



ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ УРАВНЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ ЛИНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ КРУГОВ МОРА

ДУЙШЕНАЛИЕВ Т.Б., К.Т. КОЙЧУМАНОВ, ИСИРАИЛОВ Т.И.

КГТУ им. И.Раззакова

izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе [1] выведено уравнение огибающей предельных кругов напряжений:

$$\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3'}{1 + \sigma_3'} \quad (1)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3'}{1 + \sigma_3'} \sqrt{\sigma_3'}$$

где:

$$\sigma_3 = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a-b)^2}{8} + \sigma_1^2} \quad (2)$$

$$\sigma_3' = \frac{2\sigma_1}{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{8} + \sigma_1^2}}$$

В уравнение огибающей линии (1) механическое свойство материала входит в виде констант a , b . Если величины этих констант установлены, то уравнение (1) определяет все те напряженные состояния, которые приводят к разрушению материала.

Определение констант по величинам главных напряжений любых двух напряженных состояний трехосного сжатия

Допустим, предел прочности материала не установлен, т.е. материал не испытан на осевое сжатие, все испытания проведены с приложением к боковой поверхности образца гидростатического давления. Величины констант уравнения (2) можно определить, используя и такие опытные данные.

Подставим в первое уравнение (2) величины главных напряжений какого-либо одного разрушающего напряженного состояния

$$\sigma_1 = \sigma_{1r}, \quad \sigma_3 = \sigma_{3r}$$

$$\sigma_{3r} = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a-b)^2}{8} + (\sigma_{1r})^2} \quad , \quad (3)$$

где σ_{1r} , σ_{3r} - измеренные в опытах величины главных напряжений.

Подставим в то же уравнение еще опытные величины главных напряжений какого-либо другого разрушающего напряженного состояния

$$\sigma_1 = \sigma_{1s}, \quad \sigma_3 = \sigma_{3s} \quad ,$$

где σ_{1s} , σ_{3s} - измеренные в опытах величины главных напряжений σ_1 , σ_3 .

$$\sigma_{3s} = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a-b)^2}{8} + (\sigma_{1s})^2} \quad (4)$$

Решим равенства (3) и (4) относительно констант a , b

$$a = \frac{(\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2 - (\sigma_{1r})^2 + (\sigma_{1s})^2}{2(\sigma_{3r} - \sigma_{3s})} +$$

$$+ \sqrt{\frac{((\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2)^2 - ((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{1s})^2)^2}{2(\sigma_{3r} - \sigma_{3s})^2} - (\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{1s})^2 + (\sigma_{3r})^2 + (\sigma_{3s})^2} \quad (5)$$

$$b = \frac{(\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{3s})^2 - (\sigma_{1r})^2 + (\sigma_{1s})^2}{2(\sigma_{3r} - \sigma_{3s})} -$$

и их введем в уравнения (2)



$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_3')^2 - (\sigma_3'')^2 - (\sigma_1')^2 + (\sigma_1'')^2}{2(\sigma_3' - \sigma_3'')} + \sqrt{\frac{(\sigma_3' - \sigma_3'')^2}{4} + \frac{((\sigma_1')^2 - (\sigma_1'')^2)^2}{4(\sigma_3' - \sigma_3'')^2} - \frac{(\sigma_1')^2 + (\sigma_1'')^2}{2} + \sigma_1'^2}$$

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{(\sigma_3' - \sigma_3'')^2}{4} + \frac{((\sigma_1')^2 - (\sigma_1'')^2)^2}{4(\sigma_3' - \sigma_3'')^2} - \frac{(\sigma_1')^2 + (\sigma_1'')^2}{2} + \sigma_1'^2}}$$

Теперь уравнения огибающей линии (1), (2) примут вид

$$\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3'}{1 + \sigma_3'} ,$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma_3'} \sqrt{\sigma_3'}$$

где:

$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_3')^2 - (\sigma_3'')^2 - (\sigma_1')^2 + (\sigma_1'')^2}{2(\sigma_3' - \sigma_3'')} + \sqrt{\frac{(\sigma_3' - \sigma_3'')^2}{4} + \frac{((\sigma_1')^2 - (\sigma_1'')^2)^2}{4(\sigma_3' - \sigma_3'')^2} - \frac{(\sigma_1')^2 + (\sigma_1'')^2}{2} + \sigma_1'^2}$$

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{(\sigma_3' - \sigma_3'')^2}{4} + \frac{((\sigma_1')^2 - (\sigma_1'')^2)^2}{4(\sigma_3' - \sigma_3'')^2} - \frac{(\sigma_1')^2 + (\sigma_1'')^2}{2} + \sigma_1'^2}}$$

Выражение констант уравнения огибающей линии через предел прочности материала на осевое сжатие и величины главных напряжений какого-либо одного разрушающего напряженного состояния

Часто экспериментаторы ограничиваются проведением испытаний материалов только в камерах трехосного сжатия. В таких камерах образцы горных пород и строительных материалов можно довести до разрушения при осевом сжатии без бокового давления (осевое сжатие) и при осевом сжатии с приложением к боковой поверхности образца различных величин гидростатического давления. В таких испытаниях определяются предел прочности на осевое сжатие σ_c , а также ряд величин главных напряжений, при которых образец разрушается.

Таким образом, в таких испытаниях материал не испытывается на осевое растяжение, т.е. предел прочности на осевое растяжение σ_r не определяется. Для таких испытаний величины констант a, b необходимо выразить через величины предела прочности на осевое сжатие и через величины какой-либо пары главных напряжений.

Пусть, в уравнении (5) в качестве главных напряжений σ_1, σ_3 , взяты главные напряжения осевого сжатия:

$$\sigma_1 = \sigma_c, \sigma_3 = 0,$$

где σ_c - предел прочности материала при осевом сжатии. Введем это в уравнения (5):

$$a = \frac{(\sigma_3')^2 - (\sigma_1')^2 + \sigma_c^2}{2\sigma_3'} + \sqrt{\frac{((\sigma_1')^2 - (\sigma_3')^2)^2 + \sigma_c^2(\sigma_c^2 - 2(\sigma_1')^2 - 2(\sigma_3')^2)}{2\sigma_3'^2}}$$

$$b = \frac{(\sigma_3')^2 - (\sigma_1')^2 + \sigma_c^2}{2\sigma_3'} - \sqrt{\frac{((\sigma_1')^2 - (\sigma_3')^2)^2 + \sigma_c^2(\sigma_c^2 - 2(\sigma_1')^2 - 2(\sigma_3')^2)}{2\sigma_3'^2}}$$

и (6):



$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{1r})^2 + \sigma_c^2}{2\sigma_{3r}} + \sqrt{\frac{((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{3r})^2)^2 + \sigma_c^2(\sigma_c^2 - 2(\sigma_{1r})^2 - 2(\sigma_{3r})^2)}{4\sigma_{3r}^2} + (\sigma_1)^2} \quad (10)$$

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{3r})^2)^2 + \sigma_c^2(\sigma_c^2 - 2(\sigma_{1r})^2 - 2(\sigma_{3r})^2)}{4\sigma_{3r}^2} + (\sigma_1)^2}}$$

Теперь уравнения огибающей линий (1), (2) примут вид

$$\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3'}{1 + \sigma_3'} \quad (11)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma_3'} \sqrt{\sigma_3'}$$

где:

$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_{3r})^2 - (\sigma_{1r})^2 + \sigma_c^2}{2\sigma_{3r}} + \sqrt{\frac{((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{3r})^2)^2 + \sigma_c^2(\sigma_c^2 - 2(\sigma_{1r})^2 - 2(\sigma_{3r})^2)}{4\sigma_{3r}^2} + (\sigma_1)^2} \quad (12)$$

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{((\sigma_{1r})^2 - (\sigma_{3r})^2)^2 + \sigma_c^2(\sigma_c^2 - 2(\sigma_{1r})^2 - 2(\sigma_{3r})^2)}{4\sigma_{3r}^2} + (\sigma_1)^2}}$$

Выражение констант уравнения огибающей линии через пределы прочности материала на осевое растяжение и на осевое сжатие

Самыми распространенными механическими характеристиками строительных материалов и горных пород являются пределы их прочности на осевое сжатие и на осевое растяжение, которые обозначим соответственно σ_c и σ_p .

Подставим в уравнения (9) главные напряжения при осевом растяжении

$$\sigma_{1r} = 0, \sigma_{3r} = \sigma_c \quad (13)$$

и выразим константы через пределы σ_c и σ_p

$$a = \frac{\sigma_c^2 + \sigma_p^2}{2 \cdot \sigma_p} + \frac{\sigma_c^2 - \sigma_p^2}{\sqrt{2 \cdot \sigma_p^2}} \quad (14)$$

$$b = \frac{\sigma_c^2 + \sigma_p^2}{2 \cdot \sigma_p} - \frac{\sigma_c^2 - \sigma_p^2}{\sqrt{2 \cdot \sigma_p^2}}$$

Введем равенства (13) в уравнения (10)

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_c^2 + \sigma_p^2}{2 \cdot \sigma_p} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_c^2 - \sigma_p^2}{2 \cdot \sigma_p}\right)^2 + \sigma_1^2} \quad (15)$$

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_c^2 - \sigma_p^2}{2 \cdot \sigma_p}\right)^2 + \sigma_1^2}} \quad (16)$$

Теперь в окончательном виде напишем уравнение огибающей линии предельных кругов напряжений, выраженное через пределы прочности материала на осевое сжатие и на осевое растяжение



$$\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3'}{1 + \sigma_3'} \quad (17)$$

$$\tau = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 + \sigma_3'} \sqrt{\sigma_3'}$$

где:

$$\sigma_3 = \frac{\sigma\sigma^2 + \sigma\rho^2}{2 \cdot \sigma\rho} + \sqrt{\left(\frac{\sigma\sigma^2 - \sigma\rho^2}{2 \cdot \sigma\rho}\right)^2 + \sigma_1^2} \quad (18)$$

$$\sigma_3' = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma\sigma^2 - \sigma\rho^2}{2 \cdot \sigma\rho}\right)^2 + \sigma_1^2}}$$

В уравнение огибающей линии (17) механическое свойство материала входит в виде в виде пределов прочности материала на осевое сжатие и на осевое растяжение. Если величины этих пределов установлены, то уравнение (18) определяет все те напряженные состояния, которые приводят к разрушению данного материала.

Определение предела прочности на осевое растяжение

В камерах трехосного сжатия образцы материала доводятся до разрушения при различных величинах бокового (наименьшего σ_3) и осевого (наибольшего σ_1) главных напряжений. В таких испытаниях сначала определяется и величина предела прочности на осевое сжатие. В этом случае к боковой поверхности образца не прикладывается давление. В таких испытаниях предел прочности на осевое растяжение остается неопределенным.

Можно ли вычислить величину предела прочности из данных таких опытов? Главные напряжения для осевого растяжения

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_3 = \sigma\rho, \quad (19)$$

где $\sigma\rho$ - предел прочности на осевое растяжение. Подставим это в первое из уравнений (10)

$$\sigma\rho = \frac{(\sigma_3_r)^2 - (\sigma_1_r)^2 + \sigma\sigma^2}{2\sigma_3_r} + \sqrt{\frac{((\sigma_1_r)^2 - (\sigma_3_r)^2)^2 + \sigma\sigma^2(\sigma\sigma^2 - 2(\sigma_1_r)^2 - 2(\sigma_3_r)^2)}{4\sigma_3_r^2}} \quad (20)$$

Здесь получено уравнение для теоретического определения предела прочности материала по данным его испытаний в камерах трехосного сжатия. Эти данные обычно даются в виде следующих векторов:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= (0 \quad \sigma_3_1 \quad \sigma_3_2 \quad \dots \quad \sigma_3_n) \\ \sigma_1 &= (\sigma\sigma \quad \sigma_1_1 \quad \sigma_1_2 \quad \dots \quad \sigma_1_n) \end{aligned} \quad (21)$$

где $\sigma\sigma$ - определенная опытами величина предела прочности на осевое сжатие, а σ_3_r, σ_1_r ($r = 1, 2, \dots, n$) - опытные величины предельных главных напряжений. Эти векторы далее будем называть векторами опытных данных трехосного сжатия.

Литература

1. Т.Б.Дуйшеналиев, К.Т.Койчуманов. Уравнение огибающей предельных кругов Мора в параметрической форме. Вестник Кыргызского государственного университета строительства, транспорта и архитектуры. Бишкек, 2003, с. 44-47.

