

УДК 517.977.5

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА,  
ОПИСЫВАЕМОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ФРЕДГОЛЬМА**

*А.К. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова*

Исследована задача нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальным уравнением Фредгольма. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

*Ключевые слова:* краевая задача; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

**SOLUTION OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF THE THERMAL PROCESSES,  
DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*A.K. Kerimbekov, R.Zh. Nametkulova*

The article dedicated to the study of the nonlinear optimal heating control, described by Fredholm integro-differential equations. The sufficient conditions for the unique solvability of the optimization problem have been established.

*Key words:* boundary value problem; the generalized solution; the functional; the optimal control; nonlinear integral-differential equation.

**I. Краевая задача управляемого процесса.** Рассмотрим управляемый процесс, описываемый краевой задачей [1–3]:

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^T K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x) f[t, u(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$v_x(t, 0) = 0, \quad v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где функция  $v(t, x)$ ,  $(t, x) \in Q = \{0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T\}$  описывает состояние управляемого процесса, ядро  $K(t, \tau)$  – известная функция, определенная в квадрате  $A = \{0 < t < T, \quad 0 < \tau < T\}$  и удовлетворяющая условию

$$\iint_{00}^{TT} K^2(t, \tau) d\tau d\tau = K_0 < \infty; \quad (4)$$

$g(t, x) \in H(Q)$ ,  $\psi(x) \in H(0, 1)$ ,  $f[t, u(t)] \in H(0, T)$  – заданные функции, причем функция  $f[t, u(t)]$  нелинейно зависит от функции управления  $u(t) \in H(0, T)$  и по функциональной переменной  $u(t)$  монотонна, т. е.

$$\frac{\partial f[t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \quad \forall t \in [0, T]; \quad (5)$$

$\lambda$  – параметр, постоянная  $\alpha > 0$ ,  $T$  – фиксированный момент времени,  $H(Y)$  – гильбертово пространство функций, определенных на множестве  $Y$ .

Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x). \quad (6)$$

Здесь функции [4]

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x,$$

при каждом фиксированном  $n = 1, 2, 3, \dots$ , является решением краевой задачи

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0, z'(0) = 0, z'(1) + \alpha z(1) = 0 \tag{7}$$

и образует полную ортонормированную систему собственных функций в пространстве  $H(0, 1)$ , а соответствующие собственные значения  $\lambda_n$  краевой задачи (7) определяются как решение трансцендентного уравнения  $\lambda \operatorname{tg} \lambda = \alpha$  и удовлетворяет условиям

$$\lambda_n < \lambda_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, (n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1); \tag{8}$$

коэффициенты Фурье  $v_n(t)$ , согласно методике работы [5], как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма 2-рода вида

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t, s) v_n(s) ds + a_n(t) \tag{9}$$

с ядром

$$K_n(t, s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau \tag{10}$$

и свободным членом

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau, \tag{11}$$

определяется по формуле [6]

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \tag{12}$$

где резольвента  $R_n(t, s, \lambda)$  ядра  $K_n(t, s)$  определяется с помощью повторных ядер  $K_{n,i}(t, s)$  в виде следующего ряда Неймана [6]:

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s) \tag{13}$$

и при выполнении условия

$$|\lambda| \sqrt{K_0 T} < \sqrt{2} \lambda_1, \tag{14}$$

является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$|R_n(t, s, \lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2 - |\lambda| \sqrt{K_0 T}}} \left( \int_0^T K^2(\eta, s) d\eta \right)^{1/2}. \tag{15}$$

Отметим, что в силу условий (6) и (14) каждое управление  $u(t) \in H(0, T)$  определяет единственное слабо обобщенное решение  $v(t, x) \in H(Q)$  краевой задачи (1)–(3).

**II. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности.** Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^T [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \beta > 0, \tag{16}$$

где  $\xi(x) \in H(0, 1)$  – заданная функция, на множестве решений краевой задачи (1)–(3), т. е. нужно найти такое управление  $u^0(t) \in H(0, T)$ , которое вместе с соответствующим ему решением  $v^0(t, x)$  краевой задачи (1)–(3) доставляет наименьшее возможное значение функционалу (16). При этом  $u^0(t)$  называется оптимальным управлением, а  $v^0(t, x)$  – оптимальным процессом.

Поскольку каждое управление  $u(t)$  единственным образом определяет управляемый процесс  $v(t, x)$ , то в силу условия (5) управлению  $u(t) + \Delta u(t)$ , соответствует решение краевой задачи (1)–(3) вида  $v(t, x) + \Delta v(t, x)$ , где  $\Delta v(t, x)$  приращение соответствующее приращению  $\Delta u(t)$ . Согласно методике вывода принципа максимума [4, с. 743–755] приращение функционала (16) можно представить в виде

$$\Delta J[u] = J[u + \Delta u] - J[u] = - \int_0^T \Delta \Pi [t, v(t, x), \omega(t, x), u(t)] dt + \int_0^T \Delta v^2(T, x) dx, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \Pi(t, v, \omega, u) &= \Pi(t, v(t, x), \omega(t, x), u(t) + \Delta u(t)) - \Pi(t, v(t, x), \omega(t, x), u(t)), \\ \Pi(t, v(t, x), \omega(t, x), u(t)) &= \int_0^1 g(t, x) \omega(t, x) dx f[t, u(t)] - \beta u^2(t), \end{aligned} \tag{18}$$

а функция  $\omega(t, x)$  определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda \int_0^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau = 0, 0 < x < 1, 0 \leq t < T,$$

$$\begin{aligned} \omega(T, x) + 2[v(T, x) - \xi(x)] &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ \omega_x(t, 0) = 0, \quad \omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) &= 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [4], как следствие (17), оптимальное управление определяется из соотношений

$$2\beta u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] = \int_0^1 g(t, x) \omega(t, x) dx, \quad (20)$$

$$f_u[t, u(t)] \left( \frac{u(t)}{f_u[t, u(t)]} \right)_u > 0, \quad (21)$$

которые называются условиями оптимальности.

**III. Решение сопряженной краевой задачи.** Решение сопряженной краевой задачи (19) ищем в виде ряда

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x). \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты Фурье  $\omega_n(t)$ , при каждом фиксированном  $n = 1, 2, 3, \dots$ , удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \omega_n'(t) - \lambda_n^2 \omega_n(t) &= -\lambda \int_0^T K(\tau, t) \omega_n(\tau) d\tau, \\ \omega_n(\tau) + 2[v_n(T) - \xi_n] &= 0, \end{aligned}$$

которые можно преобразовать к линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t) = \lambda \int_0^T B_n(s, t) \omega_n(s) ds - 2e^{-\lambda_n^2(T-t)} [v_n(T) - \xi_n], \quad (23)$$

где ядро

$$B_n(s, t) = \int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} K(s, \tau) d\tau \quad \text{и} \quad B_n(s, T) = 0. \quad (24)$$

Решение уравнение (23) находим по формуле [6]

$$\omega_n(t) = -2[v_n(T) - \xi_n] \left( e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T \tilde{R}_n(s, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds \right), \quad (25)$$

где резольвента  $R_n(s, t, \mu)$  ядра  $B_n(s, t)$  имеет вид

$$\tilde{R}_n(s, t, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} B_{n,i}(s, t), \quad B_{n,i+1}(s, t) = \int_0^T B_n(\eta, t) B_{n,i}(s, \eta) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

и при выполнении условия (14) является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$|\tilde{R}_n(s, t, \lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda_n^2 - |\lambda| \sqrt{K_0 T}}} \left( \int_0^T K^2(s, \eta) d\eta \right)^{1/2}. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что  $\omega(t, x)$  является элементом пространства  $H(Q)$ . Это следует из неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \omega^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2(t) dt \leq 8 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(T) - \xi_n]^2 \left( e^{-2\lambda_n^2(T-t)} + \right. \\ &+ \lambda^2 \int_0^T R_n^2(s, t, \lambda) ds \cdot \left. \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-s)} ds \right) dt \leq 8 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(T) - \xi_n]^2 \left( 1 + \lambda^2 \frac{1}{\left( \sqrt{2\lambda_n^2 - |\lambda| \sqrt{K_0 T}} \right)^2} \cdot \right. \\ &\left. \int_0^T \int_0^T K^2(s, \eta) d\eta ds \cdot \frac{1}{2\lambda_n^2} \right) dt \leq 16T \left( 1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left( 2\lambda_n^2 \sqrt{2\lambda_n^2 - |\lambda| \sqrt{K_0 T}} \right)^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (v_n^2(T) - \xi_n^2) < \infty, \end{aligned}$$

которое имеет место в силу следующих соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2(T) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 = \|\xi(x)\|_H^2.$$

**IV. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.** Оптимальное управление находим согласно условиям оптимальности (20) и (21). Решение сопряженной краевой задачи (19), определяемое равенствами (22) и (25), подставим в (20). Сначала вычислим интеграл

$$\int_0^1 g(t, x)\omega(t, x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)z_n(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(t)z_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\omega_n(t)$$

и равенство (20) перепишем в виде

$$\beta u(t)f_u^{-1}[t, u(t)] = -\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)[v_n(T) - \xi_n](e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T \tilde{R}_n(s, t, \lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds).$$

Согласно (12), с учетом (11), это равенство приводим к виду

$$\beta u(t)f_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, \lambda) \int_0^T G_n(s, \lambda) f[s, u(s)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t)h_n, \quad (27)$$

где

$$\tilde{G}_n(t, \lambda) = g_n(t) \left[ e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T \tilde{R}_n(\tau, t, \lambda)e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \right], \quad (28)$$

$$G_n(t, \lambda) = g_n(t) \left[ e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, \tau, \lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)} d\tau \right], \quad (29)$$

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left[ e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, \tau, \lambda)e^{-\lambda_n^2 \tau} d\tau \right]. \quad (30)$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения (27) и при этом должно выполняться условие (21). Условие (21) ограничивает класс функций внешних воздействий  $f[t, u(t)]$ . Поэтому будем считать, что функция  $f[t, u(t)]$  удовлетворяет условию (21) для любого управления  $u(t) \in H(0, T)$ .

Нелинейное интегральное уравнение (27) решается согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [7]. Положим

$$\beta u(t)f_u^{-1}[t, u(t)] = p(t). \quad (31)$$

**Лемма 1.** Функция  $p(t)$  является элементом пространства  $H(0, t)$ .

**Доказательство.** В силу условия (5) имеет место оценка

$$|f_u^{-1}[t, u(t)]| \leq M, \quad \forall t \in [0, T].$$

Так как  $u(t) \in H(0, T)$ , то утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T p^2(t)dt \leq \beta^2 \int_0^T |f_u^{-1}[t, u(t)]|^2 |u(t)|^2 dt \leq \beta^2 M^2 \int_0^T u^2(t)dt < \infty.$$

Согласно условию (21), из равенства (31) управление  $u(t)$  определяется однозначно, т. е. существует функция  $\varphi$  такая, что

$$u(t) = \varphi(t, p(t), \beta). \quad (32)$$

В силу (31) и (32) уравнение (27) перепишем в виде

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, \lambda) \int_0^T G_n(s, \lambda) f[s, \varphi(s, p(s), \beta)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t)h_n \quad (33)$$

или в операторной форме

$$p(t) = G[p(t)], \quad (34)$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, \lambda) \left[ h_n - \int_0^T G_n(s, \lambda) f[s, \varphi(s, p(s), \beta)] ds \right]. \quad (35)$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (34).

**Лемма 2.** Оператор  $G[p(t)]$  отображает пространство  $H(0, T)$  в себя, т. е. является элементом пространства  $H(0, T)$ .

**Доказательство.** Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T G^2[p(t)]dt = \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, \lambda) \left[ h_n - \int_0^T G_n(s, \lambda) f[s, \varphi(s, p(s), \beta)] ds \right] \right)^2 dt \leq \\
 & \leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n^2(t, \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ h_n^2 + \int_0^T G_n^2(s, \lambda) ds \int_0^T f^2[s, \varphi(s, p(s), \beta)] ds \right] dt \leq \\
 & \leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} 2g_n^2(t) \left[ e^{-2\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T \tilde{R}_n^2(\tau, t, \lambda) d\tau \cdot \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \right] \times \\
 & \times \left\{ 2 \left[ \|x\|_H^2 + 2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 K_0}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \cdot \frac{1}{2\lambda_1^2} \right) \|\psi(x)\|_H^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} 2g_n^2(t) \left( 1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \|f[s, \varphi(s, p(s), \beta)]\|_H^2 \right\} dt \leq \\
 & \leq 2 \|g(t, x)\|_H^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \times \{ 2 \|\xi(x)\|_H^2 + \\
 & + 2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 K_0}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \|\psi(x)\|_H^2 + \|g(x)\|_H^2 \left( 1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) \cdot \|f[t, \varphi(t, p(t), \beta)]\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \} < \infty
 \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия:

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \tag{36}$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H. \tag{37}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = \|g(t, x)\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left( 1 + \frac{a_0^2 K_0}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - a_0 \sqrt{K_0 T})^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \tag{38}$$

где  $a_0$  – некоторое положительное постоянное, удовлетворяющее неравенству

$$|\lambda| < a_0 < \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{\sqrt{K_0 T}}, \tag{39}$$

оператор  $G[p]$  является сжимающим.

**Доказательство.** Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left[ \|G[p] - G[\bar{p}]\|_H^2 \right] dt = \int_0^T \left( \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, \lambda) \int_0^T G_n(s, \lambda) (f[s, \varphi(s, p(s), \beta)] - f[s, \varphi(s, \bar{p}(s), \beta)]) ds \right)^2 dt \leq \\
 & \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n^2(t, \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(t, \lambda) ds \int_0^T (f[s, \varphi(s, p(s), \beta)] - f[s, \varphi(s, \bar{p}(s), \beta)])^2 ds dt \leq \\
 & \leq \left[ \|g(t, x)\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left( 1 + \frac{\lambda^2 K_0}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T})^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \|p(s) - \bar{p}(s)\|_H \right]^2,
 \end{aligned}$$

откуда находим, что

$$\|G(p) - G(\bar{p})\|_H \leq \|g(t, x)\|_H^2 \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[ 1 + \frac{\lambda^2 K_0}{(\sqrt{2\lambda_1^2 - |\lambda| \sqrt{K_0 T}})^2} \right] f_0 \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H.$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (4)–(5), (14)–(15), (21), (26), (36)–(39). Тогда операторное уравнение (34) в пространстве  $H(0, T)$  имеет единственное решение.

**Доказательство.** Согласно Лемме 1 и 2, операторное уравнение (34) можно рассматривать в пространстве  $H(0, T)$ . Согласно Лемме 3, оператор  $G[p]$  является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство  $H(0, T)$  является полным метрическим пространством, то согласно теореме [8] о принципе сжимающих отображений, оператор  $G[p]$  имеет единственную неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (34) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (34) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е.  $n$ -е приближение решения находится по формуле

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $p_0(t)$  произвольный элемент пространства  $H(0, T)$ , причем имеет место оценка

$$\|\bar{p}(t) - p_n(t)\|_H \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (40)$$

Точное решение  $\bar{p}(t)$  может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$\bar{p}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t).$$

Это решение подставляя в (32) находим искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]. \quad (41)$$

Оптимальный процесс  $v^0(t, x)$ , т. е. решение краевой задачи (1)–(5), соответствующее оптимальному управлению  $u^0(t)$ , согласно (6), (11)–(12) находим по формуле

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds - a_n(t) \right) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \psi_n \left( e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 t} ds + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u^0(\tau)] d\tau + \lambda \int_0^s R_n(t, s, \lambda) \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\eta)} g_n(\eta) f[\eta, u^0(\eta)] d\eta ds \right) \right] z_n(x). \quad (42)$$

Минимальное значение функционала (17) вычислим по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt. \quad (43)$$

Найденная тройка  $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$  является решением задачи нелинейной оптимизации.

### Литература

1. Верлань А.Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. Киев: Наукова думка, 1988. 288 с.
2. Тихонов А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, Б.В. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
5. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1968. Т. 32. № 4.
6. Краснов М.В. Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
7. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Институт математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
8. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.