ОБ ОДНОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА

БИЙБОСУНОВ Б.И.,* УМЕТАЛИЕВ М.У.**
КГТУ им. И. Раззакова, КГУ им. И.Арабаева***
izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе предлагается модель инфильтрации относительно неизвестной функции влажности, которая описывает вертикальный процесс впитывания влаги в грунт и показан разработанный для данного класса инфильтрационных задач приближенно – аналитический метод решения. Решение рассмотрено в автомодельной форме.

Как известно, процесс впитывания влаги в оползневый массив можно моделироват квазилинейным дифференциальным уравнением параболического типа второго порядка

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(w)\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\frac{\partial k(w)}{\partial x} \qquad (1)$$

при следующих начальных и граничных

$$W(x,t)\big|_{t=0}=Q_0(x)$$
$$W(x,t)\big|_{x=0}=Q_0(t) \qquad (2)$$
$$W(x,t)\big|_{x=h}=Q_0(t)$$

где w искомая функция влажности, D(w) и K(w) соответственно коэффициенты диффузии и влагопроводности, в целом их можно называть коэффициентами влагопереноса.
Представим функцию D(w) в виде ряда

$$D(w)=\sum_{i=0}^{\infty}D_i\cdot w^i \qquad (3)$$

и функции $w(x,t)$ *и* $k(w)$ разлагаем в ряд по малому параметру ε в следующем виде

$$w(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}w_i(x,t)\varepsilon^{i+1} \qquad k(w)=\sum_{i=0}^{\infty}k_i w_i\cdot\varepsilon^{i+1} \qquad (4)$$

где $w(x,t)$ неизвестные функции.
Подставляя функции (3) и (4) в уравнение (1)
и приравнивая коэффициенты при
одинаковых степенях ε^i (i=1, 2,…)
получаем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_0}{\partial t}-D_0\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+k_0\cdot\dfrac{\partial w_0}{\partial x}=0\\[2mm]
\dfrac{\partial w_1}{\partial t}-D_0\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+k_1\cdot\dfrac{\partial w_1}{\partial x}=D_1 w_0\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+D_1\left[\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right]^2\\[2mm]
\dfrac{\partial w_2}{\partial t}-D_0\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}+k_2\cdot\dfrac{\partial w_2}{\partial x}=D_1 w_0\cdot\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}+2D_1\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial w_0}{\partial x}+D_1 w_1\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\\[2mm]
+D_2 w_0^2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+2D_2 w_0\left[\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right]^2\\
\dots\dots\dots\quad\dots\dots\dots\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\
\dfrac{\partial w_n}{\partial t}-D_0\dfrac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}+k_n\cdot\dfrac{\partial w_n}{\partial x}=\\[2mm]
=G\left[w_0,w\;,\dots,\;w_{n-1};D_1,D_2,\dots,\;D_{n-1};\dfrac{\partial w_0}{\partial x},\dfrac{\partial w_1}{\partial x},\dots,\;\dfrac{\partial w_{n-1}}{\partial x};\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2},\dots,\;\dfrac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2}\right]\end{cases} \qquad (5)\;.$$

Начальные и граничные условия соответственно имеют вид

$$w_0(x,t)\big|_{t=0}=Q_{00}(x),\qquad 0\le x\le H$$
$$w_0(x,t)\big|_{x=0}=Q_{00}(t),\qquad 0\le t\le T$$
$$w_0(x,t)\big|_{x=h}=Q_{10}(t),\qquad 0\le t\le T$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$w_1(x,t)\big|_{t=0} = Q_{01}(x), \qquad 0 \le x \le H$$
$$w_1(x,t)\big|_{x=0} = Q_{01}(t), \qquad 0 \le t \le T \qquad (6)$$
$$w_1(x,t)\big|_{x=h} = Q_{11}(t), \qquad 0 \le t \le T$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$w_n(x,t)\big|_{t=0} = Q_{0n}(x), \qquad 0 \le x \le H$$
$$w_n(x,t)\big|_{x=0} = Q_{0n}(t), \qquad 0 \le t \le T$$
$$w_n(x,t)\big|_{x=h} = Q_{1n}(t), \qquad 0 \le t \le T$$

Рассмотрим первое уравнение системы (5)

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - D_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + K_0\frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$ начальными и граничными условиями

$$w_0(x,t)\big|_{t=0} = Q_{00}(x), \qquad 0 \le x \le H$$
$$w_0(x,t)\big|_{x=0} = Q_{00}(t), \qquad 0 \le t \le T \qquad (6а)$$
$$w_0(x,t)\big|_{x=h} = Q_{10}(t), \qquad 0 \le t \le T$$

Уравнение (7) с помощью подстановки

$$w_0(x,t) = \widetilde{w}_0(x,t)e^{\alpha_0 t + \beta_0 t} \qquad (8)$$

где α_0 и β_0 неизвестные коэффициенты, преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial \widetilde{w}_0}{\partial t} - D_0\frac{\partial^2 \widetilde{w}_0}{\partial x^2} + (K_0 - 2\beta_0 D_0)\frac{\partial \widetilde{w}_0}{\partial x} + (K_0\beta_0 + \alpha_0 - D_0\beta_0^2)\widetilde{w}_0 = 0 \qquad (9)$$

Если полагаем

$$\alpha_0 = -\frac{K_0^2}{4D_0}, \qquad \beta_0 = \frac{K_0}{2D_0} \qquad (10)$$

то уравнение (9)преобразуется к виду

$$\frac{\partial \widetilde{w}_0}{\partial t} - D_0\frac{\partial^2 \widetilde{w}_0}{\partial x^2} = 0 \qquad (11)$$

Решение уравнения (11) ищем в виде функции

$$\widetilde{w}_0(x,t) = x^n f_0(z)\ , \text{ где } z = \frac{x^2}{t} \qquad (12)$$

Находим $\qquad \dfrac{\partial \widetilde{w}_0}{\partial t} = x^n \cdot f_0'(z)\cdot\left(-\dfrac{x^2}{t^2}\right)$

$$\frac{\partial \widetilde{w}_0(x,t)}{\partial t} = nx^{n-1}\cdot f_0(z) + 2\cdot\frac{x^{n+1}}{t}\cdot f_0'(z)$$

$$\frac{\partial \widetilde{w}_0(x,t)}{\partial x} = nx^{n-1}\cdot f_0(z) + 2\cdot\frac{x^{n+1}}{t}\cdot f_0'(z) \quad (13) \quad \frac{\partial^2 \widetilde{w}_0(x,t)}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}\cdot f_0(z) + 2(2n+1)\cdot\frac{x^n}{t}\cdot f_0'(z) + \frac{4x^{n+2}}{t^2}\cdot f_0''(z)$$

Подставляя частные производеные $\dfrac{\partial \widetilde{w}_0(x,t)}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 \widetilde{w}_0(x,t)}{\partial x^2}$ в уравнение (11) после некоторых преобразований получим

$$z^2\cdot f_0''(z) + \left[\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{z}{4D_0}\right]z\cdot f_0'(z) + \frac{1}{4}n(n-1)f_0(z) = 0 \qquad (14)$$

Рассмотрим частные случаи. При $n = 0$ получим уравнение

$$z^2\cdot f_0''(z) + \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4D_0}\right)z\cdot f_0'(z) = 0. \qquad (15)$$

Далее

$$z^2\cdot f_0''(z) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{4D_0}\right)\cdot z\cdot f_0'(z)$$

$$\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{4D_0}$$

Интегрируя, получим

$$\ln f_0'(z) = -\frac{1}{2}\ln z - \frac{z}{4D_0} + \ln c_1$$

$$\ln\frac{\sqrt{z}\cdot f_0'(z)}{c_1} = -\frac{z}{4D_0}$$

$$f_0'(z) = c_1\cdot\frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{\sqrt{z}}$$

Отсюда $f_0(z) = c_1\int\frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{\sqrt{z}}dz + c_2$ (16)

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.
Подставляя функцию (16) в формулу (12) получим

$$\tilde{w}_0(x,t) = c_1\int\frac{\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{tD_0}}}{x}d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2 \quad (17)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.
Далее подставляя функцию (17) в формулу (8) получим

$$w_0(x,t) = c_1e^{\alpha_0x+\beta_0t}\int\frac{\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{tD_0}}}{x}d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2e^{\alpha_0x+\beta_0t} \quad (18)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.
При $n=1$ получим уравнение

$$z^2\cdot f_0''(z) + \left(\frac{3}{2}+\frac{z}{4D_0}\right)z\cdot f_0'(z) = 0 \quad (19)$$

$$\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{4D_0} \qquad \ln f_0'(z) = -\frac{3}{2}\ln z - \frac{z}{4D_0} + \ln c_1$$

Интегрируя, получим

$$\ln\frac{\sqrt{z^3}\cdot f'(z)}{c_1} = -\frac{z}{4D_0} \qquad f'(z) = c_1\cdot\frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{\sqrt{z^3}} \qquad f(z) = c_1\int\frac{e^{-\frac{z}{4D_0}}}{z\sqrt{z}}dz + c_2 \quad (20)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.
Подставляя функцию (20) в формулу (12) получим

$$\tilde{w}_0(x,t) = c_1\int\frac{t^2}{x^2}e^{-\frac{x^2}{4D_0t}}\cdot d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2x \quad (21)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные.
Далее подставляя функцию (16) в формулу (8) получим

$$w_0(x,t) = c_1e^{\alpha_0x+\beta_0t}\int\frac{t^2}{x^2}e^{-\frac{x^2}{4D_0t}}\cdot d\left(\frac{x^2}{t}\right) + c_2xe^{\alpha_0x+\beta_0t} \quad (22)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные. α_0 и β_0 параметры которые определяются согласно формулам (10). Функции (18) и (22) есть частное решения уравнения первого приближения системы (5) при $n=0$ и $n=1$.

Литература

1. Бийбосунов Б.И. Уметалиев М.У. Аналитические и приближенно аналитические методы фильтрации и инфильтрации жидкости в различных средах. – Б.: Илим, 1998. 163с.
2. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. - 495с.