УДК 517.977.5

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

А.К. Баетов

Исследованы вопросы разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений оптимального управления. Найдены достаточные условия разрешимости, разработан алгоритм построения приближенного решения задачи оптимизации и доказана их сходимость.

Ключевые слова: нелинейное интегро-дифференциальное уравнение; операторное уравнение; приближенное решение; сходимость.

APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF THE OSCILLATORY PROCESSES

A.K. Baetov

The article studies the solvability of the system of nonlinear integral equations of the optimal control. There were found sufficient conditions for the solvability, developed an algorithm for constructing an approximate solution of the optimization problem and proved their convergence.

Key words: nonlinear integro-differential equation; operator equation; approximate solution; convergence.

Разрешимость системы нелинейных интегральных уравнений оптимального векторного управления. При исследовании нелинейно-квадратичной задачи оптимизации упругих колебаний, рассмотренной в работе [1, с. 114–117], относительно векторного оптимального управления, получена система нелинейных интегральных уравнений

$$\beta u_k(t)=\frac{\partial f[t,\bar{u}(t)]}{\partial u_k}\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t)\left\{h_n-\int_0^T G_n^*(T,\tau)f[\tau,\bar{u}(\tau)]d\tau\right\},k=\overline{1,m}, \tag{1}$$

где

$$G_n(T,t)=\frac{g_n(t)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_t^T P_n(s,t,\lambda_n)\sin\lambda_n(T-s)ds];\quad G_n^*(T,t)=\frac{g_n(t)}{\lambda_n}[\sin\lambda_n(T-t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_t^T R_n(T,s,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-t)ds];$$

$$h_n=\xi_n+\psi_n\left[\cos\lambda_n T+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T R_n(T,s,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau\right]-\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}[\sin\lambda_n T+\frac{1}{\lambda_n}\int_t^T R_n(T,s,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau],$$

С дополнительными условиями

$$\prod_{i=1}^{k} f_{u_i}[t,\bar{u}(t)]\begin{vmatrix}\left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & \left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_2} & \cdots & \left(\frac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_k}\\ \left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_1} & \left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_2} & \cdots & \left(\frac{u_2}{f_{u_2}}\right)_{u_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \left(\frac{u_k}{f_{u_k}}\right)_{u_1} & \left(\frac{u_k}{f_{u_k}}\right)_{u_2} & \cdots & \left(\frac{u_k}{f_{u_k}}\right)_{u_k}\end{vmatrix}>0, k=1,\ldots,m, \tag{2}$$

где $f_{u_k}[t,\bar{u}(t)]$ – частные производные первого порядка по переменной u_k.

По условию задачи

$$f_{u_k}[t,\bar{u}(t)] \neq 0, t \in [0,T], k = 1,...,m. \qquad (3)$$

Поэтому согласно методике работы [2] введем обозначения

$$\beta u_k(t)\left(f_{u_k}[t,\bar{u}(t)]\right)^{-1} = \nu_k(t), k = 1,...,m. \qquad (4)$$

Отсюда, в силу условий (2), функции u_k (t) определяются однозначно, т. е. существуют функции φ_k (·), такие, что

$$u_k(t) = \varphi_k(t,\nu_k(t),\beta), k = 1,...,m. \qquad (5)$$

или

$$\bar{u}(t) = \bar{\varphi}(t,\bar{\nu}(t),\beta), k = 1,...,m,$$

где $\bar{\varphi}(\cdot) = (\varphi_1(\cdot),...,\varphi_m(\cdot))$ и $\bar{\nu}(t) = (\nu_1(t),...,\nu_m(t))$ – вектор-функции.

Систему (1) перепишем в виде

$$\nu_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\left\{h_n - \int_0^T G_n^*(T,\tau) f\left[\tau,\varphi_1(\tau,\nu_1(\tau),\beta),...,\varphi_m(\tau,\nu_m(\tau),\beta)\right]d\tau\right\}, \; k = \overline{1,m} \qquad (6)$$

и исследуем ее разрешимость.

Введем оператор

$$G[\bar{\nu}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\left\{h_n - \int_0^T G_n^*(T,\tau) f[\tau,\varphi_1(\tau,\nu_1(\tau),\beta),...,\varphi_m(\tau,\nu_m(\tau),\beta)]d\tau\right\} \qquad (7)$$

и систему (6) перепишем в операторной форме

$$\nu_k(t) = G[\bar{\nu}(t)]. \qquad (8)$$

Лемма 1. Оператор G [·] отображает пространство $H^m = H \times ... \times H,$ где H - гильбертово пространство, в себя.

Доказательство. В силу (3) выражение $f_{u_k}^{-1}[t,\bar{u}(t)]$ ограничено $\forall$ $t \in [0,T]$. Поэтому если $u_k(t) \in H(0,T),$ то и $\nu_k(t) \in H(0,T),$ т. е. вектор-функция $\bar{\nu}(t) \in H^m(0,T)$ и $\left\|\bar{\nu}(t)\right\|_{H^m}^2 = \int_0^T \sum_{k=1}^m \nu_k^2(t)dt < \infty$.

Покажем, что $G[\bar{\nu}(t)] \in H(0,T)$. Это утверждение следует из неравенства

$$\int_0^T G^2[\bar{\nu}(t)]dt = \int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t)\left[h_n - \int_0^T G_n^*(T,\tau) f\left[\tau,u_1(\tau),...,u_m(\tau)\right]d\tau\right]\right)^2 dt \leq$$

$$\leq 2\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(T,t)\sum_{n=1}^{\infty}\left[h_n^2 + \int_0^T G_n^{*2}(T,\tau)d\tau \int_0^T f^2\left[\tau,u_1(\tau),...,u_m(\tau)\right]d\tau\right]dt \leq 2T\left\|g(t,x)\right\|_{H(Q)}^2 P_0^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{n=1}^{\infty} 3\left[\xi_n^2 + \psi_{1n}^2 R_0^2 + \frac{1}{\lambda_n^2}\psi_{2n}^2 R_0^2\right] + T\left\|g(t,x)\right\|_{H(Q)}^2 R_0^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right] < \infty,$$

которое получено с учетом (5) и неравенств

$$G_n^2(T,t) \leq \frac{1}{\lambda_n^2}\left\|g(t,x)\right\|_H^2 P_0^2, \; G_n^{*2}(T,t) \leq \frac{1}{\lambda_n^2}\left\|g(t,x)\right\|_H^2 R_0^2$$

и равенства $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2} = \left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия

$$\left\|f[t,\bar{u}(t)] - f[t,\tilde{u}]\right\|_{H(0,T)} \leq f_0\left\|\bar{u}(t) - \tilde{u}(t)\right\|_{H^m(0,T)}, \; \left\|\varphi_k[t,\nu_k(t),\beta] - \varphi_k[t,\bar{\bar{\nu}}_k(t),\beta]\right\|_{H(0,T)} \leq \varphi_{0k}\left\|\nu_k(t) - \bar{\bar{\nu}}_k(t)\right\|_{H(0,T)}.$$

Тогда при выполнении условия

$$T\sqrt{m}\left\|g(t,x)\right\|_{H(Q)}^2 P_0 R_0\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right) f_0\varphi_0(\beta) < 1,$$

где $\varphi_0(\beta) = \max\varphi_{0k}(\beta) > 0, k = 1,...,m,$ $f_0>0$, оператор G [·] является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\left\|G[\bar{v}(t)]-G[\bar{\eta}(t)]\right\|^2_{H(0,T)} \le \left(T\|g(t,x)\|^2_H P_0R_0\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right)^2 \left\|f[t,\varphi_1(t,\nu_1(t),\beta),...,\varphi_m(t,\nu_m(t),\beta)]-\right.$$

$$\left.-f[t,\varphi_1(t,\eta_1(t),\beta),...,\varphi_m(t,\eta_m(t),\beta)]\right\|^2_{H(0,T)} \le \left(T\|g(t,x)\|^2_H P_0R_0\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right)^2 f_0 m\varphi_0^2(\beta)\left\|\bar{v}(t)-\bar{\eta}(t)\right\|^2_{H^m(0,T)},$$

из которого следует утверждение леммы.

Теорема. Пусть выполнены условия лемм 1 и 2. Тогда операторное уравнение (8) в пространстве $H^m(0, T)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Пространство H^m (0, T) является полным метрическим пространством, так как оно является декартовым произведением полных метрических пространств Гильберта. Оператор G [·], отображающий пространство H^m в себя, является сжимающим. Поэтому утверждение теоремы следует из известной теоремы о сжимающих отображениях [3].

Решение операторного уравнения (8) может быть найдено методом последовательных приближений и k-ое приближение находится по формуле

$$\bar{v}^{(k)}(t)=G\left[\bar{v}^{(k-1)}(t)\right], \quad k=1,2,3,\ldots,$$

где $\bar{v}^{(0)}(t)$ произвольный элемент пространства $H^m(0,T)$. Точное решение $\bar{v}(t)$ определяется как предел последовательных приближений $\bar{v}^{(k)}(t)$, т. е.

$$\bar{v}(t)=\lim_{k\to\infty}\bar{v}^{(k)}(t)$$

и, как известно [3], имеет место оценка

$$\left\|\bar{v}^{(0)}(t)-\bar{v}^{(k)}(t)\right\|_{H^m(0,T)} \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[\bar{v}^{(0)}(t)\right]-\bar{v}^{(0)}(t)\right\|_{H^m(0,T)}.$$

Построение приближенного решения задачи оптимизации и его сходимость. Согласно формулам (5), точное и приближенное решения системы (1) находим по формулам

$$\bar{u}^0(t)=\bar{\varphi}(t,\bar{v}(t),\beta),$$

$$\bar{u}^k(t)=\bar{\varphi}\left(t,\bar{v}^k(t),\beta\right), \quad k=1,2,3,\ldots.$$

Сходимость приближенного оптимального управления к точному следует из неравенства

$$\left\|\bar{u}^0(t)-\bar{u}^{(k)}(t)\right\|_{H^m(0,T)}=\left\|\bar{\varphi}(t,\bar{v}(t),\beta)-\bar{\varphi}(t,\bar{v}^{(k)}(t),\beta)\right\|_{H(0,T)} \le$$

$$\le \varphi_0(\beta)\left\|\bar{v}(t)-\bar{v}^{(k)}(t)\right\|_{H^m} \le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[\bar{v}^{(0)}(t)\right]-\bar{v}^{(0)}(t)\right\|_{H(0,T)}.$$

Оптимальный процесс $v^0(t,x)$ и его приближения определяются по формулам [1]

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau\right]+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\left[\sin\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau\right]+$$

$$+\int_0^t\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau)+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds)f\left[\tau,\bar{u}^0(\tau)\right]\right)d\tau\Big)z_n(x);$$

$$v^{(k)}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\cos\lambda_n\tau d\tau\right]+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\left[\sin\lambda_n t+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n\tau d\tau\right]+$$

$$+\int_0^t\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau)+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds)f\left[\tau,\bar{u}^{(k)}(\tau)\right]\right)d\tau\Big)z_n(x).$$

Сходимость приближенного оптимального процесса следует из неравенства

$$\left\|v^0(t,x)-v^k(t,x)\right\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t\frac{g_n(\tau)}{\lambda_n}\left(\sin\lambda_n(t-\tau)+\int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right)\left[f\left(\tau,\bar{u}^0(\tau)\right)-f\left(\tau,\bar{u}^k(\tau)\right)\right]d\tau\right)^2 dt \le$$

$$\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{g_n^{\,2}(\tau)}{\lambda_n^{\,2}} \left[\sin\lambda_n(t\text{-}\tau) + \int_0^t R_n(t,\tau,\lambda_n)\sin\lambda_n(s\text{-}\tau)ds \right]^2 d\tau \times$$

$$\times \int_0^T \left[f(\tau,\overline{u}^0(\tau)) - f(\tau,\overline{u}^{(k)}(\tau)) \right]^2 d\tau dt \leq T\|g(t,x)\|^2 R_0^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0^2 \left\| -\overline{u}^{(k)}(t) \right\|_{H^m}^2, k \to \infty,$$

т. е. $\left\| v^0(t,x)\text{-}v^k(t,x) \right\|_{H(Q)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

Минимальное значение функционала и его приближенное значение находим по формулам [1]

$$I\left[\overline{u}^0(t)\right] = \int_0^1 \left[v^0(T,x)\text{-}\xi(x) \right]^2 dx + \beta \left\| \overline{u}^0(t) \right\|_{H^m(0,T)}^2, \ \beta > 0;$$

$$I\left[\overline{u}^{(k)}(t)\right] = \int_0^1 \left[v^{(k)}(T,x)\text{-}\xi(x) \right]^2 dx + \beta \left\| \overline{u}^{(k)}(t) \right\|_{H^m(0,T)}^2, \ \beta > 0.$$

Сходимость k-го приближения следует из неравенства

$$\left| I\left[\overline{u}^0(t)\right]\text{-}I\left[\overline{u}^{(k)}(t)\right] \right| \leq C_0 \left\| v^0(T,x)\text{-}v^{(k)}(T,x) \right\|_{H(Q)} + C_1 \left\| \overline{u}^0(t)\text{-}\overline{u}^{(k)}(t) \right\|_{H^m(0,T)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

которое доказывается непосредственным вычислением.

Литература

1. *Керимбеков А.К.* О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов / А.К. Керимбеков, А.К. Баетов // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2012. Вып. 44.
2. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Институт математики НАН КР / А.К. Керимбеков. Бишкек, 2003. 224 с.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.