

Здесь n_2 - внутренняя нормаль к границе раздела;

l - вектор скорости, направленный по внутренней нормали;

β - коэффициент упругоемкости пласта в области водоносности;

q_i - дебит I - ой нефтяной скважины;

N_q - число скважин;

s_i - контур I - ой скважины;

Γ_1 - контур подвижной границы раздела нефть-вода;

C_1 - коэффициент приведения к размерности;

P_1, p_2 - давление в области нефтеносности и водоносности;

k_1, k_2 - коэффициент проницаемости пласта;

m_1, m_2 - коэффициенты пористости;

h_1, h_2 - мощность пласта;

μ_1,μ_2 - коэффициенты динамической вязкости;

α - коэффициенты нефтенасышенности;

$a_{ост}$ - коэффициент остаточной нефтенасышенности;

n_1,n_2,n_3 - нормали соответственно к контурам S, Γ_1, Γ_2.

Система (1) с соответствующими краевыми условиями (2-7) решается численно с помощью метода дифференциальной прогонки [2].

Область фильтрации G_1UG_2 покрывается сеточной областью $\Omega_{\delta\delta}$, образованной регулярной сеткой координатных линий:

$$\Omega_{\delta\delta}=\{x_i=i\delta, y_i=i\delta, i=1,Nj, j=1,M_i\},$$

где N_j - число узлов на прямой y_j;

M_i - число узлов на прямой x_i;

δ- шаг сетки.

Для получения дифференциально-разностной задачи используется алгоритмическая идея неявной схемы переменных направлений, что позволяет применить метод дифференциальной прогонки вдоль каждой из прямых координатных линий.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx_\lambda}\left(\sigma_1 p_1^{(\lambda)}\dfrac{dp_1^{(\lambda)}}{dx_\lambda}\right)-\dfrac{1}{0.5_\tau}p_1^{(\lambda)}=-\dfrac{p_1^{(\lambda-1)}}{0.5\tau}-\Lambda_{(\lambda-1)}\left[\sigma_1 p_1^{(\lambda-1)}\right] \\ \dfrac{d}{dx_\lambda}\left(\sigma_2\dfrac{dp_2^{(\lambda)}}{dx_\lambda}\right)-\dfrac{R^*}{0.5_\tau}p_2^{(\lambda)}=-\dfrac{R^* p_2^{(\lambda-1)}}{0.5\tau}-\Lambda_{(\lambda-1)}\left[\sigma_2 p_2^{(\lambda-1)}\right] \end{cases} \tag{8}$$

Здесь

$$\tau_k\le\tau\le\tau_{k+1};\lambda=1.2;x_1=x;x_2=y;\sigma_1=kh\mu_1,\sigma_2=kh\mu_2;$$

$$\Lambda_{(0)}\left[\sigma p^{(0)}\right]=\frac{\sigma_{i+0.5j}p_{i+1j}^{(0)}-(\sigma_{i+0.5j}+\sigma_{i-0.5j})p_{ij}^{(0)}+\sigma_{i-0.5j}p_{i-1j}^{(0)}}{\delta^2};$$

$$\Lambda_{(1)}\left[\sigma p^{(1)}\right]=\frac{\sigma_{ij+0.5}p_{ij+1}^{(1)}-(\sigma_{ij+0.5}+\sigma_{ij-0.5})p_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij-0.5}p_{ij-1}^{(1)}}{\delta^2};$$

$p_{i,j}^{(0)}$ - значение давления на к-ом слое;

$p_{i,j}^{(1)}$ - значение давления на к(+0.5)-ом слое.

Полученная система решается методом дифференциальной прогонки вдоль каждой из прямых $x_i(\lambda = 1)$ с начальными условиями, известными при $\tau = \tau_k$, а затем вдоль каждой из прямых $y_j(\lambda = 2)$

Положения границы раздела определяется по формуле (7) и на каждом временном слое она уточняется методом итерации. При этом итерационный процесс продолжается до тех пор пока не выполнится условие

$$\max_{ij}\left|l_{i,j}^{(s)} - l_{i,j}^{(s-1)}\right| \le e$$

e - заранее заданная малая положительная величина;

s - число итерации $s=1,2,3,4,..$

Использование метода дифференциальной прогонки в качестве метода сквозного счета обусловлено тем, что в нем автоматически учитываются внутренние условия, в частности условия сопряжения.

Для численной реализации дискретной модели на ПЭВМ можно использовать следующий вычислительный алгоритм;

Видно что, двумерная дифференциальная задача с подвижной границей раздела (1-7) легко преобразуется в дифференциально-разностную задачу с помощью продольно-поперечной схемы и решается методом дифференциальной прогонки. Прогоночные коэффициенты дифференциальной прогонки определяются как решение следующей задачи Коши.

Для определения левых прогоночных коэффициентов

$$\begin{cases} k_i \dfrac{du_i}{dx} = v_i \\ \dfrac{dv_i}{dx} = Q_i u_i \\ \dfrac{dw_i}{dx} = R_i u_i \end{cases}$$

начальные условия для системы определяются из левого граничного условия. $u_i = u_{10} / k_1,\ v_1 = v_{10},\ w_1 = w_{10}$

Для определения правых прогоночных коэффициентов

$$\begin{cases} k_i \dfrac{d\alpha_i}{dx} = \beta_i \\ \dfrac{d\beta_i}{dx} = Q_i \alpha_i \\ \dfrac{d\gamma_i}{dx} = R_i \alpha_i \end{cases}$$

начальные условия для системы определяются из правого граничного условия.

$\alpha_n = \alpha_{10} / k_n,\ \beta_{n1} = \beta_{n0},\ \gamma_{n1} = \gamma_{n0}$

На границе области фильтрации могут выполняться одно из условий: первого рода; второго рода и смешанно.

Если на границе области фильтрации известны значения давлений, т. е. задано первое краевое условие, тогда начальные условия задачи Коши принимают следующий вид соответственно на левой и правой части границы: $u_1 = 0,\ \ v_1 = -1,$ $w_1 = P_г;\ \ \alpha_n = 0,\ \beta_n = -1,\ \ \gamma_n = P_г;$

Если на границе области фильтрации задан поток, т. е. задано второе краевое условие, тогда начальные условия задачи Коши принимают следующий вид соответственно на левой и правой части границы: $u_1 = 1,\ v_1 = 0,\quad w_1 = f_Г;$ $\alpha_m = 0, \beta_m = 0,\ \gamma_m = f_Г;$

$f_Г$ - известная функция. Если $f_Г = 0$, то граница непроницаема.

В случае, когда на одной части области фильтрации задается условие 1-го рода, а на другой части - условие 2-го рода, т.е. на одной части задано давление, а на другой части - поток, начальные условия задачи Коши определяются аналогично.

Для многосвязной области на внутренних границах задается условие непроницаемости потока и неразрывности давления. Эти условия выполняются автоматически на переходе границы раздела двух фаз при применении метода дифференциальной прогонки. В процессе последовательного нахождения значений $u_i(x), v_i(x), w_i(x)$ при переходе от одной фазы к другой, в качестве начальных условий используются предыдущие значения этих функций.

Численное интегрирование задач Коши осуществляется методом Рунга - Кутта с использованием процедуры нормировки прогоночных коэффициентов и коэффициентов метода Рунге-Кутта.

В каждом итерационном шаге при вычислении вектора U_{i+1} в правую часть системы уравнений подставляются вместо Ц нормированный вектор

$$\overline{U_1}(где U = (u, v, w) или U = (\alpha, \beta, \gamma)).$$

Процедура нормировки может быть опущено, если выбранный метод устойчиво решает задачи Коши.

Рассмотрим алгоритм решения задачи с подвижной границей раздела нефть-вода.

1. Начало.

2. Ввод исходных данных: вязкости нефти и воды; проницаемость пласта; пористость; коэффициенты упругоемкости пласта в области нефтеносности и водоносности соответственно; информация о конфигурации сеточной области; шаг по времени; время, выделенное в процесс решения; максимальная размерность сеточной области; точность итерационного процесса для определения границы раздела; дебиты скважины; мощность пласта; начальные пластовые давления.

3. Определение дискретных шагов по сетке.

4. Формирование информации о сеточной области фильтрации.

5. Определение начальных точек координат *(x,y) Г* изолинии границы раздела в сеточной области.

6. Решение системы дискретных уравнений (8) по переменной *x* методом переменных направлений:

6.1. Определение начальных значений прогоночных коэффициентов *u(x),v(x), w(x)* на левой части контура *Г*;

6.2. Вычисление значений прогоночных коэффициентов *u(x), v(x), w(x)* (для всех *j= 1,2,3, ... ,n)* методом Рунге - Кутта (прямой ход);

6.3. Определение начальных значений прогоночных коэффициентов *а(x), β(x), γ(x)* на правой части контура *Г*;

6. 4, Вычисление значений прогоночных коэффициентов *а(x), β(x), γ(x)* (для всех *j=n,n-1,n-2, ... , 1)* методом Рунге - Кутта (обратный ход);

6. 5, Вычисление значения пластового давления

$$P_i(x)=\frac{\gamma_i(x)U_i(x)-\alpha_i(x)w_i(x)}{\alpha_i(x)v_i(x)-\beta_i(x)U_i(x)};$$

$$\frac{dP_i}{dx}=\frac{1}{k}*\frac{\gamma_i(x)v_i(x)-\beta_i(x)w_i(x)}{\alpha_i(x)v_i(x)-\beta_i(x)U_i(x)}$$

Пункты 6.1. - 6. 5, повторяются для всех *1=1,2,..., m.*

7. Решение системы дискретных уравнений (8) по переменной *у* методом переменных направлений:

7.1. Определение начальных значений прогоночных коэффициентов *u(y),v(y),w(y)* левой части контура *Г*;

7.2. Вычисление значений прогоночных коэффициентов *u(y), v(y), w(y)* (для всех *1 = 1,2,3, ... ,m)* методом Рунге - Кутта (прямой ход);

7.3. Определение начальных значений прогоночных коэффициентов *α(y), β(y),γ(y)* на правой части контура Г;

7.4. Вычисление значений прогоночных коэффициентов *α(y), β(y),γ(y)* (для всех *i=m,m-1,m-2, ...* ,1) методом Рунге-Кутта (обратный ход):

7.5. Вычисление значения пластового давления

$$P_i(y)=\frac{\gamma_j(x)u_j(y)-\alpha_j(y)w_j(y)}{\alpha_i(x)v_i(x)-\beta_i(x)U_i(x)};$$

$$\frac{dP_j}{dy}=\frac{1}{k}*\frac{\gamma_j(y)v_j(y)-\beta_j(y)w_j(y)}{\alpha_j(y)v_j(y)-\beta_j(y)u_j(y)}$$

Пункты 7.1. - 7.5. повторяются для всех j=1,2,…,n.

8. Определение значений положения границы раздела l*(x,y)* решением уравнения (7) методом Рунге Кутта.

9. Уточняется положение границы раздела

$$\max_{ij}\left|l_{i,j}^{(s)}-l_{i,j}^{(s-1)}\right|\le e$$

Если выполняется условие, то осуществляется переход к следующему шагу, в противном случае к шагу 4 для продолжения итерационного процесса для нахождения новых приближений.

10. Проверка условия окончания решения во времени. Если $t_k>T$, то перейти к шагу 11, в противном случае вычислительный процесс продолжается для следующего временного шага, т. е. переход осуществляется к шагу 4.

11. Конец.

Следует отметить, что применение метода дифференциальной прогонки для решения двумерной задачи с подвижной границей раздела дает квадратичную сходимость итерационного процесса при определении положения границы раздела и позволяет получить абсолютно устойчивую вычисленную схему для системы в целом.

Разработанный вычислительный алгоритм легко реализуется на ПЭВМ для других подобных задач теории фильтрации.

Литература

1. Закиров С.Н., Лапук Б.Б. Проектирование и разработка газовых месторождений. М: Наука, 1974
2. Фадеев С.И. О численном решении линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциальной прогонки. // Методы сплайн – функций: Вычислительные системы 75, Новосибирск, 1978.