

УДК 535.41:778.38

## ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ АПЕРТУРЫ РЕШЕТКИ НА ЭФФЕКТ ТАЛЬБОТА

МАРИПОВ А., ИСМАНОВ Ю. Х.

КГТУ им. И. Раззакова

izvestiya@ktu.aknet.kg

*Эффект Тальбота изучен достаточно хорошо. Однако большинство публикаций рассматривают теоретический аспект данного эффекта для объектов неограниченных размеров. В данной статье рассматривается влияние ограниченности одномерной линейной решетки на формирование ее саморепродукций.*

*Talbot effect studied well enough. However, most publications consider the theoretical aspect of this effect for objects of unlimited size. In this article the impact of limitation of the one-dimensional linear grating on the formation of its self-reproductions is considered.*

Эффект Тальбота[1], известный уже в течение почти двух веков, достаточно хорошо изучен и имеет множество вариантов его аналитического описания. Однако почти во всех случаях, когда мы имеем дело с рассмотрением этого эффекта, рассматриваются решетки неограниченного размера. Такой подход находится в явном противоречии с реальными экспериментами, в которых используются решетки с ограниченной апертурой. Целью данного сообщения является попытка учета этого фактора при рассмотрении эффекта Тальбота.

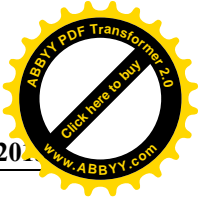
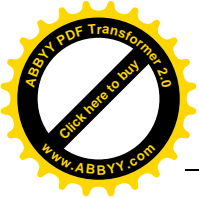
Рассмотрим одномерную линейную решетку, расположенную в плоскости  $(x_0, y_0)$  таким образом, что линии решетки параллельны оси ОХ.

Функция пропускания решетки может быть представлена как Фурье – разложение вида

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi j m x / d), \quad (1)$$

где  $d$  – период решетки.

Освещаем решетку плоской, монохроматической волной, распространяющейся вдоль оси  $Z$  и имеющей единичную амплитуду  $u(x_0, y_0, Z_0^-) = \exp(jkz_0)$ . Считая  $z_0 = 0$ , т.е. решетка помещена в начале координат, получаем  $u(x_0, y_0, Z_0^-) = 1$ . Поле сразу за решеткой равно просто произведению функции, описывающей падающую волну, на коэффициент пропускания решетки, что допустимо в силу непрерывности волны:



$$u(x_0, y_0, z_0^+) = u(x_0, y_0, z_0^-) t(x_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi j m x_0 / d), \tag{2}$$

Поле на расстоянии z от решетки будем искать в параболическом приближении. С учетом этого приближения поле на расстоянии z от плоскости решетки можно представить в виде

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz} \iint_{\infty} u(x_0, y_0, z_0^+) \exp\left\{ \frac{j\pi}{\lambda z} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} dx_0 dy_0 \tag{3}$$

Интеграл (3) можно рассчитать аналитически. С этой целью представим экспоненту под интегралом в виде произведения двух экспонент, причем сомножитель, не зависящий от переменных интегрирования, вынесем за знак интеграла. Теперь, принимая во внимание соотношение (2), получаем

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right] \iint_{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi j m x_0 / d) \times \\ \times \exp\left[\frac{jk}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \exp\left[\frac{jk}{2z}(2x_0 x + 2y_0 y)\right] dx_0 dy_0 \tag{4}$$

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{\infty} \exp(2\pi j m x_0 / d) \times \\ \times \exp\left[\frac{jkx_0^2}{2z}\right] \exp\left(\frac{jk}{2z} 2x_0 x\right) \left[\int_{\infty} \exp\left(\frac{jky_0^2}{2z}\right) \exp\left(\frac{jk}{2z} 2yy_0\right) dy_0\right] dx_0 \tag{5}$$

Рассмотрим в (5) внутренний интеграл по переменной y<sub>0</sub>. Для удобства расчета этого интеграла сделаем замены следующего вида: α = π/(λz), ξ = y/(λz), ω = 2πξ. Обозначим указанный интеграл буквой А.

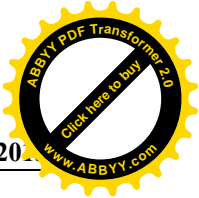
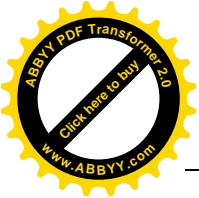
$$A = \int_{\infty} \exp\left(\frac{jky_0^2}{2z}\right) \exp\left(\frac{jk}{2z} 2yy_0\right) dy_0 = \int_{\infty} \exp(j\alpha y_0^2) \exp(j2\pi\xi y_0) dy_0. \tag{6}$$

Интеграл (6) представляет собой одномерное преобразование Фурье от функции exp(jα y<sub>0</sub><sup>2</sup>).

Воспользовавшись свойствами преобразования Фурье, найдем значение интеграла (6):

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp(j\pi / 4) \exp[-j\omega^2 / (4\alpha)] \tag{7}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем



$$A = \sqrt{\lambda Z} \exp(j\pi/4) \exp\left\{j \frac{4\pi^2 y^2}{\lambda^2 Z^2} / [4\pi / (\lambda Z)]\right\} = \sqrt{\lambda Z} \exp(j\pi/4) \exp(-j \frac{\pi}{\lambda Z} y^2) \quad (8)$$

Обозначим интеграл по переменной  $x_0$  буквой  $B$ . Согласно (5)

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi m x_0 / d) \exp\left(\frac{j k x_0^2}{2Z}\right) \exp\left(\frac{j k}{2Z} 2x_0 x\right) dx_0 \quad (9)$$

Окончательное выражение для поля на расстоянии  $z$  от плоскости решетки

$$u_z(x, y, z) = \frac{\lambda^2 \exp(jkz)}{j2\pi} \exp(j\pi/2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left[j2\pi x \frac{mx}{d} - \frac{m^2 \lambda z}{2d^2}\right] \quad (10)$$

Обобщим интеграл (10) на случай решетки с ограниченной апертурой.

1 Зададим апертуру решетки в виде при

$$|x_0| \leq a, |y_0| \leq a C(x_0, y_0) = 0 \text{ при } |x_0| > a, |y_0| > a, \quad (11)$$

где  $2a$  - апертура решетки,  $(x_0, y_0)$  - координаты плоскости решетки. Учет апертуры изменяет пределы интегрирования в (4) и, следовательно, пределы интегрирования в (6) и (9). Интеграл (6) принимает вид

$$A = \int_{-a}^a \exp(j\alpha y_0^2) \exp(j2\pi \xi y_0) dy_0 \quad (12)$$

Разложим этот интеграл на два слагаемых

$$A = \int_0^a \exp(j\alpha y_0^2) \exp(j2\pi \xi y_0) dy_0 - \int_0^{-a} \exp(j\alpha y_0^2) \exp(j2\pi \xi y_0) dy_0 \quad (13)$$

Первое слагаемое в интеграле (13) равно

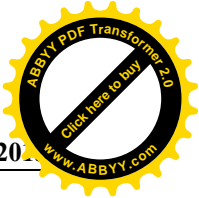
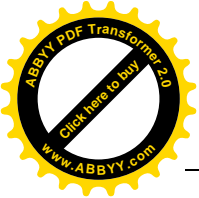
$$\int_0^a \exp(j\alpha y_0^2) \exp(j2\pi \xi y_0) dy_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \exp[-j \omega^2 / (4\alpha)] [F(a\sqrt{\alpha} - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}) + F(\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})]$$

где  $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(jy^2) dy^2$  - интеграл Френеля,  $\omega = 2\pi \xi$ .

Отсюда выражение (13) преобразуется к виду

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \exp[-j \omega^2 / (4\alpha)] [F(a\sqrt{\alpha} - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}) - F(-\sqrt{\alpha}a - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})] \quad (14)$$

Или, переходя к исходным переменным



$$A = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \exp(-j \frac{\pi}{\lambda z} y^2) \{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a - y)] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a - y)]\} \quad (15)$$

По аналогии для функции от x, с учетом сдвига на 2πm/d, получаем

$$B = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \exp(-j \frac{\pi}{\lambda z} x^2) \{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a - x + \frac{m\lambda z}{d})] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a - x + \frac{m\lambda z}{d})]\} \quad (16)$$

Окончательное выражение для поля на расстоянии z от плоскости решетки с ограниченной апертурой имеет вид

$$u_z(x, y, z) = \frac{1}{2\lambda z} \exp(jkz) \sum_{m=-L}^L a_m \exp[j2\pi(\frac{mx}{d} - \frac{m^2\lambda z}{2d^2})] \times \{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a - y)] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a - y)]\} \times \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \exp(-j \frac{\pi}{\lambda z} x^2) \{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a - x + \frac{m\lambda z}{d})] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a - x + \frac{m\lambda z}{d})]\} \quad (17)$$

$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(jy^2) dy$  - описывает спираль Корню, которая подчиняется условию  $\lim$

$F(x) = \frac{1}{2}(1+i)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Т. е. при  $x \gg 1$  распределение поля за решеткой с ограниченной апертурой близко к распределению за бесконечной решеткой. В частности, при  $z = \frac{2d^2}{\lambda} M$ , где  $M = 0, 1, 2, 3, \dots$ , распределение повторяет поле на решетке, т. е. воспроизводится с точностью до быстро меняющихся множителей в первых M- гармониках.

Из (17) следует, что влияние конечной апертуры решетки на распределение поля мало, если

$$(a - \frac{L\lambda z}{d}) - |x| \gg \sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}} \quad (18)$$

$|x| \gg d \sqrt{2M/\pi}$ . Из (18) видно, что ухудшение

распределения поля по краям происходит из – за дифракции на апертуре 2a в области размером порядка  $\sqrt{\lambda z}$ , а также, вследствие наклонного распространения пространственных гармоник, в области размером  $\sim L\lambda z/d$ . При этом на расстояниях  $z \geq d^2 / (M^2\lambda)$  преобладают искажения более высокого порядка.

### Литература

Talbot H. F. Facts relating to optical science. Phil. Mag., 1836, ser. 3, v. 9, No. 56, p. 401-402.

