СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫВОДА ФОРМУЛ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

АСАНБАЕВА Д.А., БАЙБАГЫСОВА Д.Ж., ШАМРАЛИЕВ М.И.
ТТИ КГТУ им. И.Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

В данной статье показан новый, простой и краткий метод вывода формул векторного анализа.
Simple and new short method of vector analyses is shown in this article.

Вывод некоторых формул векторного анализа символическим методом, который применяется в физике и технике. Данный метод упрощает вывод формул векторного анализа путем применения символического вектора grad («градиент») или оператора Гамильтона - ∇ («набла»).

Символический вектор grad обозначается через ∇ («набла») – оператора Гамильтона и единичного вектора $\vec{n}$ - следующим образом:

$$\text{grad} = \nabla = \vec{n}\frac{\partial}{\partial n} \qquad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - частная производная по модулю п единичного вектора $\vec{n}$.
Применяя этот символический вектор (1) , выведем некоторые формулы векторного анализа:
Градиент скалярной величины показывает непрерывное изменение скалярной величины с расстоянием.
Градиент скалярного произведения двух скалярных величин φ и ψ :

$$\nabla(\varphi,\psi) = \vec{n}\frac{\partial}{\partial n}(\varphi,\psi) = \vec{n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\psi + \vec{n}\frac{\partial\psi}{\partial n}\cdot\varphi = \psi\cdot\nabla\varphi + \varphi\cdot\nabla\psi, \qquad (2)$$

в результате получаем, что:

$$\textbf{grad}\ (\varphi,\psi) = \psi\cdot\textbf{grad}\ \varphi + \varphi\cdot\textbf{grad}\ \psi .$$

Градиент скалярного произведения скалярной величины φ на вектор $\vec{a}$:

$$\nabla(\varphi,\vec{a}) = \vec{n}\frac{\partial}{\partial n}(\varphi,\vec{a}) = \vec{n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\vec{a} + \vec{n}\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\cdot\varphi = \overrightarrow{(n,\frac{\partial\varphi}{\partial n})}\cdot\vec{a} + (\nabla\vec{a})\cdot\varphi . \qquad (3)$$

Из векторного анализа известно, что:

$$(\nabla,\vec{a}) = div\vec{a}, \text{ также } \nabla\cdot(\varphi,\vec{a}) = div(\varphi,\vec{a}), \qquad (4)$$

где $div\vec{a}$ - дивергенция вектора $\vec{a}$, расхождение $\vec{a}$ из какой – либо точки. Подставив (4) в (3) и получаем, что:

$$\textbf{grad}\ (\varphi,\vec{a}) = div(\varphi,\vec{a}) = \vec{a}\cdot\textbf{grad}\ \varphi + \varphi\cdot div\,\vec{a} . \qquad (5)$$

Векторное произведение градиента скалярной величины φ на вектор $\vec{a}$ в символической форме будет:

$$\left[\nabla\varphi,\vec{a}\right] = \left[\vec{n}\frac{\partial\varphi}{\partial n},\vec{a}\right] = \left[\vec{n},\frac{\partial}{\partial n}(\varphi,\vec{a})\right] = \left[\vec{n},\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\vec{a} + \varphi\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right)\right] = \left[\vec{n},\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cdot\vec{a}\right] + \left[\vec{n},\varphi\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right] =$$

$$= \left[\left(\vec{n},\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right),\vec{a}\right] + \varphi\cdot\left[\vec{n},\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right] = \left[(\nabla,\varphi),\vec{a}\right] + \varphi\cdot\left[\nabla,\vec{a}\right] . \qquad (6)$$

Из формул векторного анализа известно, что:

$$\left[\nabla,\vec{a}\right] = rot\vec{a}, \text{ также } \left[\nabla\varphi,\vec{a}\right] = rot(\varphi,\vec{a}), \qquad (7)$$

где rot – ротор, выражающий циркуляцию какого – либо вектора в точке.
Подставляя (7) в (6) , получим, что:

$$rot\,(\varphi,\vec{a}) = \left[\boldsymbol{grad}\;\varphi,\vec{a}\right] + \varphi\cdot rot\,\vec{a} \quad . \qquad (8)$$

Формулу (8) можно записать еще следующим образом с учетом того, что от перестановки сомножителей векторное произведение двух векторов меняет свой знак на обратный:

$$rot\,(\varphi,\vec{a}) = \varphi\cdot rot\,\vec{a} - \left[\vec{a},\boldsymbol{grad}\;\varphi\right] \quad . \qquad (9)$$

Градиент от векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ в символической форме:

$$\nabla\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \vec{n}\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right] + \vec{n}\left[\vec{a},\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\right]. \qquad (10)$$

С учетом того, что: $\left[\vec{a},\vec{в}\right] = -\left[\vec{в},\vec{a}\right]$, (11)

выражение (10), с учетом (4) и (11), запишется так:

$$div\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \vec{n}\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right] - \vec{n}\left[\frac{\partial\vec{в}}{\partial n},\vec{a}\right] \qquad (12)$$

При циклической перестановке векторов векторно-скалярное произведение трех векторов $\vec{a}\left[\vec{в},\vec{c}\right]$ не меняет знака:

$$\vec{a}\left[\vec{в},\vec{c}\right] = c\left[\vec{a},\vec{в}\right] = в\left[\vec{c},\vec{a}\right] \quad . \qquad (13)$$

Применим формулу (13) к выражению (12):

$$div\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \vec{в}\cdot\left[\vec{n},\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right] - \vec{a}\cdot\left[\vec{n},\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\right] = \vec{в}\cdot\left[\nabla,\vec{a}\right] - \vec{a}\cdot\left[\nabla,\vec{в}\right] = \vec{в}\cdot rot\vec{a} - \vec{a}\cdot rot\vec{в} \quad ,$$

в результате получили: $div\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \vec{в}\cdot rot\vec{a} - \vec{a}\cdot rot\vec{в}$. (14)

Векторное произведение градиента на векторное произведение двух векторов в символической форме:

$$\left[\nabla,\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right] = \left[\vec{n},\frac{\partial}{\partial n}\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right] = \left[\vec{n},\left[\left(\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right) + \left(\vec{a},\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\right)\right]\right] = \left[\vec{n},\left[\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right]\right] + \left[\vec{n},\left[\vec{a},\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\right]\right]. \qquad (15)$$

Согласно правилам векторного анализа, двойное векторное произведение трех векторов равно:

$$\left[\vec{a},\left[\vec{в},\vec{c}\right]\right] = \vec{в}\cdot\left(\vec{a},\vec{c}\right) - \vec{c}\cdot\left(\vec{a},\vec{в}\right). \qquad (16)$$

Применяя (16) для формулы (15) с учетом (7), получим:

$$rot\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\left(\vec{n},\vec{в}\right) - \vec{в}\cdot\left(\vec{n},\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right) + \vec{a}\cdot\left(\vec{n},\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\right) - \frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\left(\vec{n},\vec{a}\right) \quad . \qquad (17)$$

Отдельно вычислим, чему будет равен член $\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\left(\vec{n},\vec{в}\right)$:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\left(\vec{n},\vec{в}\right) = \left(\vec{n},\vec{в}\right)\frac{\partial\vec{a}}{\partial n} = \left(\vec{в},\vec{n}\right)\frac{\partial\vec{a}}{\partial n} = \left(\vec{в},\vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\right)\cdot\vec{a} = \left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a} \quad . \qquad (18)$$

Также вычислим $\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\left(\vec{n},\vec{a}\right)$:

$$\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\left(\vec{n},\vec{a}\right) = \left(\vec{n},\vec{a}\right)\frac{\partial\vec{в}}{\partial n} = \left(\vec{a},\vec{n}\right)\frac{\partial\vec{в}}{\partial n} = \left(\vec{a},\vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\right)\cdot\vec{в} = \left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в} \quad . \qquad (19)$$

Результаты из (18) и (19) подставим в (17)

$$rot\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a} - \vec{в}\cdot\left(\nabla,\vec{a}\right) + \vec{a}\cdot\left(\nabla,\vec{в}\right) - \left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в} \quad ,$$

и окончательно получим формулу:

$$rot\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a} - \vec{в}\cdot div\vec{a} + \vec{a}\cdot div\vec{в} - \left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в} \qquad (20)$$

Градиент скалярного произведения двух векторов запишем в символической форме:

$$\nabla\left(\vec{a},\vec{в}\right)=\vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\left(\vec{a},\vec{в}\right)=\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right)+\vec{n}\cdot\left(\vec{a},\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\right). \qquad (21)$$

Для нахождения результата вычислений формулы (21) рассмотрим следующие выражения:

$$\left[\vec{в},rot\vec{a}\right]=\left[\vec{в},\left[\nabla,\vec{a}\right]\right]=\left[\vec{в},\left[\vec{n},\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right]\right]=\vec{n}\cdot\left(\vec{в},\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right)-\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\cdot\left(\vec{в},\vec{n}\right)=\vec{n}\cdot\left(\vec{в},\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right)-\left(\vec{в},\vec{n}\right)\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}=$$

$$=\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right)-\left(\vec{в},\vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\right)\cdot\vec{a}=\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right)-\left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a},$$

отсюда находим:

$$\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial\vec{a}}{\partial n},\vec{в}\right)=\left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a}+\left[\vec{в},rot\vec{a}\right]. \qquad (22)$$

Аналогично получается:

$$\left[\vec{a},rot\vec{в}\right]=\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial\vec{в}}{\partial n},\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в}$$

, отсюда

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{a},\frac{\partial\vec{в}}{\partial n}\right)=\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в}+\left[\vec{a},rot\vec{в}\right]. \qquad (23)$$

При учете (22) и (23) выражение (21) получит вид:

$$\boldsymbol{grad}\left(\vec{a},\vec{в}\right)=\left[\vec{в},rot\vec{a}\right]+\left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a}+\left[\vec{a},rot\vec{в}\right]+\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в}. \qquad (24)$$

Рассмотрим частный случай, когда $\vec{a}=\vec{в}$:

$$\boldsymbol{grad}\,\vec{a}^{2}=\left[\vec{a},rot\vec{a}\right]+\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{a}+\left[\vec{a},rot\vec{a}\right]+\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{a}=2\cdot\left[\vec{a},rot\vec{a}\right]+2\cdot\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{a}=$$

$$=2\cdot\left\{\left[\vec{a},rot\vec{a}\right]+\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{a}\right\},$$

и в итоге :

$$\boldsymbol{grad}\frac{\vec{a}^{2}}{2}=\left[\vec{a},rot\vec{a}\right]+\left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{a}. \qquad (25)$$

Ротор от ротора вектора $\vec{a}$ в символической форме:

$$rot\,rot\vec{a}=\left[\nabla,\left[\nabla,\vec{a}\right]\right]. \qquad (26)$$

Согласно (16) преобразуем правую часть (26):

$$\left[\nabla,\left[\nabla,\vec{a}\right]\right]=\left[\vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\left[\vec{n},\frac{\partial\vec{a}}{\partial n}\right]\right]=\vec{n}\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\vec{n}\frac{\partial}{\partial n},\vec{a}\right)-\left(\vec{n}\frac{\partial}{\partial n},\vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\right)\cdot\vec{a}=$$

$$=\nabla\cdot\left(\nabla,\vec{a}\right)-\left(\nabla,\nabla\right)\cdot\vec{a}=\boldsymbol{grad}\quad div\,\vec{a}-\nabla^{2}\cdot\vec{a}. \qquad (27)$$

Известно, что $\nabla^{2}=\Delta$ - оператор Лапласа, поэтому окончательно получим:

$$rot\,rot\vec{a}=\boldsymbol{grad}\,div\,\vec{a}-\Delta\cdot\vec{a}. \qquad (28)$$

Вывод: Получили следующие формулы преобразований векторного анализа символическим методом:

Градиент скалярного произведения двух скалярных величин φ и ψ :

$$\nabla(\varphi,\psi)=\boldsymbol{grad}(\varphi,\psi)=\psi\cdot\boldsymbol{grad}\varphi+\varphi\cdot\boldsymbol{grad}\psi.$$

2. Градиент скалярного произведения скалярной величины φ на вектор $\vec{a}$:

$$\nabla(\varphi,\vec{a})=div(\varphi,\vec{a})=\boldsymbol{grad}(\varphi,\vec{a})=\vec{a}\cdot\boldsymbol{grad}\varphi+\varphi\cdot div\vec{a}.$$

Ротор скалярного произведения скалярной величины φ на вектор $\vec{a}$:

$$\nabla\left[\varphi,\vec{a}\right]=rot(\varphi,\vec{a})=\varphi\cdot rot\vec{a}-\left[\vec{a},\boldsymbol{grad}\varphi\right].$$

Градиент от векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ или дивергенция от векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$:

$$\nabla\left[\vec{a},\vec{в}\right] = div\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \vec{в}\cdot rot\vec{a} - \vec{a}\cdot rot\vec{в}.$$

Ротор векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$:

$$rot\left[\vec{a},\vec{в}\right] = \left[\nabla,\left[\vec{a},\vec{в}\right]\right] = \left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a} - \vec{в}\cdot div\vec{a} + \vec{a}\cdot div\vec{в} - \left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в}.$$

Градиент скалярного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$:

$$\boldsymbol{grad}\left(\vec{a},\vec{в}\right) = \left[\vec{в},rot\vec{a}\right] + \left(\vec{в},\nabla\right)\cdot\vec{a} + \left[\vec{a},rot\vec{в}\right] + \left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{в}.$$

Частный случай, когда $\vec{a} = \vec{в}$:

$$\boldsymbol{grad}\,\frac{\vec{a}^{\,2}}{2} = \left[\vec{a},rot\vec{a}\right] + \left(\vec{a},\nabla\right)\cdot\vec{a}.$$

Ротор от ротора вектора $\vec{a}$: $rot\,rot\vec{a} = \left[\nabla,\left[\nabla,\vec{a}\right]\right]$.

$$rot\,rot\vec{a} = \boldsymbol{grad}\,div\,\vec{a} - \nabla\cdot\vec{a}.$$

Таким образом, такой символический метод облегчает выводы формул векторного анализа и выделяется простотой и краткостью перед другими методами вычислений, например такими как, через координаты x, y, z и другими.

Литература

1. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. - М.: АН СССР, 1951.
2. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.: Наука, 1974. с.498-510.
3. Савельев Н.В. Курс физики. Т-2. – М.: Наука, 1989. с. 216-236.
4. Асанбаева Д.А. Касымалиева А.. Сборник научных студенческих работ. – Физ. мат. факультет. Пржевальский гос. пед. институт. Вып.2. 1964. с. 29-32.