БЕЙСЕН Н.А.

lib.knu@mail.ru

К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ И ОПТИМАЛЬНО ПРОСТОЙ МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШВАРЦШИЛЬДА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Физический факультет КазНУ им. Аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан

В общей теории относительности (ОТО) задача Шварцшильда, как внешняя задача механики, традиционно ставится как задача о поступательном движении частицы с массой m в центрально-симметричном поле с метрикой [1]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (1)$$

Отсюда, как конечный вывод, следует единственный эффект о смещении перигелия кеплеровского эллипса частицы, выражаемое формулой Эйнштейна

$$\Delta g = \frac{6\pi\gamma m_0}{a\left(1 - e^2\right)c^2}, \qquad (2)$$

где m_0 – масса центрального тела, g – угол, определяющий положение перигелия в плоскости орбиты.

Следует отметить, что рассмотрение ведется в координатном представлении.

Однако, сейчас стало ясно [2], что традиционная постановка задачи Шварцшильда, только как задачи о поступательном движении материальной частицы с массой m в поле центрального тела с массой m_0 не достаточно корректная, точнее не достаточно полная. Мы должны ставить задачу Шварцшильда, как задачу о поступательно-вращательном движении материальной частицы с массой m в поле центральной массы m_0. Если есть поступательное движение частицы, то в механике ОТО (теории гравитации Эйнштейна) автоматически существует вращательное движение материальной частицы (речь идет о собственном вращении!). Механика ОТО – релятивистская и собственное вращение материальной частицы (пробное тело) с массой m тоже релятивистский эффект. Только в нерелятивистской теории тяготения (теория гравитации Ньютона) задача о движении материальной частицы с массой m в поле центрального тела с массой m_0 (задача Кеплера) поступательное движение не зависит от вращательного движения и наоборот, и это обстоятельство видно из уравнений движения:

$$\dot{\vec{v}} = -\frac{\gamma m_0}{r^3}\vec{r}, \quad \dot{\vec{\omega}} = 0, \qquad (3)$$

Тогда как в задаче Шварцшильда, поставленной на основе правильной (корректной) метрики первого приближения [2,3,4].

$$ds^2 = \left\{c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2}\int \frac{\rho'\left(\frac{3}{2}v^2 + \Pi - U\right)' - P'_{kk}}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}\left(dx'\right)^3\right\}dt^2 -$$

$$-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^2+dx_2^2+dx_2^2\right)+\frac{8}{c^2}\left(U_1dx_1+U_2dx_2+U_3dx_3\right)dt \quad , \tag{4}$$

где ρ' – плотность массы, $\vec{v}'$ – скорость вещества внутри тела, Π' – упругая энергия единицы массы, P'_{ik} – трехмерный тензор напряжений, $U, \vec{U}'$ – ньютонов и вектор потенциалы гравитационного поля:

$$U=\gamma\int\frac{\rho'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dx'dy'dz',\ U_i=\gamma\int\frac{(\rho v_i)'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dx'dy'dz'. \tag{5}$$

Полная (замкнутая) система уравнений движения задачи Шварцшильда имеют вид [2,4]

$$\begin{cases}\dot{\vec{v}}=\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\dot{\vec{P}}}{m}-\frac{\vec{P}}{mc^2}\frac{d}{dt}\left(3U+\frac{P^2}{2m^2}\right),\\ \frac{d\vec{\omega}}{dt}=-\frac{3m_0}{mc^2}\frac{d}{dt}rot\vec{U}_M.\end{cases} \tag{6}$$

где $U=\frac{\gamma m_0}{r}$, $\vec{U}_M=\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{M}\vec{r}\right]$, $\vec{M}$ – момент импульса частицы,

$$\dot{\vec{P}}=-\frac{\gamma mm_0}{r^3}\vec{r}-\frac{mU}{c^2}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}+\frac{3P^2}{2mc^2}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}} \quad , \tag{7}$$

скорость движения частицы рассматривается как функция канонических переменных $\vec{r}$ и $\vec{P}$, т.е. $\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},\vec{P})$. Скорость материальной частицы в механике ОТО не является больше функцией точки, а является некоторой распределенной функцией в определенном канале (полосе).

Отсюда видно, что в задаче Шварцшильда существуют как поступательное, так и вращательное движения материальной частицы с массой m в центрально-симметричном гравитационном поле центрального тела с массой m_0, т.е. эти движения неразрывно связаны.

Уравнения движения, в полной постановке задачи Шварцшильда, (6) можно привести к виду

$$\begin{cases}\frac{d\vec{A}}{dt}=-\frac{2\gamma m_0}{c^2}\left(3U+\frac{2E}{m}\right)\frac{\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{r^3},\\ \vec{\omega}=-\frac{3m_0}{mc^2}rot\vec{U}_M.\end{cases} \tag{8}$$

где $\vec{A}$ – вектор Лапласа, определяющий положение перигелия и имеющий вид

$$\vec{A}=\left[\frac{\vec{P}}{m}\vec{M}\right]-\frac{\gamma mm_0}{r}\vec{r}\ ,\quad E=\frac{p^2}{2m}-mU\ ,\quad \vec{M}=\left[\vec{r}\vec{P}\right] \tag{9}$$

причем $A=\gamma mm_0e$, $E=-\frac{\gamma mm_0}{2a}$. (10)

здесь e – эксцентриситет орбиты, a – большая полуось орбиты.

Усредняя первое из уравнений (8) по периоду обращения частицы T имеем

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right], \tag{11}$$

где

$$\vec{\Omega} = \frac{6\pi\gamma m_0 \vec{e}_M}{Ta\left(1-e^2\right)c^2} = \frac{3\gamma m_0 \vec{M}}{mc^2 a^3 \left(1-e^2\right)^{3/2}}, \tag{12}$$

угловая скорость вращения перигелия в плоскости орбиты, $\vec{e}_M$ – единичный вектор в направлении момента импульса $\vec{M}$.

Усредняя выражение для $\vec{\omega}$ в (11) по периоду обращения материальной частицы T, получим

$$\vec{\omega} = \frac{3\gamma m_0 \vec{M}}{2mc^2 a^3 \left(1-e^2\right)^{3/2}}, \tag{13}$$

Сравнивая угловую скорость собственного вращения материальной частицы (пробного тела), т.е. выражение (13) с угловой скоростью вращения орбиты как целого (10) поучим

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}, \tag{14}$$

т.е. эти частоты кратные.

Теперь переходим к другому вопросу – об оптимальной и простой методике решения задачи Шварцшильда.

Действительно, еще раз напомним ситуацию с поступательным движением материальной частицы m в поле центрального тела с массой m_0.

Во-первых, в нерелятивистской постановке мы имеем дело с кеплеровым движением (эллипсом) с сохраняющимися векторами (интегралами движения) $\vec{M}$ и $\vec{A}$.

Во-вторых, в механике ОТО, в частности, в задаче Шварцшильда, релятивистские возмущения массы $\left(\sim \frac{1}{c^2}\right)$ и следовательно, ньютоновский эллипс может только вращаться (как бы твердое тело с одной закрепленной точкой).

В такой ситуации, как нам кажется, самым естественным способом рассмотрения (методикой) задачи Шварцшильда является применение гамильтонового формализма, с каноническими переменными $\vec{M}$ и $\delta\vec{\varphi}$ (вектор бесконечно малого поворота).

При таком подходе гамильтониан

$$H = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} - \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M c^2}, \tag{15}$$

где M_0 – адиабатический инвариант системы и имеет вид

$$M_0 = \frac{M}{\sqrt{1-\frac{A^2}{\alpha^2}}}, \quad \alpha = \gamma m m_0. \tag{16}$$

В случае задачи Кеплера гамильтониан H не зависит от орбитального момента $\vec{M}$ (канонический импульс).

В случае задачи Шварцшильда гамильтониан H, согласно (15), зависит, точнее, обратно пропорционально M.

Из-за этого и возникает вращение ньютоновского эллипса. Действительно, гамильтонова форма уравнений движения кеплерового эллипса будет

$$\frac{\delta\vec{M}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\vec{\phi}}, \quad \frac{\delta\vec{\phi}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\vec{M}}. \qquad (17)$$

отсюда вытекает

$$\vec{M} = const, \quad \vec{\Omega} = \frac{3m\alpha^4}{M_0^3 M^3}\vec{M}. \qquad (18)$$

Если вспомнить, что согласно кеплеровой задаче [2],

$$P^* = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad a = \frac{M_0^2}{m\alpha}, \quad e = \frac{A}{\gamma m m_0}, \qquad (19)$$

то выражение (18) можно приводить к форме (12), т.е. эйнштейновской угловой скорости вращения эллипса как целого.

Основной вывод: применение гамильтонового формализма, с каноническими переменными $\vec{M}$, $\delta\vec{\phi}$, т.е. $H = H\left(M_0, M, \delta\vec{\phi}\right)$ позволяет автоматически записать решение задачи Шварцшильда.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1973, – 400 с.
2. М.М. Абдильдин. Механика теории гравитации Эйнштейна. Алма-Ата. 1988., –198 с.
3. М.М. Абдильдин. Проблема движения тел в общей теории относительности. Алматы. Қазақ университеті. 2006, – 152 с.
4. М.М. Абдильдин, М.Е. Абишев. Аналогия между уравнениями вращательного движения тел в ОТО и первой уравнений поля в электродинамике. Известия РК, 2006, ¹2, серия физ.-мат. с. 21-23.