УДК 535.41:778.38

ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ АПЕРТУРЫ РЕШЕТКИ НА ЭФФЕКТ ТАЛЬБОТА

МАРИПОВ А., ИСМАНОВ Ю. Х.
КГТУ им. И. Раззакова
izvestiya@ktu.aknet.kg

Эффект Тальбота изучен достаточно хорошо. Однако большинство публикаций рассматривают теоретический аспект данного эффекта для объектов неограниченных размеров. В данной статье рассматривается влияние ограниченности одномерной линейной решетки на формирование ее саморепродукций.

Talbot effect studied well enough. However, most publications consider the theoretical aspect of this effect for objects of unlimited size. In this article the impact of limitation of the one-dimensional linear grating on the formation of its self-reproductions is considered.

Эффект Тальбота[1], известный уже в течение почти двух веков, достаточно хорошо изучен и имеет множество вариантов его аналитического описания. Однако почти во всех случаях, когда мы имеем дело с рассмотрением этого эффекта, рассматриваются решетки неограниченного размера. Такой подход находится в явном противоречии с реальными экспериментами, в которых используются решетки с ограниченной апертурой. Целью данного сообщения является попытка учета этого фактора при рассмотрении эффекта Тальбота.

Рассмотрим одномерную линейную решетку, расположенную в плоскости (x_0, y_0) таким образом, что линии решетки параллельны оси OX.

Функция пропускания решетки может быть представлена как Фурье – разложение вида

$$t(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi jmx / d), \qquad (1)$$

где d – период решетки.

Освещаем решетку плоской, монохроматической волной, распространяющейся вдоль оси Z и имеющей единичную амплитуду $u(x_0, y_0, z_0^-) = \exp(jkz_0)$. Считая $z_0 = 0$, т.е. решетка помещена в начале координат, получаем $u(x_0, y_0, z_0^-) = 1$. Поле сразу за решеткой равно просто произведению функции, описывающей падающую волну, на коэффициент пропускания решетки, что допустимо в силу непрерывности волны:

$$u(x_0, y_0, z_0^+) = u(x_0, y_0, z_0^-)\, t(x_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi j m x_0 / d), \qquad (2)$$

Поле на расстоянии z от решетки будем искать в параболическом приближении. С учетом этого приближения поле на расстоянии z от плоскости решетки можно представить в виде

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz} \iint_{\infty} u(x_0, y_0, z_0^+) \exp\{\frac{j\pi}{\lambda z}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]\} dx_0 dy_0 \qquad (3)$$

Интеграл (3) можно рассчитать аналитически. С этой целью представим экспоненту под интегралом в виде произведения двух экспонент, причем сомножитель, не зависящий от переменных интегрирования, вынесем за знак интеграла. Теперь, принимая во внимание соотношение (2), получаем

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz} \exp[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)] \iint_{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi j m x_0 / d) \times$$

$$\times \exp[\frac{jk}{2z}(x_0^2 + y_0^2)] \exp[\frac{jk}{2z}(2x_0 x + 2y_0 y)] dx_0 dy_0 \qquad (4)$$

$$u_z(x, y, z) = \frac{\exp(jkz)}{jkz} \exp[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)] \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \int_{\infty} \exp(2\pi j m x_0 / d) \times$$

$$\times \exp\frac{jkx_0^2}{2z} \exp(\frac{jk}{2z} 2x_0 x)[\int_{\infty} \exp(\frac{jky_0^2}{2z}) \exp(\frac{jk}{2z} 2yy_0) dy_0] dx_0 \qquad (5)$$

Рассмотрим в (5) внутренний интеграл по переменной y_0. Для удобства расчета этого интеграла сделаем замены следующего вида: $\alpha = \pi/(\lambda z)$, $\xi = y/(\lambda z)$, $\omega = 2\pi\xi$. Обозначим указанный интеграл буквой A.

$$A = \int_{\infty} \exp(\frac{jky_0^2}{2z}) \exp(\frac{jk}{2z} 2yy_0) dy_0 = \int_{\infty} \exp(j\alpha y_0^2) \exp(j2\pi\xi y_0) dy_0 .$$

(6)

Интеграл (6) представляет собой одномерное преобразование Фурье от функции $\exp(j\alpha y_0^2)$.

Воспользовавшись свойствами преобразования Фурье, найдем значение интеграла (6):

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp(j\pi/4) \exp[-j\omega^2/(4\alpha)] \qquad (7)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$A = \sqrt{\lambda z}\, \exp(j\pi/4)\exp\{j\frac{4\pi^2 y^2}{\lambda^2 z^2}/[4\pi/(\lambda z)]\} = \sqrt{\lambda z}\ \exp(j\pi/4)\exp(-j\frac{\pi}{\lambda z}y^2) \qquad (8)$$

Обозначим интеграл по переменной x_0 буквой В. Согласно (5)

$$B = \int_{\infty} \exp(j2\pi m x_0/d)\exp(\frac{jkx_0^2}{2z}\exp(\frac{jk}{2z}2x_0 x)dx_0 \qquad (9)$$

Окончательное выражение для поля на расстоянии z от плоскости решетки

$$u_z(x,y,z) = \frac{\lambda^2 \exp(jkz)}{j2\pi}\exp(j\pi/2)\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp[j2\pi\times\frac{mx}{d} - \frac{m^2\lambda z}{2d^2})] \qquad (10)$$

Обобщим интеграл (10) на случай решетки с ограниченной апертурой.

1 Зададим апертуру решетки в виде при

$$|x_0| \le a, |y_0| \le a C(x_0, y_0) = 0 \quad \text{при}\ |x_0| > a, |y_0| > a, \quad (11)$$

где 2a - апертура решетки, $(x_0,$ $y_0)$ – координаты пло

скости решетки. Учет апертуры изменяет пределы интегрирования в (4) и, следовательно, пределы интегрирования в (6) и (9). Интеграл (6) принимает вид

$$A = \int_{-a}^{a} \exp(j\alpha y_0^2)\exp(j2\pi\xi y_0)dy_0 \qquad (12)$$

Разложим этот интеграл на два слагаемых

$$A = \int_{0}^{a} \exp(j\alpha y_0^2)\exp(j2\pi\xi y_0)dy_0 - \int_{0}^{-a} \exp(j\alpha y_0^2)\exp(j2\pi\xi y_0)dy_0$$

(13)

Первое слагаемое в интеграле (13) равно

$$\int_{0}^{a} \exp(j\alpha y_0^2)\exp(j2\pi\xi y_0)dy_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\exp[-j\omega^2/(4\alpha)][F(a\sqrt{\alpha} - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})+F(\frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})],$$

где $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \exp(jy^2)dy^2$ - интеграл Френеля, $\omega = 2\pi\xi$.

Отсюда выражение (13) преобразуется к виду

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\exp[-j\omega^2/(4\alpha)][F(a\sqrt{\alpha} - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}}) - F(-\sqrt{\alpha}a - \frac{\omega}{2\sqrt{\alpha}})]$$

(14)

Или, переходя к исходным переменным

$$A = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \exp(-j\frac{\pi}{\lambda z} y^2)\{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-y)] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-y)]\} \quad (15)$$

По аналогии для функции от x, с учетом сдвига на 2πm/d, получаем

$$B = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \exp(-j\frac{\pi}{\lambda z} x^2)\{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-x+\frac{m\lambda z}{d})] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-x+\frac{m\lambda z}{d})]\}. \quad (16)$$

Окончательное выражение для поля на расстоянии z от плоскости решетки с ограниченной апертурой имеет вид

$$u_z(x, y, z) = 1/2\lambda z \exp(jkz) \sum_{m=-L}^{L} a_m \exp[j2\pi(\frac{mx}{d} - \frac{m^2\lambda z}{2d^2})] \times \{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-y)] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-y)]\} \times$$

$$\sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \exp(-j\frac{\pi}{\lambda z} x^2)\{F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(a-x+\frac{m\lambda z}{d})] - F[\sqrt{\frac{\pi}{\lambda z}}(-a-x+\frac{m\lambda z}{d})]\}. \quad (17)$$

$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \exp(jy^2)dy$ - описывает спираль Корню, которая подчиняется условию lim F(x) = ½(1+i) при $x \to \infty$. Т. е. при x >> 1 распределение поля за решеткой с ограниченной апертурой близко к распределению за бесконечной решеткой. В частности, при $z = \frac{2d^2}{\lambda} M$, где M = 0,1,2,3,…, распределение повторяет поле на решетке, т. е. воспроизводится с точностью до быстро меняющихся множителей в первых M- гармониках.

Из (17) следует, что влияние конечной апертуры решетки на распределение поля мало, если $(a - \frac{L\lambda z}{d}) - |x| >> \sqrt{\frac{\lambda z}{\pi}}$. В плоскостях воспроизведения это условие имеет вид – 2LMd - $|x| >> d\sqrt{2M/\pi}$. (18) Из (18) видно, что ухудшение распределения поля по краям происходит из – за дифракции на апертуре 2a в области размером порядка $\sqrt{\lambda z}$, а также, вследствие наклонного распространения пространственных гармоник, в области размером ~ Lλz/d. При этом на расстояниях $z \geq d^2/(M^2\lambda)$ преобладают искажения более высокого порядка.

Литература

Talbot H. F. Facts relating to optical science. Phil. Mag., 1836, ser. 3, v. 9, No. 56, p. 401-402.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com