УДК 514.765.7.005.214

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПОЛОСЕ С НЕИНВАРИАНТНЫМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

АБДЫЛДАЕВА Э.Ф.
Кыргызско-Турецкий университет “Манас”

izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе рассматривается задача интегральной геометрии в полосе с двумя неинвариантными весовыми функциями $a(x,y,\xi,\eta)$, $K(x,y,\xi,\eta)$, когда они обращаются в нуль при $y=\eta$, $\xi=x$. Для решение задач используется преобразование Фурье и метод шкалы банаховых пространств.

Пусть в полосе $D=\{\xi,\eta:\xi\in R,\eta\in[0,h],\quad h>0\}\in R^2$ задано $\gamma(x,y)$ - семество ломанных отрезков $\xi=x-(y-\eta)$ и $\xi=x+(y-\eta)$, $0\le\eta\le y$, с вершинами $(x,y)\in D$ и концами лежащими на оси $\eta=0$. Функция $\xi=x-(y-\eta)$ по η возрастающая а $\xi=x+(y-\eta)$ по η убывающая на $[0;y]$.

Для весовых функций $a(x,y,\xi,\eta)$, $K(x,y,\xi,\eta)$ и функции $u(\xi,\eta)$ положим

$$Au\equiv\int_0^y A(x,y,\eta)u(x,\eta)d\eta\equiv\int_0^y\Big\{\sqrt{2}\big[a(x,y,x-(y-\eta),\eta)u(x-(y-\eta),\eta)+$$
$$+a(x,y,x+(y-\eta),\eta)u(x+(y-\eta),\eta)\big]+\int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)}K(x,y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\Big\}d\eta= \tag{1}$$
$$=g(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

Требуется по функции $g(x,y)$, заданной в D восстановить функцию $u(x,y)$.

Предполагая, что

$$a(x,y,\xi,\eta)=a_0(x-\xi,y,\eta)+a_1(x,y,\xi,\eta),$$
$$K(x,y,\xi,\eta)=K_0(x-\xi,y,\eta)+K_1(x,y,\xi,\eta)$$

и в повторном интеграле уравнения (1) используя замену $\xi=x-(y-\eta)+\xi'$ получаем

$$Au\equiv\int_0^y\Big\{\sqrt{2}\big[a_0(y-\eta,y,\eta)u(x-(y-\eta),\eta)+a_0(\eta-y,y,\eta)u(x+(y-\eta),\eta)+$$
$$+a_1(x,y,x-(y-\eta),\eta)u(x-(y-\eta),\eta)+a_1(x,y,x+(y-\eta),\eta)u(x+(y-\eta),\eta)\big]+ \tag{2}$$
$$+\int_0^{2(y-\eta)}\big[K_0(y-\eta-\xi',y,\eta)+K_1(x,y,x-(y-\eta)+\xi',\eta)\big]u(x-(y-\eta)+\xi',\eta)d\xi'\Big\}d\eta=$$
$$=g(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

К этому уравнению используем преобразование Фурье по переменной x и сводим его к следующему уравнению:

$$\hat{A}\hat{u}\equiv\int_0^y\Big\{\sqrt{2}\big[e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(y-\eta,y,\eta)\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(\eta-y,y,\eta)\hat{u}(\lambda,\eta)+$$
$$+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\big[\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)\big]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\big[\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)\big]+$$
$$+\int_0^{2(y-\eta)}e^{2\pi i\lambda(\xi-y+\eta)}\big(K_0(y-\eta-\xi',y,\eta)\hat{u}(\lambda,\eta)+\big[\hat{K}_1(\lambda,y-\eta-\xi',y,\eta*$$
$$*\hat{u}(\lambda,\eta)\big]\big)d\xi'\Big\}d\eta=\hat{g}(\lambda,y),\quad (\lambda,y)\in D, \tag{3}$$

где $\hat{u}(\lambda,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\lambda x}u(x,\eta)dx;\qquad \hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\lambda x}a_1(x+z,y,x,\eta)dx;$

$$\hat{K}_1(\lambda,z,y,\eta)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\lambda x}K_1(x+z,y,x,\eta)dx;\qquad \hat{g}(\lambda,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\lambda x}g(x,y)dx.$$

Обозначим через $L_s^p(R),\quad p\geq 1,\quad s\in(b_1,b_2),\quad -\infty\leq b_1\leq b_2\leq\infty$ - линейное пространство функций $u(x)$, измеримых на R и таких, что $\|u(x)\|_{p,s}^p=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ps|x|}|u(x)|^P dx<\infty$. Семейство $L_s^p(R),\quad p\geq 1,\quad s\in(b_1,b_2)$ образует шкалу банаховых пространств.

Пусть выполняются следующие условия:

а) Функция $a_0(z,y,\eta),\quad K_0(z,y,\eta)$ - достаточно гладкие функции в области $\overline{G}_1=[-h;h]\times\overline{G}$, где $G=\{(y,\eta):0<\eta<y<h\}$ и $a_0(0,y,y)\equiv 0$, $a_1(x,y,x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in R\times[0,h]$, $W(y)=2\left[\sqrt{2}a'_{0,2}(0,y,y)\right|+K_0(0,y,y)\right]\geq a>0$, $y\in[0,h]$, функции $a_1(x,y,\xi,\eta)$, $K_1(x,y,\xi,\eta)$ - дважды непрерывно дифференцируемы по x и y в области $R^2\times\overline{G}$;

б) $\exists b\in(0,\infty)$ такое, что для фиксированных $z\in[-h;h],\quad (y,\eta)\in\overline{G}$

$$\gamma=\sup_{y\in[0,h]}\left[\frac{1}{\sqrt{2}a'_{0,2}(0,y,y)+K_0(0,y,y)}\left\|\sqrt{2}\hat{a}'_{1,3}(\lambda,0,y,y)+\hat{K}_1(\lambda,0,y,y)\right\|_{1,b}\right]<1$$ и функции $\hat{a}_1(\lambda,z,y,\eta),\quad \hat{K}_1(\lambda,z,y,\eta)$ и их частные производные являются элементами из $L_b^1(R)$;

в) $\forall\left(y,\eta\in\overline{G}\right)$ выполняются условия :

$|a_0(\pm(y-\eta),y,\eta)|\leq C_0(y-\eta)$, $\|\hat{a}_1(\lambda,\pm(y-\eta),y,\eta\|_{1,b}\leq C_1(y-\eta)$.

Дважды дифференцируя уравнение (3) по y и разделив на $W(y)$ получим:

$$\hat{u}(\lambda,y)+(K_0\hat{u})(\lambda,y)+\int\limits_0^y\left[(K_1\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_2\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_3\hat{u})(\lambda,y,\eta)\right]d\eta= \tag{4}$$
$$=\hat{g}''_{yy}(\lambda,y)/W(y),$$

где $$(K_0\hat{u})(\lambda,y)=\frac{2\left[\sqrt{2}\hat{a}'_{1,3}(\lambda,0,y,y)+\hat{K}_1(\lambda,0,y,y)\right]}{W(y)},\quad (5)$$

$$(K_1\hat{u})(\lambda,y,\eta)=\frac{1}{W_1(y)}\left\{\sqrt{2}\left[e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_0(y-\eta,y,\eta))\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\times\right.\right.$$
$$\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_0(\eta-y,y,\eta))\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta))*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\times$$
$$\times\left.\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta))*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]\right]+2\left[e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial}{\partial y}(K_0(\eta-y,y,\eta))\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\times\right.$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y}(K_0(y-\eta-\xi',y,\eta))\Big|_{\xi'=2(y-\eta)}\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{K}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta)\right)\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{K}_1(\lambda,y-\eta-\xi',y,\eta)\right)\Big|_{\xi'=2(y-\eta)}*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]+$$

$$+\int\limits_0^{2(y-\eta)}e^{2\pi i\lambda(\xi'-y+\eta)}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(K_0(y-\eta-\xi',y,\eta))\hat{u}(\lambda,\eta)d\xi'+$$

$$+\int_0^{2(y-\eta)} e^{2\pi i\lambda(\xi'-y+\eta)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\hat{K}_1(\lambda, y-\eta-\xi', y,\eta)\right)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]d\xi'\Bigg]\Bigg\}, \qquad (6)$$

$$\left(K_2\hat{u}\right)(\lambda,y,\eta)=\frac{-4\pi i\lambda}{W(y)}\left\{\sqrt{2}\left(e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial}{\partial y}\left(a_0(y-\eta,y,\eta)\right)-e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\frac{\partial}{\partial y}\left(a_0(\eta-y,y,\eta)\right)\right)\times\right.$$

$$\times\hat{u}(\lambda,\eta)+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta)\right)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]-e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta)\right)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]+2\int_0^{2(y-\eta)}e^{2\pi i\lambda(\xi'-y+\eta)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(K_0(y-\eta-\xi',y,\eta)\right)\hat{u}(\lambda,\eta)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\hat{K}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta)\right)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]d\xi'\right\}, \qquad (7)$$

$$\left(K_3\hat{u}\right)(\lambda,y,\eta)=\frac{(-2\pi i\lambda)^2}{W(y)}\left\{\sqrt{2}\left[\left(e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(y-\eta,y,\eta)+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}a_0(\eta-y,y,\eta)\right)\hat{u}(\lambda,\eta)+\right.\right.$$

$$+e^{-2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\hat{a}_1(\lambda,y-\eta,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]+e^{2\pi i\lambda(y-\eta)}\left[\hat{a}_1(\lambda,\eta-y,y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]\Big]+ \qquad (8)$$

$$\left.+2\int_0^{2(y-\eta)}e^{2\pi i\lambda(\xi'-y+\eta)}\left(K_0(y-\eta-\xi',y,\eta)+\left[\hat{K}_1(\lambda,y-\eta-\xi',y,\eta)*\hat{u}(\lambda,\eta)\right]\right)d\xi'\right\}.$$

Из (5)-(8) вытекают следующие оценки:

$$\left\|\left(I+K_0\right)^{-1}(y)\left(K_1\hat{u}\right)(\lambda,y,\eta)\right\|_{p,s'}\le M_0\left\|\hat{u}(\lambda,\eta)\right\|_{p,s}, \qquad (9)$$

$$\left\|\left(I+K_0\right)^{-1}(y)\left(K_2\hat{u}\right)(\lambda,y,\eta)\right\|_{p,s'}\le M_1(s-s')^{-1}\left\|\hat{u}(\lambda,\eta)\right\|_{p,s}, \qquad (10)$$

$$\left\|\left(I+K_0\right)^{-1}(y)\left(K_3\hat{u}\right)(\lambda,y,\eta)\right\|_{p,s'}\le M_2(s-s')^{-2}(y-\eta)\left\|\hat{u}(\lambda,\eta)\right\|_{p,s}, \quad p\ge 1, \qquad (11)$$

где $p\ge 1, \quad s,s'\in(b_1,b_2), s'<s, \quad M_0, \quad M_1, \quad M_2$ - известные постоянные, определяемые через нормы заданных функций и их производных.

Применяя обращение операторов $\left(I+K_0\right)$ из (4), получаем следующее уравнение

$$\hat{u}(\lambda,y)+\int_0^y\left(K_4\hat{u}\right)(\lambda,y,\eta)d\eta=g_1(\lambda,y), \quad (12)$$

где $(K_4\hat{u})(\lambda,y,\eta)=(I+K_0)^{-1}[(K_1\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_2\hat{u})(\lambda,y,\eta)+(K_3\hat{u})(\lambda,y,\eta)]$, (13)

$$g_1(\lambda,y)=\left(I+K_0\right)^{-1}\frac{\hat{g}''_{yy}(\lambda,y)}{W(y)}. \quad (14)$$

Обозначим через $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$, $p\ge 1$, $\alpha,\beta\in[-b;b]$, $\alpha<\beta$, $\theta>0$ -пространство функций u(x,y), которые для всякого $s\in[\alpha,\beta]$ являются такими непрерывными функциями по y, $x\in R$, $0<y<\theta(\beta-s)$, со значениями в $L^p_s(R)$, что $N_p[u]=\sup\limits_{\substack{0<y<\theta(\beta-s)\\ \alpha\le s<\beta}}\left\{\left\|u(x,y)\right\|_{p,s}\left(\theta(\beta-s)/y-1\right)\right\}<\infty$, здесь θ - положительная константа. $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ - Банаховое пространство с нормой $N_p[u]$, а через $\widehat{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ - множество образов всех функций, при преобразование Фурье принадлежащих в $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$.

В силу (9)-(14) вытекает следующая оценка

$$\left\|\left(K_4\hat{u}\right)(\lambda,y,\eta)\right\|_{p,s'}\le\left[M_0+M_1(s-s')^{-1}+M_2(s-s')^{-2}(y-\eta)\right]\left\|\hat{u}(\lambda,y)\right\|_{p,s}. \quad (15)$$

В результате получаем следующие утверждения:

Теорема 1: Пусть выполняются условия а), б), в) и $\alpha,\beta\in(-b;b),\alpha<\beta$, $\hat{g}(\lambda,0)=0$, $\hat{g}'_y(\lambda,0)=0$, при $\lambda\in R$, существуют $\hat{g}'_y(\lambda,y),\hat{g}''_{yy}(\lambda,y)\in B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$, $p\ge 1$ и число

$\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0\theta b + 2M_1\theta + 4M_2\theta^2 < 1$, тогда в $B^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ существует единственное решение уравнения (3).

Теорема 2.2.2. Если выполняются условия а), б) ,в) и $\alpha, \beta \in (0;b), \alpha < \beta$, $g(x,0) = 0$, $g'_y(x,0) = 0$ при $x \in R$, существуют $g'_y(x,y), g''_{yy}(x,y) \in \widehat{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$, $p \geq 1$ и число $\theta > 0$ такое, что $\gamma(\theta) = M_0\theta b + 2M_1\theta + 4M_2\theta^2 < 1$, то в $\widehat{B}^{p,\theta}_{\alpha,\beta}(R)$ существует единственное решение уравнения (1) .

Литература

1. Аниконов Ю.Е. Некоторые вопросы интегральной геометрии //Труды Всесоюзного симпозиума по вычислительной томографии. -Новосибирск, 1983. –С. 9-11.
2. Асанов А. Операторные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств и задачи интегральной геометрии //Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Б.: Илим,1992. -Вып.24. -С.39-50.
3. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными.–М.: Мир, 1977.
4. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.:Мир, 1977.
5. Лаврентьев М.М. Об одном классе задач интегральной геометрии на плоскости //Сибирский математический журнал.-1988. –Т.30, вып.4, -С.62-68.