ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК 535.41: 778.38

ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ АПЕРТУРЫ РЕГУЛЯРНОГО ОБЪЕКТА НА ЭФФЕКТ ТАЛЬБОТА

ИСМАНОВ Ю. Х., ОМУРЗАКОВ К. С.
КГТУ им. И.Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

Эффект Тальбота достаточно подробно изучен для регулярных объектов неограниченной апертуры. В данной статье рассматривается влияние ограничений апертуры объекта на формирование саморепродукций при освещении параллельным пучком света регулярного объекта ограниченной апертуры.

Эффект безлинзового формирования изображений периодических структур впервые был зарегистрирован Тальботом в 1836г. [1].

Первое теоретическое обоснование этому явлению для случая простых линейных решеток типа Ронки, дал Рэлей [2]. Он показал, что, если осветить решетку G плоской волной, то на расстояниях кратных $z = 2d^2/\lambda$, где d – период решетки, λ - длина освещающей волны, возникают изображения решетки – саморепродукции S (рис. 1)

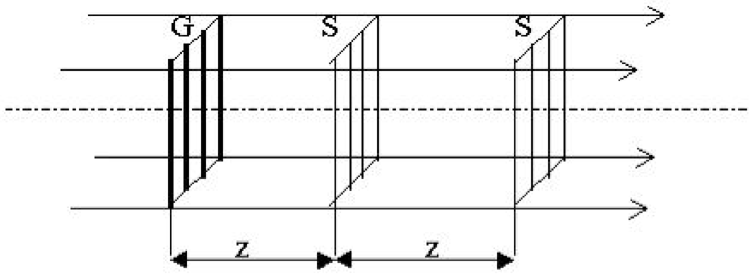

Рис.1. Эффект Тальбота. G-линейная решетка, S-саморепродукции решетки.

Функция пропускания решетки может быть представлена как Фурье – разложение вида

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi jmx/d), \qquad (1)$$

где d – период решетки.

С учетом приближения Гудмена [3] запишем выражение для поля на расстоянии *z* от плоскости решетки в виде $u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz}\iint\limits_{\infty} u(x_0, y_0, z_0^{+})\exp\{\frac{j\pi}{\lambda z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\}dx_0 dy_0$ (2)

Выражение (2) – представляет собой дифракционный интеграл в виде преобразования Френеля, которое получается как параксиальное приближение общего дифракционного интеграла.

Дифракционный интеграл (2) можно рассчитать аналитически. С этой целью представим экспоненту под интегралом в виде произведения двух экспонент, причем сомножитель, не зависящий от переменных интегрирования, вынесем за знак интеграла. После преобразований получаем

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz}\exp[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)]\iint\limits_{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi jmx_0/d)\times$$
$$\times\exp[\frac{jk}{2z}(x_0^2 + y_0^2)]\exp[\frac{jk}{2z}(2x_0x + 2y_0y)]dx_0dy_0 \qquad (3)$$

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz}\exp[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)]\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int\limits_{\infty}\exp(2\pi jmx_0/d)\times$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\times\exp\frac{jkx_0^2}{2z}\exp(\frac{jk}{2z}2x_0x)[\int_{\infty}\exp(\frac{jky_0^2}{2z})\exp(\frac{jk}{2z}2yy_0)dy_0]dx_0 \qquad (4)$$

Рассмотрим в (4) внутренний интеграл по переменной y_0. Для удобства расчета этого интеграла сделаем замены следующего вида: $\alpha = \pi/(\lambda z)$, $\xi = =y/(\lambda z)$, $\omega = 2\pi\xi$. Обозначим указанный интеграл буквой A. $A=\int_{\infty}\exp(\frac{jky_0^2}{2z})\exp(\frac{jk}{2z}2yy_0)dy_0 =$

$\int_{\infty}\exp(j\alpha y_0^2)\exp(j2\pi\xi y_0)dy_0$. (5) Интеграл (5) представляет собой одномерное преобразование Фурье от функции $\exp(j\alpha y_0^2)$. Воспользовавшись свойствами преобразования Фурье [4], найдем значение интеграла (4): A

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp(j\pi/4)\exp[-j\omega^2/(4\alpha)] \qquad (6)$$

Возвращаясь к исходным переменным получаем $A =$

$$\sqrt{\lambda z}\exp(j\pi/4)\exp\{j\frac{4\pi^2y^2}{\lambda^2z^2}/[4\pi/(\lambda z)]\} = \quad =\sqrt{\lambda z}$$

$$\exp(j\pi/4)\exp(-j\frac{\pi}{\lambda z}y^2) \qquad (7)$$

Обозначим интеграл по переменной x_0 буквой B. Согласно (4) B =

$$\int_{\infty}\exp(j2\pi m x_0/d)\exp(\frac{jkx_0^2}{2z}\exp(\frac{jk}{2z}2x_0x)dx_0 \qquad (8)$$

Этот интеграл сходен с интегралом (5), но, в отличии от него, в подъинтегральной функции появляется сомножитель в виде экспоненты от функции пропорциональной переменной x_0. Так как интеграл (8), также как интеграл (5), является одномерным преобразованием Фурье, то, согласно теореме сдвига для этого преобразования, мы должны получить значение интеграла (7) со сдвигом равным постоянному коэффициенту перед переменной x_0 в показателе упомянутой ранее экспоненты

$$B=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp(j\pi/4)\exp[-j(\omega' - \frac{2\pi m}{d})^2/(4\beta)], \qquad (9)$$

где $\beta = \pi/(\lambda z)$, $\eta = x/(\lambda z)$, $\omega' = 2\pi\eta$ - замены переменных аналогичные заменам при интегрировании по y_0.

После возврата к исходным переменным получаем для B: $B =$

$$\exp(j\pi/4)\exp[-j4\pi^2(\frac{x^2}{\lambda^2z^2} - 2\frac{mx}{\lambda zd} + \frac{m^2}{d^2})\frac{\lambda z}{4\pi}] =$$

$$=\sqrt{\lambda z}\exp(j\pi/4)\exp(-j\frac{\pi}{\lambda я}x^2)\exp[j2\pi(\frac{mx}{d} - \frac{m^2\lambda z}{2d^2})]. \qquad (10)$$

Теперь мы можем записать окончательное выражение для поля на расстоянии z от плоскости решетки

$$u_z(x,y,z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz}\exp[\frac{jk}{2z}(x^2+y^2)]\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m A\times B =$$

$$=\frac{\exp(jkz)}{jkz}\exp[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)]\exp[-j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)]\lambda z\exp(j\pi/2)\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\times$$

$$\times\exp[j2\pi(\frac{mx}{d} - \frac{m^2\lambda z}{2d^2})] = \frac{\lambda^2\exp(jkz)}{j2\pi}\exp(j\pi/2)\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\exp[j2\pi\times$$

$$\times(\frac{mx}{d} - \frac{m^2\lambda z}{2d^2})] \qquad (11)$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Из (11) видно, что на расстояниях, определяемых соотношением $z=\frac{2d^2}{\lambda}M$, где M = 1,2,3,…, выражение (11) с точностью до несущественных фазовых множителей повторяет выражение для поля сразу за решеткой (1). Иными словами на расстояниях кратных $z_T = \frac{2d^2}{\lambda}$ решетка как бы репродуцирует свои изображения – возникают распределения, которые называют саморепродукциями.

Выражение (11) получено в соответствие с параболическим приближением. Однако важным условием применимости этого приближения является требование, чтобы последующий член разложения показателя экспоненты $\exp[\,jk(z^2+r^2)^{0.5}]$ в импульсном отклике $G_1(r)$ был мал, например меньше $10^{-2}\pi$ [61], т. е. в разложении мы пренебрегаем слагаемыми $k(x-x_0)^4/8z^3 < \pi/100$ и $k(y-y_0)/8z^3 < \pi/100$. Тогда, учитывая $x-x_0 = m\lambda z/d$ (m – номер дифракционного порядка, d – период решетки), получим, что выражение (11) описывает распределение поля за решеткой с ограниченным пространственным спектром

$$|m| \le |L| \approx (d/\lambda)(\lambda/25z)^{0.25} \qquad (12)$$

Если период решетки взять равным $d = 5\times 10^{-4}$ м, длину волны падающего на решетку излучения $\lambda = 6\times 10^{-7}$ м, а расстояние $z = 2d^2/\lambda$, т. е. постоянной Тальбота, то $|m| \le 20$. Гармоники высших порядков $|m| > |L|$ также участвуют в формировании интерференционной картины в плоскости воспроизведения, однако, не повышают контрастность картины, а выступают как шум.

Приведенные выше рассуждения верны только для периодических объектов неограниченных размеров. В реальной ситуации мы имеем дело с объектами, имеющими ограниченные размеры, и было бы естественно, если выражение (11) можно было обобщить на случай объектов с ограниченной апертурой.

Зададим апертуру решетки в виде

$$C(x_0, y_0) = \begin{cases} 1 & \text{при} \ |x_0| \le a, |y_0| \le a \\ 0 & \text{при} \ |x_0| > a, |y_0| > a, \end{cases} \qquad (13)$$

где 2a - апертура решетки, (x_0, y_0) – координаты плоскости решетки. Учет апертуры изменяет пределы интегрирования в (3) и, следовательно, пределы интегрирования в (5) и (8). Интеграл (5) принимает вид [5,6]

$$A = \int_{-a}^{a} \exp(\,j\alpha y_0^2)\exp(\,j2\pi\xi y_0)dy_0 \qquad (14)$$

Разложим этот интеграл на два слагаемых

$$A = \int_{0}^{a} \exp(\,j\alpha y_0^2)\exp(\,j2\pi\xi y_0)dy_0 - \int_{0}^{-a} \exp(\,j\alpha y_0^2)\exp(\,j2\pi\xi y_0)dy_0 \qquad (15)$$

Согласно [4] $\int_{0}^{a} \exp(\,j\alpha y_0^2)\exp(\,j2\pi\xi y_0)dy_0 =$

$\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\exp[-j\omega^2/(4\alpha)][F(a\sqrt{\alpha}-\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})+F(\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})]$, где $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{x}\exp(\,jy^2)dy^2$ - интеграл Френеля, $\omega = 2\pi\xi$.

Отсюда выражение (15) преобразуется к виду $A = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\exp[-j\omega^2/(4\alpha)][F(a\sqrt{\alpha} - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}) - F(-\sqrt{\alpha a} - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})]$ (16)

Или, переходя к исходным переменным

$$A = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\exp(-j\frac{\pi}{\lambda z}y^2)\{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-y)] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-y)]\} \qquad (17)$$

По аналогии для (9), с учетом сдвига на $2\pi m/d$, получаем

$$B = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\exp(-j\frac{\pi}{\lambda z}x^2)\{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-x+\frac{m\lambda z}{d})] - - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-x+\frac{m\lambda z}{d})]\}. \qquad (18)$$

Окончательное выражение для поля на расстоянии z от плоскости решетки с ограниченной апертурой, с учетом (12), имеет вид $u_z(x, y, z) = 1/2\lambda z$

$$\exp(jkz)\sum_{m=-L}^{L} a_m \exp[j2\pi(\frac{mx}{d} - \frac{m^2\lambda z}{2d^2})]\times$$

$$\times\{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-y)] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-y)]\}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\exp(-j\frac{\pi}{\lambda z}x^2)\{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-x+\frac{m\lambda z}{d})] - - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-x+\frac{m\lambda z}{d})]\}. \qquad (19)$$

$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \exp(jy^2)dy$ - описывает спираль Корню, которая подчиняется условию lim $F(\xi)$ = ½(1+i) при $\xi \to \infty$. Т. е. при $\xi >> 1$ распределение поля за решеткой с ограниченной апертурой близко к распределению за бесконечной решеткой. В частности, при $z = \frac{2d^2}{\lambda}M$, где M = 0,1,2,3,…, распределение повторяет поле на решетке, т. е. воспроизводится с точностью до быстро меняющихся множителей в первых M гармониках.

Из (19) следует, что влияние конечной апертуры решетки на распределение поля мало, если $(a - \frac{L\lambda z}{d}) - |x| >> \sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}}$. В плоскостях воспроизведения это условие имеет вид

$a - 2LMd - |x| >> d\sqrt{2M/\pi}$. (20) Из (20) видно, что ухудшение распределения поля по краям происходит из – за дифракции на апертуре 2a в области размером порядка $\sqrt{\lambda z}$, а также, вследствие наклонного распространения пространственных гармоник, в области размером ~ $L\lambda z/d$. При этом на расстояниях $z \geq d^2/(M^2\lambda)$ преобладают искажения второго рода [7].

Литература

1. Talbot H. F. Facts relating to optical science. // Phil. Mag.- 1836.- ser. 3.- v. 9.- No. 56.- p.p. 401-404
2. Rayleigh One coping diffraction grating and one some phenomena connected therewith. // Phil. Mag.- 1881.- ser. 5.- v. 11.- No.67.- p.p. 169 – 173
3. Гудмен Д. Введение в Фурье – оптику. -М.: Мир, 1970.- 311 с.
4. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. -М: Мир, 1971.- 496 с.
5. Исманов Ю. Х., Ишмаков Р. Синтез голограммы Френеля периодических объектов. // Традиции и новации в культуре университетского образования: Труды Международной научной конференции, ч. 2.- Бишкек, 1998.- с. 46 – 51
6. Исманов Ю. Х., Марипов А. Многоканальный интерферометр Тальбота. // Доклады международной конференции «Проблемы управления и информатики».- Бишкек, 2000.- стр. 208-212
7. Коряковский А. С., Марченко В. М., Прохоров А. М. Дифракционная теория метода тальбот – интерферометрии и диагностика широкоапертурных волновых фронтов. // Труды института общей физики.- М., 1987.- т. 7.- с. 33 - 90