УДК 519.642.7

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПОРОДНЫХ МАССИВОВ

ИСМАИЛОВ Б.И.

Институт автоматики и информационных технологий НАН КР,

РАМАТОВ К.С.

КГТУ им. И.Раззакова

izvestiya@ktu.aknet.kg

В работе приведен пример подхода к исследованию напряженно-деформированного состояния анизотропных массивов горных пород. Получены конечные соотношения для основных формул, применяемых для численного решения геомеханических задач методом граничных элементов

In article the example of anisotropic rocks stress-deformed condition researchs approach is described. Final expressions for the basic formulas applied to the numerical decision of geomechanical problems by the boundary elements method are received.

В работах [6, 8, 9] установлено, что большинство горных пород обладает значительной упругой анизотропией при термодинамических условиях, соответствующих глубине их залегания. В связи с этим одной из глобальных геомеханических задач является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) массивов горных пород, обладающих этим видом структурных особенностей.

Цель исследования. Получение развернутой формы основных соотношений ГЭ-моделирования для исследования анизотропных породных массивов.

Метод исследования. Для решения поставленной задачи используется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), который имеет альтернативное название метода граничных элементов (МГЭ).

Результаты исследований. В работе [7] приведен широкий обзор литературы по анизотропии упругих свойств веществ Земли при различных термодинамических условиях.

Для анизотропного массива основное граничное интегральное уравнение (ГИУ) имеет тот же вид, что и для изотропного, т.е. [0]

$$c_{ij}u_j(\xi)+\int_s P_{ij}(x,\xi)u_j(x)ds=\int_s U_{ij}(x,\xi)p_j(x)ds. \quad (1)$$

Здесь $P_{ij}(x,\xi)$ и $U_{ij}(x,\xi)$ - фундаментальные тензоры, получаемые из решения задачи

Кельвина для анизотропного тела; $u_j(x)$ и $p_j(x)$ - граничные смещения и нагрузки. В случае произвольной анизотропии фундаментальный тензор U_{ij} может быть получен из известной зависимости

$$U_{ij}(x,\xi)=\frac{1}{8\pi^2 r}\oint\limits_{|\rho|=1}K_{ij}^{-1}(\rho)ds, \qquad (2)$$

в которой контурный интеграл берется по одиночной окружности, имеющей центр в точке ξ и лежащей в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{r}$, соединяющему точки x и ξ. При этом функция $K_{ij}^{-1}(\rho)$ представляет собой матрицу, обратную матрице характеристик:

$$K_{ij}^{-1}=c_{ijk\ell}\rho_k\rho_\ell,$$

где $c_{ijk\ell}$ - тензор упругих характеристик анизотропного тела. Контурный интеграл в (2) аналитически можно вычислить только для некоторых частных случаев. Он зависит только от направления вектора $\vec{r}$, поэтому является несингулярным и, следовательно, при его вычислении можно применить методы численного интегрирования.

Для большей эффективности численной реализации подобной процедуры предложено представление:

$$G_{ij}(\nu_1,\nu_2)=\oint\limits_{|\rho|=1}K_{ij}^{-1}(\rho)ds. \qquad (3)$$

Здесь ν_1 и ν_2 определяют ориентацию вектора $\vec{r}$. Сравнивая (2) и (3), получим соотношение $U_{ij}=\frac{G_{ij}}{8\pi^2 r}$, из которого путем дифференцирования по координатам x можно определить второй тензор P_{ij}. Для случая транстропных материалов фундаментальное решение можно получить в замкнутом виде [2]. Закон Гука для ортотропного упругого материала в общем виде записывается следующим образом [5]:

$$e_{11}=s_{11}\sigma_{11}+s_{12}\sigma_{22}+s_{13}\sigma_{33}, \qquad (4)$$

или

$$e_{22}=s_{21}\sigma_{11}+s_{22}\sigma_{22}+s_{23}\sigma_{33},\quad e_{33}=s_{31}\sigma_{11}+s_{32}\sigma_{22}+s_{33}\sigma_{33},$$
$$e_{23}=\frac{1}{2}s_{44}\sigma_{23},\quad e_{13}=\frac{1}{2}s_{55}\sigma_{13},\quad e_{12}=\frac{1}{2}s_{66}\sigma_{12},$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют индексам x, y, z.

Соотношения между коэффициентами $s_{ij}=s_{ji}$ и техническими постоянными устанавливаются сравнением формул (3) и (4). Поскольку условие $s_{ij} = s_{ji}$ требует, чтобы $\frac{\nu_{ij}}{E_j} = \frac{\nu_{ji}}{E_i}$ (здесь суммирование по j не производится), то для ортотропного материала можно задать лишь девять упругих характеристик. Чтобы функция упругой энергии была положительно определенной, необходимо ввести следующие ограничения на упругие постоянные [3]:

$$
\begin{gathered}
E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad E_3 > 0, \quad G_{12} > 0, \quad G_{23} > 0, \quad G_{13} > 0, \\
1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0, \quad 1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, \\
1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} > 0,
\end{gathered}
$$

которые оказываются полезными при проверке пригодности значений упругих постоянных, найденных как экспериментально, так и полученных в результате вычислений. Они гарантируют также, что все вычисленные напряжения, деформации и все подкоренные выражения в функциях податливости являются действительными числами.

Если наложить на упругие параметры условия упругой симметрии по отношению к повороту, например, $E_1 = E_3$, $G_{12} = G_{23}$, то выражения (4) будут связывать компоненты напряжений и деформаций в транстропном материале.

Таким образом, транстропное тело можно полностью задать при помощи пяти упругих параметров (например, $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{13}, \nu_{12}$). Состояние плоской деформации для плоскости x, y определяется условиями $e_{33} = e_{13} = e_{23} = 0$. В этом случае из (4) находим, что

$$
\begin{gathered}
\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = -(s_{13}\sigma_{11} + s_{23}\sigma_{22})/s_{33}, \\
e_{11} = \left(s_{11} - \frac{s_{13}^2}{s_{33}}\right)\sigma_{11} + \left(s_{12} - \frac{s_{13}s_{23}}{s_{33}}\right)\sigma_{22}, \\
e_{22} = \left(s_{12} - \frac{s_{13}s_{23}}{s_{33}}\right)\sigma_{11} + \left(s_{22} - \frac{s_{23}^2}{s_{33}}\right)\sigma_{22}, \quad e_{12} = \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{12}.
\end{gathered}
$$

Отсюда

$$
\sigma_{11} = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22}, \quad \sigma_{22} = c_{12}e_{11} + c_{22}e_{22}, \quad \sigma_{12} = 2c_{66}e_{12}, \tag{4}
$$

где $c_{11} = \left(s_{22} - \frac{s_{23}^2}{s_{33}}\right)\Big/ s_0^2$, $c_{12} = -\left(s_{12} - \frac{s_{13}s_{23}}{s_{33}}\right)\Big/ s_0^2$, $ñ_{22} = \left(s_{11} - \frac{s_{13}^2}{s_{33}}\right)\Big/ s_0^2$, $ñ_{66} = \frac{1}{s_{66}}$,

$s_0^2 = s_{11}s_{22} - s_{12}^2 + (2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{13}^2)/s_{33}$.

Решение задачи о сосредоточенной силе в ортотропной упругой среде можно представить в виде

$$U_1^1 = k\left(\frac{\gamma_1}{q_1}\ln r_1 - \frac{\gamma_2}{q_2}\ln r_2\right), \qquad U_2^1 = k\left(-\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y_2}{x}\right),$$

$$U_1^2 = k\left(-\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y_2}{x}\right), \qquad U_2^2 = -k\left(\frac{q_1}{\gamma_1}\ln r_1 - \frac{q_2}{\gamma_2}\ln r_2\right),$$

$$\sigma_{12}^1 = kc_{66}\left(\frac{1-q_1}{q_1}\frac{y_1}{r_1^2} - \frac{1-q_2}{q_2}\frac{y_2}{r_2^2}\right), \qquad \sigma_{11}^1 = kc_{66}\left(\frac{1+q_1}{\gamma_1 q_1}\frac{x}{r_1^2} - \frac{1+q_2}{\gamma_2 q_2}\frac{x}{r_2^2}\right),$$

$$\sigma_{22}^1 = kc_{66}\left(-\frac{\gamma_1(1+q_1)}{q_1}\frac{x}{r_1^2} + \frac{\gamma_2(1+q_2)}{q_2}\frac{x}{r_2^2}\right), \qquad \sigma_{12}^2 = kc_{66}\left(\frac{1+q_1}{\gamma_1}\frac{x}{r_1^2} - \frac{1+q_2}{\gamma_2}\frac{x}{r_2^2}\right),$$

$$\sigma_{11}^2 = kc_{66}\left(\frac{1+q_1}{\gamma_1^2}\frac{y_1}{r_1^2} - \frac{1+q_2}{\gamma_2^2}\frac{y_2}{r_2^2}\right), \qquad \sigma_{22}^2 = -kc_{66}\left((1+q_1)\frac{y_1}{r_1^2} - (1+q_2)\frac{y_2}{r_2^2}\right),$$

(5)

где $k = \dfrac{1}{2\pi c_{66}(q_1 - q_2)}$, $y_i = \dfrac{y}{\gamma_i}$, $r_i^2 = x^2 + y_i^2$; величины γ_i и q_i определяются через упругие постоянные материала; постоянные γ_1^2 и q_2^2 являются корнями квадратного уравнения

$$c_{11}c_{66}\gamma^4 + [c_{12}(c_{12} + 2c_{66}) - c_{11}c_{22}]\gamma^2 + c_{66}c_{22} = 0; \tag{6}$$

постоянные q_i связаны с γ_i^2 соотношениями $q_i = \dfrac{(c_{11}\gamma_i^2 - c_{66})}{(c_{12} + c_{66})}$. При этом зависимости (5) записаны из соображений, что оба корня γ_1 и γ_2 вещественны и положительны.

Согласно [1] для анизотропного тела функция Эри определяется из уравнения

$$s_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2s_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + s_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0,$$

а характеристическое уравнение имеет вид

$$s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22} = 0. \tag{7}$$

Подставляя эти значения в уравнение (7) для осей, повернутых так, чтобы было $s_{16} = s_{61} = 0$, получим

$$c_{22}s_0^2\mu^4+\left(-2c_{12}s_0^2+\frac{1}{c_{66}}\right)\mu^2+c_{11}s_0^2=0$$

или $$c_{22}c_{66}\mu^4-\left(-c_{12}\left(c_{12}+2c_{66}\right)-c_{11}c_{22}\right)\mu^2+c_{11}c_{66}=0.$$

(8)

Из сравнения (3.41) с (3.39) следует, что $\gamma_i^2=-\dfrac{1}{\mu_i^2}$, $\gamma_i=\dfrac{i}{\mu_i}$. В работе [9] показано, что для горных пород $\mu_1=i$, $\mu_2=i\sqrt{P}$ и, следовательно, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{E_1/E_2}}$. Здесь $P=E_1/E_2$ - параметр, характеризующий связь сдвигового модуля с другими информационными характеристиками. В случае, когда $\gamma_1=\gamma_2=1$, предельный переход в формулах (5) позволяет получить соотношения для изотропного материала, причем

$$c_{11}=c_{22}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad c_{66}=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad c_{12}=c_{21}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Поскольку предельный переход в выражениях (5) соответствует вычислению предела

$$f=\lim\frac{F_1-F_2}{q_1-q_2}, \tag{9}$$

то последний заменяется производной $f=\dfrac{\partial F}{\partial q}$. При проведении вычислений учтем, что

$$\gamma=1,\quad q=1,\quad \gamma_{,q}=\frac{1}{4(1-\nu)},\quad y_{,q}=-y\gamma_{,q}. \tag{10}$$

После некоторых выкладок с учетом (9) и (10) из формул (5) получим

$$U_1^1=\frac{1}{2\pi c_{66}}\left[\ln\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{\gamma_{,q}}{q}-\frac{\gamma}{q}\right)+\frac{\gamma}{q}\frac{yy_{,q}}{\left(x^2+y^2\right)}\right]=-\frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left[\left(3-4\nu\right)\ln r-\frac{x^2}{r^2}+1\right],$$

$$U_1^2=\frac{1}{2\pi c_{66}}\left(-\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y_{,q}}{x}\right)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{xy}{r^2},\quad U_2^1=-\frac{1}{2\pi c_{66}}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y_{,q}}{x}\right)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{xy}{r^2},$$

$$U_2^2=-\frac{1}{2\pi c_{66}}\left[\ln\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{q\gamma_{,q}}{\gamma^2}\right)+\frac{q}{\gamma}\frac{yy_{,q}}{\left(x^2+y^2\right)}\right]=-\frac{1}{8\pi G(1-\nu)}\left[\left(3-4\nu\right)\ln r-\frac{y^2}{r}\right],$$

$$\sigma_{11}^1=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\gamma q-(1+q)\left(q\gamma_{,q}+\gamma\right)}{\gamma^2q^2}-\frac{1+q}{\gamma q}\frac{x2yy_{,q}}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[2\left(1-\nu\right)\frac{x}{r^2}+\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{r^4}\right],$$

$$\sigma_{11}^{2}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\frac{\gamma^{2}-(1+q)2\gamma\gamma_{,q}}{\gamma^{4}}+\frac{1+q}{\gamma^{2}}\frac{\left(x^{2}+y^{2}\right)y_{,q}-2y^{2}y_{,q}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\right]=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[2\nu\frac{y}{r^{2}}+\frac{y\left(x^{2}-y^{2}\right)}{r^{4}}\right],$$

$$\sigma_{22}^{1}=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\frac{q\left((1+q)\gamma_{,q}+\gamma\right)-\gamma(1+q)}{q^{2}}-\frac{\gamma(1+q)}{\gamma^{2}}\frac{2xyy_{,q}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\right]=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[2\nu\frac{x}{r^{2}}+\frac{x\left(x^{2}-y^{2}\right)}{r^{4}}\right],$$

$$\sigma_{22}^{2}=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{y}{x^{2}+y^{2}}+(1+q)\frac{\left(x^{2}+y^{2}\right)y_{,q}y2yy_{,q}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\right]=-\frac{1}{4\pi(1-\nu)}\left[2(1-\nu)\frac{y}{r^{2}}-\frac{y\left(x^{2}-y^{2}\right)}{r^{4}}\right],$$

$$\sigma_{12}^{1}=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{y}{x^{2}+y^{2}}\frac{q-(1+q)}{q^{2}}+\frac{1+q}{q}\frac{\left(x^{2}+y^{2}\right)y_{,q}-2y^{2}y_{,q}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\right]=\frac{1}{2\pi(1-\nu)}\left[-(1-2\nu)\frac{y}{r^{2}}-\frac{2yx^{2}}{r^{4}}\right],$$

$$\sigma_{12}^{2}=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{x^{2}+y^{2}}\frac{\gamma-(1+q)y_{,q}}{\gamma^{2}}+\frac{1+q}{q}\frac{(-2xy)y_{,q}-2y^{2}y_{,q}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\frac{x}{r^{2}}+\frac{2xy^{2}}{r^{4}}\right]. \qquad (11)$$

Следует отметить, что выражения (11) полностью совпадают с соответствующими выражениями ядер для изотропных тел в условиях плоской деформации. Поэтому, так как они получены из (5) с помощью предельного перехода, можно заключить, что анизотропные ядра представлены верно. С учетом этого нетрудно получить выражения для фундаментальных тензоров U_{ij} и P_{ij}, входящих в уравнение (1). Все вычислительные приемы, разработанные для изотропной среды, справедливы и для анизотропной. Отличие состоит лишь в фундаментальных тензорах.

Выводы. На основе анализа структурных особенностей массивов горных пород показано применение ГЭ-моделирования для решения задачи об определении НДС массивов, а также получены соотношения для учета их анизотропных свойств. Особенностью предложенного подхода является то, что для исследования анизотропных массивов используются известные подходы для изотропных массивов с разницей в форме представления интегральных ядер.

Литература

1. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975.
2. Кожахметов К.Х. .Кравченко 0.Ф., Нурмамбетова Р.Д. О граничных интегральных уравнениях анизотропного тела. // Аналитические и численные методы решения задач математики и механики. - Алма-Ата: Наука, 1984.
3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир,1987.

4. Тентиев Ж.Т., Кожахметов К.Х., Жумуков С.Ж., Мекенбаев Б.Т. Моделирование слоистой конструкции анизотропными слоями эквивалентной однородной средой с эффективными упругими характеристиками // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, №3, 1997.

5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - М.: Наука, 1977. - 416 с.

6. Тархов А.Г. К вопросу об анизотропии упругих свойств в горных породах // Материалы ВСЕГЕИ. Общ.сер.1940, №5, с. 87-96.

7. Чесноков Е.М. Сейсмическая анизотропия верхней мантии Земли. - М.:Наука,1977, - 144 с.

8. Руппенейт К.В. Механические свойства горных пород. – М.: Углетехиздат, 1954.

9. Ержанов Ж.С., Синяев А.Я. Напряжения в анизотропном массиве, ослабленном вертикальной выработкой круглого сечения // Вестник АН Каз.ССР, 1968, №10.

Раматов К.С. О возможностях метода граничных элементов при моделировании континуальных систем // Вестник Кыргызского отделения международной академии энергетики им. А.Эйнштейна, № 2(6), Бишкек, 2007, с. 100-104.