

УДК 519.642.7

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ

ИСМАИЛОВ Б.И.**Институт автоматизации и информационных технологий НАН КР,****РАМАТОВ К.С.****КГТУ им. И.Раззакова****izvestiya@ktu.aknet.kg**

В работе приведен пример подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния анизотропных массивов горных пород. Получены конечные соотношения для основных формул, применяемых для численного решения геомеханических задач методом граничных элементов

In article the example of anisotropic rocks stress-deformed condition researchs approach is described. Final expressions for the basic formulas applied to the numerical decision of geomechanical problems by the boundary elements method are received.

В работах [6, 8, 9] установлено, что большинство горных пород обладает значительной упругой анизотропией при термодинамических условиях, соответствующих глубине их залегания. В связи с этим одной из глобальных геомеханических задач является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) массивов горных пород, обладающих этим видом структурных особенностей.

Цель исследования. Получение развернутой формы основных соотношений ГЭ-моделирования для исследования анизотропных породных массивов.

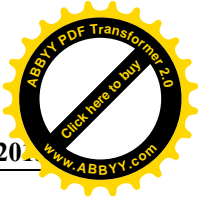
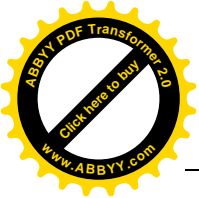
Метод исследования. Для решения поставленной задачи используется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), который имеет альтернативное название метода граничных элементов (МГЭ).

Результаты исследований. В работе [7] приведен широкий обзор литературы по анизотропии упругих свойств веществ Земли при различных термодинамических условиях.

Для анизотропного массива основное граничное интегральное уравнение (ГИУ) имеет тот же вид, что и для изотропного, т.е. [0]

$$c_{ij}u_j(\xi) + \int_s P_{ij}(x, \xi)u_j(x)ds = \int_s U_{ij}(x, \xi)p_j(x)ds. (1)$$

Здесь $P_{ij}(x, \xi)$ и $U_{ij}(x, \xi)$ - фундаментальные тензоры, получаемые из решения задачи



Кельвина для анизотропного тела; $u_j(x)$ и $p_j(x)$ - граничные смещения и нагрузки. В случае произвольной анизотропии фундаментальный тензор U_{ij} может быть получен из известной зависимости

$$U_{ij}(x, \xi) = \frac{1}{8\pi^2 r} \oint_{|\rho|=1} K_{ij}^{-1}(\rho) ds, \quad (2)$$

в которой контурный интеграл берется по одиночной окружности, имеющей центр в точке ξ и лежащей в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{r} , соединяющему точки x и ξ . При этом функция $K_{ij}^{-1}(\rho)$ представляет собой матрицу, обратную матрице характеристик:

$$K_{ij}^{-1} = c_{ijk\ell} \rho_k \rho_\ell,$$

где $c_{ijk\ell}$ - тензор упругих характеристик анизотропного тела. Контурный интеграл в (2) аналитически можно вычислить только для некоторых частных случаев. Он зависит только от направления вектора \vec{r} , поэтому является несингулярным и, следовательно, при его вычислении можно применить методы численного интегрирования.

Для большей эффективности численной реализации подобной процедуры предложено представление:

$$G_{ij}(v_1, v_2) = \oint_{|\rho|=1} K_{ij}^{-1}(\rho) ds. \quad (3)$$

Здесь v_1 и v_2 определяют ориентацию вектора \vec{r} . Сравнивая (2) и (3), получим соотношение $U_{ij} = \frac{G_{ij}}{8\pi^2 r}$, из которого путем дифференцирования по координатам x можно определить второй тензор P_{ij} . Для случая трансформных материалов фундаментальное решение можно получить в замкнутом виде [2]. Закон Гука для ортотропного упругого материала в общем виде записывается следующим образом [5]:

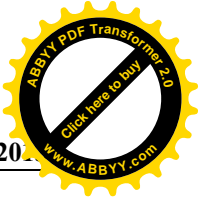
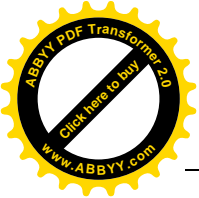
$$e_{11} = s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22} + s_{13}\sigma_{33}, \quad (4)$$

или

$$\begin{aligned} e_{22} &= s_{21}\sigma_{11} + s_{22}\sigma_{22} + s_{23}\sigma_{33}, & e_{33} &= s_{31}\sigma_{11} + s_{32}\sigma_{22} + s_{33}\sigma_{33}, \\ e_{23} &= \frac{1}{2}s_{44}\sigma_{23}, & e_{13} &= \frac{1}{2}s_{55}\sigma_{13}, & e_{12} &= \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{12}, \end{aligned}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют индексам x, y, z .

Соотношения между коэффициентами $s_{ij} = s_{ji}$ и техническими постоянными



устанавливаются сравнением формул (3) и (4). Поскольку условие $s_{ij} = s_{ji}$ требует, чтобы

$$\frac{\nu_{ij}}{E_j} = \frac{\nu_{ji}}{E_i} \quad (\text{здесь суммирование по } j \text{ не производится}),$$

то для ортотропного материала можно задать лишь девять упругих характеристик. Чтобы функция упругой энергии была положительно определенной, необходимо ввести следующие ограничения на упругие постоянные [3]:

$$\begin{aligned} E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad E_3 > 0, \quad G_{12} > 0, \quad G_{23} > 0, \quad G_{13} > 0, \\ 1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0, \quad 1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, \\ 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} > 0, \end{aligned}$$

которые оказываются полезными при проверке пригодности значений упругих постоянных, найденных как экспериментально, так и полученных в результате вычислений. Они гарантируют также, что все вычисленные напряжения, деформации и все подкоренные выражения в функциях податливости являются действительными числами.

Если наложить на упругие параметры условия упругой симметрии по отношению к повороту, например, $E_1 = E_3, \quad G_{12} = G_{23}$, то выражения (4) будут связывать компоненты напряжений и деформаций в трансропном материале.

Таким образом, трансропное тело можно полностью задать при помощи пяти упругих параметров (например, $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{13}, \nu_{12}$). Состояние плоской деформации для плоскости x, y определяется условиями $e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0$. В этом случае из (4) находим, что

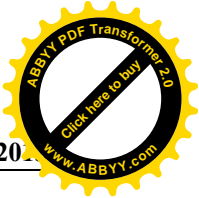
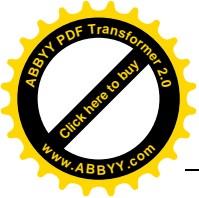
$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = -(s_{13}\sigma_{11} + s_{23}\sigma_{22})/s_{33}, \\ e_{11} &= \left(s_{11} - \frac{s_{13}^2}{s_{33}} \right) \sigma_{11} + \left(s_{12} - \frac{s_{13}s_{23}}{s_{33}} \right) \sigma_{22}, \\ e_{22} &= \left(s_{12} - \frac{s_{13}s_{23}}{s_{33}} \right) \sigma_{11} + \left(s_{22} - \frac{s_{23}^2}{s_{33}} \right) \sigma_{22}, \quad e_{12} = \frac{1}{2} s_{66} \sigma_{12}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma_{11} = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}, \quad \sigma_{22} = c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22}, \quad \sigma_{12} = 2c_{66}e_{12}, \tag{4}$$

где $c_{11} = \left(s_{22} - \frac{s_{23}^2}{s_{33}} \right) / s_0^2, \quad c_{12} = - \left(s_{12} - \frac{s_{13}s_{23}}{s_{33}} \right) / s_0^2, \quad \tilde{n}_{22} = \left(s_{11} - \frac{s_{13}^2}{s_{33}} \right) / s_0^2, \quad \tilde{n}_{66} = \frac{1}{s_{66}},$

$$s_0^2 = s_{11}s_{22} - s_{12}^2 + (2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{13}^2) / s_{33}.$$



Решение задачи о сосредоточенной силе в ортотропной упругой среде можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 U_1^1 &= k \left(\frac{\gamma_1}{q_1} \ln r_1 - \frac{\gamma_2}{q_2} \ln r_2 \right), & U_2^1 &= k \left(-\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x} \right), \\
 U_1^2 &= k \left(-\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y_2}{x} \right), & U_2^2 &= -k \left(\frac{q_1}{\gamma_1} \ln r_1 - \frac{q_2}{\gamma_2} \ln r_2 \right), \\
 \sigma_{12}^1 &= kc_{66} \left(\frac{1-q_1}{q_1} \frac{y_1}{r_1^2} - \frac{1-q_2}{q_2} \frac{y_2}{r_2^2} \right), & \sigma_{11}^1 &= kc_{66} \left(\frac{1+q_1}{\gamma_1 q_1} \frac{x}{r_1^2} - \frac{1+q_2}{\gamma_2 q_2} \frac{x}{r_2^2} \right), \\
 \sigma_{22}^1 &= kc_{66} \left(-\frac{\gamma_1(1+q_1)}{q_1} \frac{x}{r_1^2} + \frac{\gamma_2(1+q_2)}{q_2} \frac{x}{r_2^2} \right), & \sigma_{12}^2 &= kc_{66} \left(\frac{1+q_1}{\gamma_1} \frac{x}{r_1^2} - \frac{1+q_2}{\gamma_2} \frac{x}{r_2^2} \right), \\
 \sigma_{11}^2 &= kc_{66} \left(\frac{1+q_1}{\gamma_1^2} \frac{y_1}{r_1^2} - \frac{1+q_2}{\gamma_2^2} \frac{y_2}{r_2^2} \right), & \sigma_{22}^2 &= -kc_{66} \left((1+q_1) \frac{y_1}{r_1^2} - (1+q_2) \frac{y_2}{r_2^2} \right),
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где $k = \frac{1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)}$, $y_i = \frac{y}{\gamma_i}$, $r_i^2 = x^2 + y_i^2$; величины γ_i и q_i определяются через упругие постоянные материала; постоянные γ_1^2 и q_2^2 являются корнями квадратного уравнения

$$c_{11}c_{66}\gamma^4 + [c_{12}(c_{12} + 2c_{66}) - c_{11}c_{22}]\gamma^2 + c_{66}c_{22} = 0;
 \tag{6}$$

постоянные q_i связаны с γ_i^2 соотношениями $q_i = \frac{(c_{11}\gamma_i^2 - c_{66})}{(c_{12} + c_{66})}$. При этом зависимости (5)

записаны из соображений, что оба корня γ_1 и γ_2 вещественны и положительны.

Согласно [1] для анизотропного тела функция Эри определяется из уравнения

$$s_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0,$$

а характеристическое уравнение имеет вид

$$s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22} = 0.
 \tag{7}$$

Подставляя эти значения в уравнение (7) для осей, повернутых так, чтобы было $s_{16} = s_{61} = 0$, получим

$$c_{22}s_0^2\mu^4 + \left(-2c_{12}s_0^2 + \frac{1}{c_{66}}\right)\mu^2 + c_{11}s_0^2 = 0$$

или
$$c_{22}c_{66}\mu^4 - (c_{12}(c_{12} + 2c_{66}) - c_{11}c_{22})\mu^2 + c_{11}c_{66} = 0.$$

(8)

Из сравнения (3.41) с (3.39) следует, что $\gamma_i^2 = -\frac{1}{\mu_i^2}$, $\gamma_i = \frac{i}{\mu_i}$. В работе [9] показано, что

для горных пород $\mu_1 = i$, $\mu_2 = i\sqrt{P}$ и, следовательно, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{E_1/E_2}}$. Здесь $P = E_1/E_2$ -

параметр, характеризующий связь сдвигового модуля с другими информационными характеристиками. В случае, когда $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, предельный переход в формулах (5) позволяет получить соотношения для изотропного материала, причем

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Поскольку предельный переход в выражениях (5) соответствует вычислению предела

$$f = \lim \frac{F_1 - F_2}{q_1 - q_2}, \tag{9}$$

то последний заменяется производной $f = \frac{\partial F}{\partial q}$. При проведении вычислений учтем, что

$$\gamma = 1, \quad q = 1, \quad \gamma_{,q} = \frac{1}{4(1-\nu)}, \quad y_{,q} = -y\gamma_{,q}. \tag{10}$$

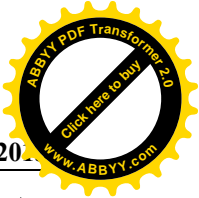
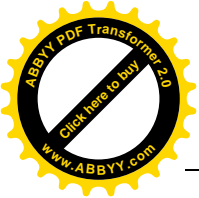
После некоторых выкладок с учетом (9) и (10) из формул (5) получим

$$U_1^1 = \frac{1}{2\pi c_{66}} \left[\ln \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{\gamma_{,q}}{q} - \frac{\gamma}{q} \right) + \frac{\gamma}{q} \frac{yy_{,q}}{(x^2 + y^2)} \right] = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{x^2}{r^2} + 1 \right],$$

$$U_1^2 = \frac{1}{2\pi c_{66}} \left(-\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y_{,q}}{x} \right) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{xy}{r^2}, \quad U_2^1 = -\frac{1}{2\pi c_{66}} \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{y_{,q}}{x} \right) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{xy}{r^2},$$

$$U_2^2 = -\frac{1}{2\pi c_{66}} \left[\ln \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{q\gamma_{,q}}{\gamma^2} \right) + \frac{q}{\gamma} \frac{yy_{,q}}{(x^2 + y^2)} \right] = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{y^2}{r} \right],$$

$$\sigma_{11}^1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\gamma q - (1+q)(q\gamma_{,q} + \gamma)}{\gamma^2 q^2} - \frac{1+q}{\gamma q} \frac{x^2 yy_{,q}}{(x^2 + y^2)^2} \right] = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \frac{x}{r^2} + \frac{x(x^2 - y^2)}{r^4} \right],$$



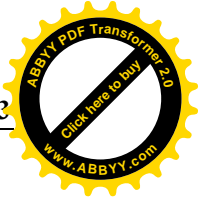
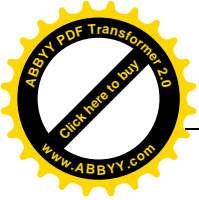
$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^2 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\gamma^2 - (1+q)2\gamma\gamma_{,q}}{\gamma^4} + \frac{1+q}{\gamma^2} \frac{(x^2 + y^2)y_{,q} - 2y^2y_{,q}}{(x^2 + y^2)^2} \right] = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2\nu \frac{y}{r^2} + \frac{y(x^2 - y^2)}{r^4} \right], \\
 \sigma_{22}^1 &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{q((1+q)\gamma_{,q} + \gamma) - \gamma(1+q)}{q^2} - \frac{\gamma(1+q)}{\gamma^2} \frac{2xyy_{,q}}{(x^2 + y^2)^2} \right] = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2\nu \frac{x}{r^2} + \frac{x(x^2 - y^2)}{r^4} \right], \\
 \sigma_{22}^2 &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} + (1+q) \frac{(x^2 + y^2)y_{,q}y_{2y_{,q}}}{(x^2 + y^2)^2} \right] = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \frac{y}{r^2} - \frac{y(x^2 - y^2)}{r^4} \right], \\
 \sigma_{12}^1 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \frac{q - (1+q)}{q^2} + \frac{1+q}{q} \frac{(x^2 + y^2)y_{,q} - 2y^2y_{,q}}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[-(1-2\nu) \frac{y}{r^2} - \frac{2yx^2}{r^4} \right], \\
 \sigma_{12}^2 &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\gamma - (1+q)y_{,q}}{\gamma^2} + \frac{1+q}{q} \frac{(-2xy)y_{,q} - 2y^2y_{,q}}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \\
 &= -\frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{x}{r^2} + \frac{2xy^2}{r^4} \right].
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Следует отметить, что выражения (11) полностью совпадают с соответствующими выражениями ядер для изотропных тел в условиях плоской деформации. Поэтому, так как они получены из (5) с помощью предельного перехода, можно заключить, что анизотропные ядра представлены верно. С учетом этого нетрудно получить выражения для фундаментальных тензоров U_{ij} и P_{ij} , входящих в уравнение (1). Все вычислительные приемы, разработанные для изотропной среды, справедливы и для анизотропной. Отличие состоит лишь в фундаментальных тензорах.

Выводы. На основе анализа структурных особенностей массивов горных пород показано применение ГЭ-моделирования для решения задачи об определении НДС массивов, а также получены соотношения для учета их анизотропных свойств. Особенностью предложенного подхода является то, что для исследования анизотропных массивов используются известные подходы для изотропных массивов с разницей в форме представления интегральных ядер.

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975.
2. Кожухметов К.Х., Кравченко О.Ф., Нурмамбетова Р.Д. О граничных интегральных уравнениях анизотропного тела. // Аналитические и численные методы решения задач математики и механики. - Алма-Ата: Наука, 1984.
3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир, 1987.



4. Тентиев Ж.Т., Кожахметов К.Х., Жумуков С.Ж., Мекенбаев Б.Т. Моделирование слоистой конструкции анизотропными слоями эквивалентной однородной средой с эффективными упругими характеристиками // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, №3, 1997.
 5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. - 416 с.
 6. Тархов А.Г. К вопросу об анизотропии упругих свойств в горных породах // Материалы ВСЕГЕИ. Общ.сер.1940, №5, с. 87-96.
 7. Чесноков Е.М. Сейсмическая анизотропия верхней мантии Земли. - М.:Наука,1977, - 144 с.
 8. Руппенейт К.В. Механические свойства горных пород. – М.: Углетехиздат, 1954.
 9. Ержанов Ж.С., Синяев А.Я. Напряжения в анизотропном массиве, ослабленном вертикальной выработкой круглого сечения // Вестник АН Каз.ССР, 1968, №10.
- Раматов К.С. О возможностях метода граничных элементов при моделировании континуальных систем // Вестник Кыргызского отделения международной академии энергетики им. А.Эйнштейна, № 2(6), Бишкек, 2007, с. 100-104.