УДК.517.928.977

ДЕКОМПОЗИЦИЯ МЕДЛЕННЫХ И БЫСТРЫХ ДВИЖЕНИЙ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЕ С ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИМИ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

ИМАНАЛИЕВ З.К.
КГТУ им.И.Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

Изложен способ декомпозиции медленных и быстрых координатов сингулярно возмущенной управляемой системы. Эквивалентная система, полученная при полном разделении движений обладает всеми свойствами исходной системы и она состоит из двух подсистем, которые связаны только по управлению.

Исследуется также существование и единственность решения уравнения, появляющиеся при замене исходной системы к эквивалентной системе, у которой разделены медленные и быстрые составляющие вектора состояния.

The way of decomposition slow and fast of the indignant controlled system is stated. The equivalent system received at complete division of movements has all properties of initial system and she it consists of subsystems, which are connected only on management.

The existence and uniqueness of the decision of the equations appearing at replacement of initial system to equivalent system is investigated also which the slow and fast components of a vector of a status are divided.

Рассмотрим задачу разделения уравнений динамики сингулярно возмущенной управляемой системы

$$\dot{y}(t,\mu) = A(t,\mu)y(t,\mu) + B(t,\mu)u(t) + f(t,\mu), \qquad (1)$$

$$y(t_i) = y^i, \quad i = 0,1,$$

где
$$A(t,\mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{1}{\mu}A_3(t) & \frac{1}{\mu}A_4(t) \end{pmatrix}, \qquad y(t,\mu) = \begin{pmatrix} x(t,\mu) \\ z(t,\mu) \end{pmatrix}, \qquad B(t,\mu) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \frac{B_2(t)}{\mu} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$f(t,\mu) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \frac{1}{\mu}f_2(t) \end{pmatrix}, \qquad A_1(t)-(n\times n), \quad A_2(t)-(n\times m), \quad A_3(t)-(m\times n), \quad A_4(t)-(m\times m)$$

$B_1(t)-(n\times r)$, $B_2(t)-(m\times r)$, $f_1(t)-(n\times 1)$, $f_2(t)-(m\times 1)$ - непрерывные матрицы; $x(t)\in R^n$, $z(t)\in R^m$ – векторы медленных и быстрых координат системы (1), $u(t)$ - r мерное управляющая вектор-функция; μ - малый положительный параметр, $t\in[t_0,t_1]$, вектор функции $f_1((t)$, $f_2(t)$ - характеризуют постоянно действующие внешние силы.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I.Матрицы $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $A_4(t)$ – определены, равномерно ограничены и равномерно непрерывны со своими производными при $t\in[t_0,t_1]$.

II. Собственные значения матрицы $A_4(t)$ подчиняется неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t) \le \gamma < 0, \quad (i=\overline{1,m}), \qquad (3)$$

где γ - некоторая постоянная.

При этих предположениях в системе (1) производим разделение движений.

Введем замену переменных [1]:

$$z(t,\mu) = \tilde{z}(t,\mu) + Hx(t,\mu), \qquad (4) \qquad\qquad x(t,\mu) = \tilde{x}(t,\mu) - \mu N\tilde{z}(t,\mu), \qquad (5)$$

где матрицы $H = H(t,\mu)$, $N = N(t,\mu)$ имеют размерности $m \times n$, $n \times m$ соответственно, и будут определены через параметры системы (1). Тогда из (4) и (5) будем иметь соотношения:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ -H & E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \qquad (6) \qquad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N \\ H & E_m - \mu HN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Обозначим $$M(t,\mu) = M = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N \\ H & E_m - \mu HN \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

тогда $$M^{-1} = \begin{pmatrix} E_n - \mu NH & \mu N \\ -H & E_m \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Легко проверить, что при известных H и N, $M \cdot M^{-1} = E_{n+m}$.

Так как $y = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$, $\tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$, то соотношения (6) и (7) записываются как

$$\tilde{y} = M^{-1} \cdot y, \qquad y = M \cdot \tilde{y}. \qquad (10)$$

Для нестационарной системы матрицы H и N зависят от t и μ. Тогда из второго соотношения (10) будем иметь

$$\dot{y} = \dot{M} \cdot \tilde{y} + M \cdot \dot{\tilde{y}}. \qquad (11)$$

С учетом (10) и (11), система (1) преобразуется как

$$\dot{\tilde{y}} = (M^{-1}AM - M^{-1}\dot{M})\tilde{y} + M^{-1}Bu + M^{-1}f. \qquad (12)$$

Запишем уравнение (12) в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1(H) + N(-\mu H\tilde{A}_1(H) + A_3 + A_4H - \mu\dot{H}) & \mu\dot{N} - \mu\tilde{A}_1(H)N + N\tilde{A}_4(H) + A_2 + \mu N(\mu\dot{H} + \mu H\tilde{A}_1(H) - A_3 - A_4H)N \\ \frac{1}{\mu}(-\mu\dot{H} - \mu\tilde{A}_1(H) + A_3 + A_4H) & \frac{1}{\mu}\tilde{A}_4(H) + (\mu\dot{H} + \mu H\tilde{A}_1(H) - A_3 - A_4H)N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1(H,N) \\ \frac{1}{\mu}\tilde{B}_2(H) \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(H,N) \\ \frac{1}{\mu}\tilde{f}_2(H) \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где

$$\tilde{A}_1(t,\mu) = \tilde{A}_1(H) = A_1(t) + A_2(t)H(t,\mu), \qquad \tilde{A}_4(t,\mu) = \tilde{A}_4(H) = A_4(t) - \mu H(t,\mu)A_2(t), \qquad (14)$$

$$\tilde{B}_1(t,\mu) = \tilde{B}_1(H,N) = B_1(t) + N(t,\mu)\tilde{B}_2(t,\mu), \qquad \tilde{B}_2(t,\mu) = \tilde{B}_2(H) = B_2(t) - \mu H(t,\mu)B_1(t),$$

$$\tilde{f}_1(t,\mu) = \tilde{f}_1(H,N) = f_1(t) + N(t,\mu)\tilde{f}_2(t,\mu), \quad \tilde{f}_2(H) = f_2(t) - \mu H(t,\mu)f_1(t), \; u = u(t,\mu).$$

Для того, чтобы медленные и быстрые переменные состояния системы (1) разделились, потребуем выполнения следующих условий:

$$-\mu\dot{H} - \mu H\tilde{A}_1(H) + A_3 + A_4H = 0 \quad \text{и} \quad \mu\dot{N} - \mu\tilde{A}_1(H)N + N\tilde{A}_4(H) + A_2 = 0.$$

Отсюда имеем следующие матричные уравнения, из которых можно определить матрицы - функции H и N:

$$\mu\dot{H} = -\mu HA_0 + A_3 + A_4H - \mu HA_2\left(H + A_4^{-1}A_3\right), \qquad (15)$$

$$\mu\dot{N} = \mu A_0N - NA_4 + \mu NHA_2 + \mu A_2\left(H + A_4^{-1}A_3\right)N - A_2, \qquad (16)$$

где $A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$.

Если H и N удовлетворяют уравнениям (15) и (16), то из (13) будем иметь

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1(H) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu}\tilde{A}_4(H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1(H,N) \\ \frac{1}{\mu}\tilde{B}_2(H) \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(H,N) \\ \frac{1}{\mu}\tilde{f}_2(H) \end{pmatrix}$$

или

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_1(H)\tilde{x} + \tilde{B}_1(H,N)u + \tilde{f}_1(H,N), \qquad (17)$$

$$\mu\dot{\tilde z} = \tilde A_4(H)\tilde z + \tilde B_2(H)u + \tilde f_2(H). \tag{18}$$

Граничные условия для уравнений (17) и (18) определяются как

$$\tilde x(t_0) = \tilde x^0, \quad \tilde x(t_1) = \tilde x', \quad \tilde z(t_0) = \tilde z^0, \quad \tilde z(t_1) = \tilde z', \tag{19}$$

где $\tilde x^i = x^i + \mu N(t_i)\tilde z^i$, $\tilde z^i = z^i - H(t_i)x^i$, $i = 0,\ 1$.

Уравнения (17), (18) и граничные условия (19) можно переписать в виде

$$\dot{\tilde y} = \tilde A(H)\tilde y + \tilde B(H,N)u + \tilde f(H,N), \qquad \tilde y(t_i) = \tilde y^i, \qquad i = 0,1, \tag{20}$$

где $\tilde y = M^{-1}y = \begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde z\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}x\\ z\end{pmatrix}$, $\tilde B(H,N) = M^{-1}B = \begin{pmatrix}\tilde B_1(H,N)\\ \frac{1}{\mu}\tilde B_2(H)\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}B_1\\ \frac{1}{\mu}B_2\end{pmatrix}$,, (21)

$\tilde f(H,N) = M^{-1}f = \begin{pmatrix}\tilde f_1(H,N)\\ \frac{1}{\mu}\tilde f_2(H)\end{pmatrix}$, $\tilde x$ и $\tilde z$ определяются из (4) и (5), а M^{-1} из (9),

$$\tilde A(H) = \begin{pmatrix}\tilde A_1(H) & 0\\ 0 & \dfrac{\tilde A_4(H)}{\mu}\end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $\tilde A_1(H)$ и $\tilde A_4(H)$ определяются соотношениями (14).

В результате имеем следующее утверждение в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия I, II и дифференцируемые матричные функции $H(t,\mu)$, $N(t,\mu)$ удовлетворяют уравнениям (15) и (16). Тогда систему (1) можно разделить на две подсистемы меньшего порядка, которые содержат соответственно медленные и быстрые координаты системы, причем они связаны только по управлению.

Таким образом, в случае выполнения условий теоремы 1, получим новую систему с разделенными движениями, которая эквивалентна исходной системе, т.к она обладает всеми свойствами (управляемости и стабилизируемости) исходной системы (1). Следовательно, в исследуемых задачах управления в качестве ограничений можно взять дифференциальные связи (17), (18).

ТЕОРЕМА 2. Если $\Phi_*(t,t_0)$ переходная матрица для уравнения

$\dot p(t) = -A_0'(t)p(t)$, а $\Psi(t,t_0,\mu)$ - для уравнения $\mu\dot z(t,\mu) = A_4(t)z(t,\mu)$, то решение уравнения (15) с начальным условием $H(t_0) = H_0$, $(H_0 \in G,\quad G \subset R^{m\times n}$ -ограниченное множество), при $\mu > 0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$H(t,\mu) = \Psi(t,t_0,\mu)H_0\Phi_*'(t,t_0) + \frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)A_3(s)\Phi_*'(t,s)ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)H(s,\mu)A_2(s)\left(H(s,\mu) + A_4^{-1}(s)A_3(s)\right)\Phi_*'(\mathrm{t,s})\mathrm{ds} = \Psi(t,t_0,\mu)H_0\Phi_*'(t,t_0) +$$

$$+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)\left(A_3(s) - \mu H(s,\mu)A_2(s)\left(H(s,\mu) + A_4^{-1}(s)A_3(s)\right)\right)\Phi_*'(\mathrm{t,s})\mathrm{ds}, \quad t \in [t_0,t_1]. \tag{23}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя выражение (23) по t и используя равенства:

$$\dot\Phi_*(t,t_0) = -A_0'(t)\Phi_*(t,t_0), \tag{24}$$

$$\mu\dot\Psi(t,t_0,\mu) = A_4(t)\Psi(t,t_0,\mu), \tag{25}$$

Получим $$\dot H(t,\mu)=\frac{1}{\mu}A_4(t)\Psi(t,t_0,\mu)H_0\Phi_*'(t,t_0)-\Psi(t,t_0,\mu)H_0\Phi_*'(t,t_0)A_0(t)+$$

$$+\frac{1}{\mu^2}A_4(t)\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)\Big(A_3(s)-\mu H(s,\mu)A_2(s)\big(H(s,\mu)+A_4^{-1}(s)A_3(s)\big)\Big)\Phi_*'(t,s)ds-$$

$$-\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)\Big(A_3(s)-\mu H(s,\mu)A_2(s)\big(H(s,\mu)+A_4^{-1}(s)A_3(s)\big)\Big)\Phi_*'(t,s)dsA_0(t)+$$

$$+\frac{1}{\mu}A_3(t)+H(t,\mu)A_2(t)\big(H(t,\mu)+A_4^{-1}(t)A_3(t)\big)=\frac{1}{\mu}A_4(t)[\Psi(t,t_0,\mu)H_0\Phi_*'(t,t_0)+$$

$$+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)\Big(A_3(s)-\mu H(s,\mu)A_2(s)\big(H(s,\mu)+A_4^{-1}(s)A_3(s)\big)\Big)\Phi_*'(t,s)ds]-$$

$$-[\Psi(t,t_0,\mu)H_0\Phi_*'(t,t_0)+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)\Big(A_3(s)-\mu H(s,\mu)A_2(s)\big(H(s,\mu)+A_4^{-1}(s)A_3(s)\big)\Big)\Phi_*'(t,s)ds]A_0(t)+$$

$$+\frac{1}{\mu}A_3(t)+H(t,\mu)A_2(t)\big(H(t,\mu)+A_4^{-1}(t)A_3(t)\big)=\frac{1}{\mu}A_4(t)H(t,\mu)-H(t,\mu)A_0(t)+$$

$$+\frac{1}{\mu}A_3(t)-H(t,\mu)A_2(t)\big(H(t,\mu)+A_4^{-1}(t)A_3(t)\big). \qquad (26)$$

Отсюда будем иметь уравнение (15), ч.т.д.

Покажем теперь, что уравнение (15) (или (23)) имеет единственное решение при $0<\mu\le\mu_0<1$, где μ_0 - некоторая положительная постоянная.

Введем обозначения:

$$H_0(t,\mu)=\Psi(t,t_0,\mu)H_0\Phi_*'(t,t_0)+\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)A_3(s)\Phi_*'(t,s)ds, \qquad (27)$$

$$K(H,t,\mu)=-\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\Psi(t,s,\mu)H(s,\mu)A_2(s)\big(H(s,\mu)+A_4^{-1}(s)A_3(s)\big)\Phi_*'(t,s)ds. \qquad (28)$$

Тогда интегральное уравнение (23) записывается в виде операторного уравнения

$$H(t,\mu)=H_0(t,\mu)+\mu K(H,t,\mu), \qquad (29)$$

где $K(H,t,\mu)$ - интегральный оператор в форме (28).

При $\mu>0,\quad H_0\in G,\quad t\in[t_0,t_1]$ введем обозначения:

$$M_1=\|H_0\|,\quad M_2=\max_{t_0\le t\le t_1}\|A_2(t)\|,\ M_3=\max_{t_0\le t\le t_1}\|A_3(t)\|,\ M_4=\max_{t_0\le t\le t_1}\|A_4^{-1}(t)\|, \qquad (30)$$

$$M=\{M_1,\quad M_2,\quad M_3\quad M_4\},$$

т.к. по условию I и II матрицы $A_2(t),\quad A_3(t)$ равномерно ограничены и $A_4(t)$ - устойчивая матрица при $t\in[t_0,t_1]$, тогда будем иметь

$$\|\Psi(t,s,\mu)\|\le C_1e^{-\frac{\lambda_1(t-s)}{\mu}},\qquad \|\Phi_*'(\mathrm{t,s})\|\le C_2e^{\lambda_2(t-s)}, \qquad (31)$$

$$\big(0\le s\le t\le t_1,\quad 0<\mu<\mu_0,\quad \lambda_1>0,\quad \lambda_2>0\big).$$

$$\|H_0(t,\mu)\| \le CMe^{-\frac{\lambda(t-t_0)}{\mu}} + \frac{MC}{\lambda}\left(1-e^{-\frac{\lambda(t-t_0)}{\mu}}\right) \le \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)MCe^{-\frac{\lambda(t-t_0)}{\mu}} + \frac{MC}{\lambda} \le m_1, \qquad (32)$$

где $m_1 > 0, \quad \lambda = \lambda_1\left(1-\frac{\mu\lambda_2}{\lambda_1}\right) > 0, \quad C = C_1 \cdot C_2, \quad \mu < \mu_1, \quad \mu_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

При $\|H(t,\mu)\| \le m_2,$ (33)

$$\|K(H,t,\mu)\| \le m_2\left(1-e^{-\frac{\lambda(t-t_0)}{\mu}}\right)\left(m_2+M^2\right) \le M^*. \qquad (34)$$

Выберем число μ_2 такое, чтобы при любом $\mu \le \mu_2$ было $\|H_0(t,\mu)+\mu K(H,t,\mu)\| \le m_2$. Для этого достаточно выбрать $\mu_2 \le \min\left\{\mu_1, \frac{m_2-m_1}{M^*}\right\}$. (35)

Построим последовательное приближение $H_0, H_1, \dots, H_k, \dots$ по формуле

$$H_{k+1}(t,\mu) = H_0(t,\mu) + \mu K(H_k,t,\mu), \quad k = 0,1,2,\dots \qquad (36)$$

Если $\|H_k(t,\mu)\| \le m_2$ при $t \in [t_0,t_1]$, то $H_{k+1}(t,\mu)$ является непрерывной матричной функцией, заданной на $[t_0,t_1]$ и удовлетворяющей условию

$$\|H_{k+1}(t,\mu)\| \le \|H_0(t,\mu)\| + \mu\|K(H_k,t,\mu)\| \le m_1 + \mu M^* \le m_2. \qquad (37)$$

При k=0 и k=1 имеет место неравенство (37). По индукции это имеет место для всех $k \ge 0$.

Пусть матрицы $A_i(t), \quad (i=\overline{1,4})$ системы (1) определены, равномерно ограничены и равномерно непрерывны вместе со своими производными на $[t_0,t_1]$. Так как $K(H,t,\mu)$ является непрерывной функцией своих аргументов, то можно показать, что существует положительное число L для любых матричных функций $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$, удовлетворяющих неравенствам $\|\overline{H}(t,\mu)\| \le m_2$, $\|\overline{\overline{H}}(t,\mu)\| \le m_2$, такое, что [3]

$$\|K(\overline{H},t,\mu) - K(\overline{\overline{H}},t,\mu)\| \le L\|\overline{H} - \overline{\overline{H}}\| \qquad (38)$$

при и $\mu \le \mu_2$. Вычтем почленно из равенства (36) при k=n-1 это же уравнение при k=n-2. Тогда получим $H_n(t,\mu) - H_{n-1}(t,\mu) = \mu[K(H_{n-1},t,\mu) - K(H_{n-2},t,\mu)]$, (39)

с учетом (38) из (39), имеем $\|H_n(t,\mu) - H_{n-1}(t,\mu)\| \le \mu L \max\limits_{t_0 \le t \le t_1} \|H_{n-1}(t) - H_{n-2}(t)\|$. (40)

Введем обозначение $r_n = \max\limits_{t_0 \le t \le t_1} \|H_n(t,\mu) - H_{n-1}(t,\mu)\|$, (41)

тогда из неравенства (40) будем иметь $r_n \le \mu L r_{n-1}$. (42)

Из рекуррентного соотношения (40) получаем $r_n \le \mu L^{n-1} r_1$, (43)

где $r_1 = \max\limits_{t_0 \le t \le t_1} \|H_1(t,\mu) - H_0(t,\mu)\| \le \mu \max\limits_{\substack{t_0 \le t \le t_1 \\ \|H\| \le m_2, \ \mu < \mu_2}} \|K(H,t,\mu)\| = \mu M^*$.

Из оценки (43) следует, что вышеупомянутый ряд сходится равномерно при $t \in [t_0,t_1]$ и любом выборе $\mu < \mu_3$, где $\mu_3 L = 1$.

Теперь положим $\mu^* = \min\{\mu_2, \mu_3\}$, тогда при $\mu < \mu^*$ построение последовательных приближений (36) оказывается возможным, и последовательность $\{H_k(t,\mu)\}, \quad k = 0,1,\dots$ равномерно сходится на промежутке $[t_0,t_1]$. Предел этой последовательности удовлетворяет уравнению (29) (или (23)).

Рассмотрим матричные дифференциальные уравнения, которые соответствуют к линейным однородным частям уравнения (15), (16):

$$\mu\dot{\overline{H}} = -\mu\overline{H}A_0(t) + A_4(t)\overline{H}\,, \qquad (44) \qquad \mu\dot{\overline{N}} = \mu A_0(t)\overline{N} - \overline{N}A_4(t)\,. \qquad (45)$$

где $\overline{H} = \overline{H}(t,\mu)$, $\overline{N} = \overline{N}(t,\mu)$, $t \in [t_0, t_1]$, $\overline{H} \in R^{m\times n}, \overline{N} \in R^{n\times m}$.

Введем в пространстве $R^{m\times n}$ скалярное произведение [2]

$$\left(\overline{H},\overline{N}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{h}_{ij}\overline{n}_{ji} = Sp(\overline{H}\cdot\overline{N})\,. \qquad (46)$$

Покажем, что уравнение (45) будет сопряженными для однородного матричного уравнения (44). Действительно, если уравнение (45) является сопряженным для (44), то его решение $\overline{N}(t)$ при любом t удовлетворяет условию $\left(\overline{H}(t),\overline{N}(t)\right) = Sp\left(\overline{H}(t)\cdot\overline{N}(t)\right) = const$, где $\overline{H}(t)$ - решение уравнения (44).

На основе указанного определения будем иметь

$$0 = \frac{d}{dt}Sp\left(\mu\overline{H}(t)\cdot\overline{N}(t)\right) = Sp\left(\mu\dot{\overline{H}}(t)\overline{N}(t) + \mu\overline{H}(t)\dot{\overline{N}}(t)\right) =$$
$$= Sp\left(-\mu\overline{H}(t)A_0(t)\cdot\overline{N}(t) + A_4(t)\overline{H}(t)\overline{N}(t) + \mu\overline{H}(t)\dot{\overline{N}}(t)\right).$$

Учитывая свойства след матрицы, получим $0 = Sp\left\{\overline{H}(t)[\mu\dot{\overline{N}}(t) - \mu A_0(t)\overline{N}(t) + \overline{N}(t)A_4(t)]\right\}$.

Это условие должно выполняться при любых $\overline{H}(t)$, $\overline{N}(t)$. Тогда

$$\mu\dot{\overline{N}}(t) - \mu A_0(t)\overline{N}(t) + \overline{N}(t)A_4(t) = 0\,.$$

Отсюда имеем уравнение (45). Теперь запишем уравнение (16) в виде

$$\mu\dot{N}(t) = \mu A_0(t)N(t) - N(t)A_4(t) + \mu\left(A_2(t)\left(H(t) + A_4^{-1}(t)A_3(t)\right)N(t) + N(t)H(t)A_2(t)\right) - A_2(t)\,. \qquad (47)$$

Пусть $H(t)$, $(t_0 \le t \le t_1)$ - решение уравнения (15). Тогда опираясь на основное свойство сопряженного уравнения (оно представляет решение исходного дифференциального уравнения в обратном времени) уравнение (47) можно записать в виде интегрального уравнения

$$N(t) = \Phi(t,t_1)N_1\Psi_*'(t,t_1,\mu) + \int_{t_1}^{t}\Phi(t,s)\left(A_2(s)\left(H(s) + A_4^{-1}(s)A_3(s)\right)N(s) + N(s)H(s)A_2(s)\right)\Psi_*'(t,s,\mu)ds -$$
$$-\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t}\Phi(t,s)A_2(s)\Psi_*'(t,s,\mu)ds\,, \qquad (48)$$

где $\Phi(t,t_1)$, $\Psi_*(t,t_1,\mu)$ являются переходными матрицами для уравнения

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t), \qquad \mu\dot{g}(t,\mu) = -A_4'(t)g(t,)\,, \qquad N_1 = N(t_1)\,.$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Существование и единственность решения уравнения (48) можно доказать аналогично предыдущему случаю.

Следует заметить, что для дифференциального уравнения граничные условия заданы не в начальный момент времени t_0, а в момент окончания переходного процесса. Это следует из основного свойства сопряженного уравнения.

Литература

1. Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Разделение медленных и быстрых процессов в сингулярно-возмущенной управляемой системе //Известия КГТУ им. И. Раззакова. – Б.: «Текник», 2008.- №12. С.173 –178.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1976.- 424 с.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно- возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.