ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНО – ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

БИЙБОСУНОВ Б.И.,* УМЕТАЛИЕВ М.У.**
КГТУ им. И. Раззакова, КГУ им. И.Арабаева***
izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе рассматривается фильтрация в неоднородно – изотропной среде. Решение уравнения ищется в автомодельной форме и преобразуется к гипергеометрическому уравнению типа Гаусса

Как известно, когда коэффициенты фильтрации среды представлены в виде функций

$$K_1(x,y)=K_2(x,y)=\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^S \qquad (1)$$

тогда уравнение фильтрации имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^S\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^S\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right]=0 \qquad (2)$$

при следующих граничных условиях

$$H(x,y)\,\Big|_{x=N_1}=H_{0,1}(y) \qquad H(x,y)\,\Big|_{x=N_2}=H_{0,1}(y)$$

$$H(x,y)\,\Big|_{y=N'_1}=H_{0,1}(x) \qquad H(x,y)\,\Big|_{y=N'_2}=H_{0,1}(x) \qquad (3)$$

$N_1 \le X \le N_2$ $\qquad$ $N^1_1 \le y \le N^1_2$

В работе [1] решение краевой задачи (2), (3) рассмотрено в автомодельной форме в виде функции $H(x,y)=(ay+b)^m\cdot f(t)$, где $t=\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^n$ (4)

m – показатель автомодельности.

После несложных преобразований получено уравнение

$$t^2\left(1+t^\mu\right)\cdot f''(t)+\left(q+dt^\mu\right)\cdot t\cdot f'(t)+l\cdot f(t)=0 \qquad (5) \qquad \text{где}\quad \mu=\frac{2}{n},$$

$$q=1+\frac{m+s-1}{n}+\frac{m}{na},\qquad d=1+\frac{s+1}{n},\qquad l=\frac{m(m+s-1)}{a\cdot n^2} \qquad (6)$$

Решение уравнения (5) рассмотрено для двух случаев при

$\mu=-1,\quad n=-2,$ и при $\mu=1,\quad n=2$

После ряда преобразований уравнение (5) приведено к гипергеометрическому уравнению типа Гаусса и решение задачи (2) при $\mu=-1,\quad n=-2,$ получено в виде следующих функций

$$H(x,y)=(ay+b)^m\cdot A_1\cdot F\left(-\frac{m+s-1}{2},-\frac{m}{2a},\frac{1-s}{2},-\left(\frac{ax+b_1}{ay+b}\right)^2\right)+$$
$$+(ay+b)^m\cdot B_1\left(\frac{ax+b_1}{ay+b}\right)^2\cdot F\left(-\frac{m-2}{2},-\frac{m-a\cdot(s+1)}{2a},\frac{3+s}{2},-\left(\frac{ax+b_1}{ay+b}\right)^2\right) \qquad (7)$$

При $\mu=1,\quad n=2$

$$H(x,y)=\left[\ (ay+b)^{a-1}\cdot(ax+b_1)\ \right]^{\frac{m}{a}}\cdot\left[\ A_1\cdot F\left(-\frac{m}{2a},\frac{s+1}{2}-\frac{m}{2},\frac{m+s-1}{2},-\frac{m}{2a},-\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^2\right)+\right.$$
$$\left.+B_1\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^{\frac{m}{a}-m-s+1}\cdot F\left(-\frac{m-2}{2},-\frac{m-2}{2},\frac{3-s}{2},-\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^2\right)\ \right] \qquad (8)$$

где A_1, B_1- произвольные постоянные . F- гипергеометрические функции, a,b,s,b_1 – действительные параметры.

В данной статье решение уравнения (5) рассмотрим при $\mu=2,\quad n=1$. Тогда уравнение (5) имеет следующий вид

$$t^2(1+t^2)\cdot f''(t)+(q+dt^2)t\cdot f'(t)+lf(t)=0 \qquad (9)$$

где
$$q=m+s+\frac{m}{a},\quad d=2+s,\quad l=\frac{m(m+s-1)}{a} \qquad (10)$$

Рассмотрим частные случаи когда m=0.
Тогда из уравнения (9) получим уравнение вида

$$t^2(1+t^2)\cdot f''(t)+\left[s+(2+s)t^2\right]\cdot t\cdot f'(t)=0 \qquad (11)$$

Далее

$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=-\frac{\left[s+(2+s)t^2\right]\cdot t}{t^2(1+t^2)} \qquad \frac{f''(t)}{f'(t)}=-\frac{s}{t}-\frac{2t}{1+t^2} \qquad \ln f'(t)=\ln\frac{1}{t^s(l+t^2)}-\ln C_1;$$

$$f'(t)=\frac{C_1}{t^s(1+t^2)} \qquad f(t)=C\int\frac{dt}{t^s(1+t^2)}+C_2 \qquad (12)$$

где C_1, C_2- произвольные постоянные.
Подставляя функцию (12) в формулу (4) получим решение уравнения (2) в следующем виде

$$\mathrm{H}(x,y)=C_1\int\frac{d\left(\dfrac{ay+b}{ax+b_1}\right)}{\left(\dfrac{ay+b}{ax+b_1}\right)^s\cdot\left(1+\left(\dfrac{ay+b}{ax+b_1}\right)^2\right)}+C_2 \qquad (13)$$

где C_1, C_2- произвольные постоянные.

Теперь рассмотрим уравнение (5) при $\mu=-2,\quad n=-1$.

При $\mu=-2,\ n=-1$ уравнение (5) имеет вид

$$t(t^2+1)\cdot f''(t)+(qt^2+d)f'(t)+l\cdot t\cdot f(t)=0 \qquad (14)$$

где
$$q=2-m-s-\frac{m}{a},\quad d=-s,\quad l=\frac{m(m+s-1)}{a} \qquad (15)$$

Рассмотрим частные случаи при $m=0$. Тогда из уравнения (14) получим уравнение вида

$$t(t^2+1)\cdot f''(t)+\left[(2-s)t^2-s\right]\cdot f'(t)=0$$

Далее
$$\frac{f''(t)}{f'(t)}=-\frac{s-(2-s)\cdot t^2}{t(t^2+1)} \qquad \frac{f''(t)}{f'(t)}=-\frac{s}{t(t^2+1)}-\frac{(2-s)t}{t^2+1}$$

$$\ln f'(t)=\ln\frac{t^s}{t^2+1}-\ln C_1; \qquad f'(t)=C_1\cdot\frac{t^s}{1+t^2}$$

$$f(t)=C_1\int\frac{t^s\cdot dt}{1+t^2}+C_2 \qquad (16)$$

где C_1, C_2- произвольные постоянные.
Подставляя функцию (16) в формулу (4) получим решение уравнения (2) в следующем виде

$$\mathrm{H}(x,y)=C_1\int\frac{\left(\dfrac{ax+b_1}{ay+b}\right)^s}{1+\left(\dfrac{ax+b_1}{ay+b}\right)^2}\cdot d\left(\frac{ax+b_1}{ay+b}\right)+C_2 \qquad (17)$$

Как видно из решения (13) и (17) при $s=0$ получаем соответственно решения

$$\mathrm{H}(x,y)=C_1 arctg\frac{ay+b}{ax+b_1}+C_2 \qquad \mathrm{H}(x,y)=C_1 arctg\frac{ax+b_1}{ay+b}+C_2$$

При $s=1$ получим решения соответственно:

$$\mathrm{H}(x,y)=C_1\ln\frac{ay+b}{\sqrt{(ax+b_1)^2+(ay+b)^2}}+C_2 \qquad \mathrm{H}(x,y)=C_1\ln\frac{\sqrt{(ax+b_1)^2+(ay+b)^2}}{ay+b}+C_2$$

При $s=2$ получим решения соответственно

$$H(x,y)=C_1\left[-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{ax+b_1}{ay+b}\right)^3-arctg\left(1+\left(\frac{ay+b}{ax+b_1}\right)^2\right)\right]+C_2$$

$$H(x,y)=C_1\left[\frac{ax+b_1}{ay+b}-arctg\left(\frac{ax+b_1}{ay+b}\right)^2\right]+C_2$$

где C_1 и C_2- произвольные постоянные, которые определяются согласно граничным условиям (3).

Литература

1. Бийбосунов Б.И. Уметалиев М.У. Аналитические и приближенно-аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах. – Б.: Илим, 1998. - 163с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. - 495с .