САЛЕЙДИНОВ К.И
lib.knu@mail.ru

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ДИСКРЕТНЫХ И КОНТИНУУМЕ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек

В работе [1] рассмотрен интегральный оператор

$$\left(\mathrm{K}^{-1}\Psi\right)(t) \equiv \frac{1}{t}\left[\Psi(t) - \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds\right], \ -1 \le t \le 1 \qquad (1)$$

и в работах [1, 2] определены два дискретных собственных значений $\pm\lambda_0 \notin [-1;\ 1]$ и континуум собственных значений, принимающий все значения интервала $\lambda \in (-1;\ 1)$.

Соответствующие дискретных и континуум собственных элементов интегрального оператора (1) определялись в виде

$$\Psi_{\pm\lambda_0}(t) = \frac{\pm\lambda_0 c}{2}\cdot\frac{1}{\pm\lambda_0 - t}, \quad \pm\lambda_0 \notin [-1;\ 1], \qquad (2)$$

$$\Psi_{\lambda}(t) = \frac{\lambda c}{2}\mathrm{V}p\frac{1}{\lambda - t} + \mathrm{W}(\lambda)\delta(\lambda - t), \ \lambda \in (-1;\ 1), \qquad (3)$$

где $\mathrm{V}p\dfrac{1}{\lambda - t}$ - главное значение по Коши;

δ - дельта – функция Дирака;

$$\mathrm{W}(\lambda) = 1 - \frac{c\lambda}{2}\mathrm{V}p\int_{-1}^{1}\frac{1}{\lambda - t}dt = 1 - \frac{\lambda c}{2}\ln\left|\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right|. \qquad (4)$$

Для произвольного элемента $\varphi(t)$ рассматриваемого пространства (которое будет определено ниже) решаем уравнение

$$\left(\mathrm{K}^{-1}\Psi\right)(t) = \varphi(t).$$

Тогда легко найти обратный оператор к оператору K^{-1}.

$$\frac{1}{t}\left[\Psi(t) - \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds\right] = \varphi(t), \qquad (5)$$

обозначим

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1}\Psi(s)ds. \qquad (6)$$

Тогда

$$\Psi(t) - \frac{c}{2}\mathrm{A} = t\varphi(t) \ \text{ или } \ \Psi(t) = \frac{c}{2}\mathrm{A} + t\varphi(t). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{c}{2}\mathrm{A} + s\varphi(s)\right)ds \quad \text{или} \quad \mathrm{A}(1 - c) = \int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds.$$

Отсюда $\mathrm{A} = \dfrac{1}{1 - c}\displaystyle\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds$ и $\Psi(t) = t\varphi(t) + \dfrac{c}{2(1 - c)}\displaystyle\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds$.

Следовательно, обратный оператор к оператору K^{-1} есть

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=t\varphi(t)+\frac{c}{2(1-c)}\int_{-1}^{1}t\varphi(t)dt \qquad (8)$$

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек

В работе [1] рассмотрен интегральный оператор

$$\left(\mathrm{K}^{-1}\Psi\right)(t)\equiv\frac{1}{t}\left[\Psi(t)-\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds\right],\ -1\le t\le 1 \qquad (1)$$

и в работах [1, 2] определены два дискретных собственных значений $\pm\lambda_0\notin[-1;\ 1]$ и континуум собственных значений, принимающий все значения интервала $\lambda\in(-1;\ 1)$.

Соответствующие дискретных и континуум собственных элементов интегрального оператора (1) определялись в виде

$$\Psi_{\pm\lambda_0}(t)=\frac{\pm\lambda_0 c}{2}\cdot\frac{1}{\pm\lambda_0-t},\quad \pm\lambda_0\notin[-1;\ 1], \qquad (2)$$

$$\Psi_{\lambda}(t)=\frac{\lambda c}{2}\mathrm{V}p\frac{1}{\lambda-t}+\mathrm{W}(\lambda)\delta(\lambda-t),\ \lambda\in(-1;\ 1), \qquad (3)$$

где $\mathrm{V}p\dfrac{1}{\lambda-t}$ - главное значение по Коши;

δ - дельта – функция Дирака;

$$\mathrm{W}(\lambda)=1-\frac{c\lambda}{2}\mathrm{V}p\int_{-1}^{1}\frac{1}{\lambda-t}dt=1-\frac{\lambda c}{2}\ln\left|\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right|. \qquad (4)$$

Для произвольного элемента $\varphi(t)$ рассматриваемого пространства (которое будет определено ниже) решаем уравнение

$$\left(\mathrm{K}^{-1}\Psi\right)(t)=\varphi(t).$$

Тогда легко найти обратный оператор к оператору K^{-1}.

$$\frac{1}{t}\left[\Psi(t)-\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds\right]=\varphi(t), \qquad (5)$$

обозначим

$$\mathrm{A}=\int_{-1}^{1}\Psi(s)ds. \qquad (6)$$

Тогда

$$\Psi(t)-\frac{c}{2}\mathrm{A}=t\varphi(t)\ \text{ или }\ \Psi(t)=\frac{c}{2}\mathrm{A}+t\varphi(t). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), имеем

$$\mathrm{A}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{c}{2}\mathrm{A}+s\varphi(s)\right)ds\quad\text{или}\quad \mathrm{A}(1-c)=\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds.$$

Отсюда $\mathrm{A}=\dfrac{1}{1-c}\displaystyle\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds$ и $\Psi(t)=t\varphi(t)+\dfrac{c}{2(1-c)}\displaystyle\int_{-1}^{1}s\varphi(s)ds$.

Следовательно, обратный оператор к оператору K^{-1} есть

$$(\mathrm{K}\varphi)(t)=t\varphi(t)+\frac{c}{2(1-c)}\int_{-1}^{1}t\varphi(t)dt. \qquad (8)$$