



## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООБМЕНА ГРУНТА

ДЖАМАНБАЕВ М.ДЖ., ДУШЕНОВА У.ДЖ., ТУРСУНКУЛОВА З.С.

КГТУ им. И.Раззакова

[izvestiya@ktu.aknet.kg](mailto:izvestiya@ktu.aknet.kg)

*Приводится методика определения температуры, коэффициентов температуропроводности и теплообмена численно-аналитическим способом, используя данные натурных наблюдений температуры.*

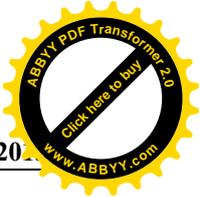
*The methods for determining the temperature coefficients of thermal conductivity and heat transfer numerical and analytical methods, using data from field observations of temperature.*

В связи со строительством и эксплуатацией горнодобывающих предприятий в мерзлых грунтах, вопросы исследования температурного режима сооружений является актуальной и прикладной задачей. Одним из важных вопросов при исследовании температурного режима является знание достоверных значений теплофизических свойств мерзлого и талого грунта в естественных условиях. Общепризнанных методик определения теплофизических свойств грунта не существует, особенно для мерзлых грунтов, т.к. при бурении мерзлых грунтов для отбора проб, льды, содержащиеся в грунтах, оттаивают, и нарушается естественное состояние грунта. Кроме того, определение коэффициента теплообмена также относится к трудным задачам. Поэтому разработка методики определения теплофизических свойств грунта имеет важное значение.

**Цель исследования** Методом идентификации математической модели теплопереноса определить

коэффициенты температуропроводностей мерзлых и талых грунтов, а также коэффициенты теплообмена, используя данные натурных наблюдений. В качестве примера рассматривается температурный режим основания хвостохранилища, т.е. под влиянием температуры воды пруда хвостохранилища нужна определить температуры грунта.

**Метод исследования** Используя линейно-независимые частные решения уравнения теплопроводности и идею метода конечных элементов, строится аналитическое решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее начально-краевым условиям [1]. С помощью построенного аналитического решения по аналогии с МКЭ [3], из начального условия задачи определяется коэффициент температуропроводности, как решение трансцендентного уравнения. Коэффициент теплообмена определяется из уравнения граничного условия третьего рода, используя заданное начальное условие температуры грунта. Остановимся подробнее на этом



алгоритме. Математическая модель процесса переноса тепла в талых и в мерзлых грунтах в одномерной постановке описывается следующим образом [4,5]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{\delta}}{\partial t} &= a_T \frac{\partial^2 T_{\delta}}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h \\ \frac{\partial T_M}{\partial t} &= a_M \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}, h \leq x \leq \infty \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Начальные условия:

при  $t = 0$ ;  $x \in [0, h]$ ;

$$T_M = f_1(x), T_T = f_2(x). \quad (2)$$

Граничные условия: при  $x=0$ ,  $R(t) + P(t) + E(t) + \lambda_T \left[ \frac{\partial T_T}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$ ;  $T(t,0) = T^*$  (3)

при  $x=h$ ,  $T_T = T_M = T_0$

Условие сопряжения на границе талого и мерзлого грунта:

$$\lambda_{\delta} \left[ \frac{\partial T_{\delta}}{\partial \delta} \right]_{\delta=h} - \lambda_M \left[ \frac{\partial T_M}{\partial \delta} \right]_{\delta=h} = q_0 w \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4)$$

где  $T_T$  - температура талого слоя грунта;  $T_M$  - температура мерзлого грунта;  $T_0$  - температура таяния льда в грунте;  $a_T, a_M$  - коэффициенты температуропроводности грунта в талом и мерзлом состояниях;  $\lambda_T, \lambda_M$  - коэффициенты теплопроводности грунта в талом и мерзлом состояниях;  $h$  - глубина протаивания;  $w$  - количество льда в грунте;  $R(t)$ ;  $P(t)$ ;  $E(t)$  - соответственно радиационный, конвективный составляющие теплообмена и теплота на испарение;  $q_0$  - теплота плавления льда.

Для построения аналитического решения данной задачи согласно идее МКЭ в качестве базисных функций выбирается линейно-независимые частные решения уравнении теплопереноса. Вид частного решения выбирается, в отличие от работы [2], не произвольно, а так, чтобы оно соответствовало физике процесса, т.е. по глубине температура грунта убывает, а по времени периодически изменяется;

$$T_1(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}} x} \cos\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}} x - 4at\right), T_2(x, t, a) = e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{a}} x} \sin\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}} x - 4at\right) \quad (5)$$

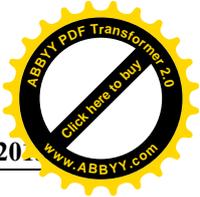
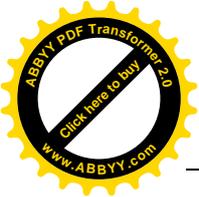
Рассматриваемая область разбивается на конечные элементы согласно температурному режиму грунта, там, где изменение температуры происходит быстрее, разбивается на мелкие элементы, а где изменение температуры происходит медленнее, разбивается на крупные элементы.

В каждом элементе аналитическое решение строится по аналогии с МКЭ следующим образом:

$$T^k(x, t, a) = N_i^k(x, t, a) * T_i + N_j^k(x, t, a) * T_j, \quad (6)$$

где  $N_i^k(x, t, a) = \frac{T_2(x_j, t, a) * T_1(x_i, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_j, t, a)}{T_2(x_j, t, a) * T_1(x_j, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_j, t, a)}$ ,

$$N_j^k(x, t, a) = \frac{T_2(x_i, t, a) * T_1(x_i, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_i, t, a)}{T_2(x_j, t, a) * T_1(x_j, t, a) - T_2(x_i, t, a) * T_1(x_j, t, a)} \quad (7)$$



аналоги функции формы МКЭ,  $k$  – номер элемента. Коэффициенты температуропроводности « $\alpha$ » каждого элемента находятся как решение трансцендентного уравнения (6), удовлетворяя начальное условие (2). Здесь  $T_i^{(0)}, T_j^{(0)}$  – начальное температурное поле, полученное из натуральных наблюдений. Для нахождения поле температурного поля грунта в любое другое время здесь не решается система линейных алгебраических уравнений как в МКЭ, а находится из условия «сшивания» решений между конечными элементами области. В качестве условия «сшивания» в работе [2] использовалась непрерывность кондуктивного теплопереноса. В данной статье в качестве условия сшивания рассмотрено условие теплообмена между элементами области, т.е. конвективный теплоперенос. Трудность такого подхода заключалась в неизвестности коэффициента теплообмена между водой и основанием пруда, а также аналогов коэффициента теплообмена между грунтами, т.е. между элементами области. Теплообмен между элементами зависит от мощности теплового потока, идущего со стороны основания пруда и холодного потока, идущие со стороны вечной мерзлоты. Поэтому коэффициенты теплообмена на стыках элементов будут разными. Используя начальное условие для температуры из уравнения граничного условия третьего рода, т.е. из условия теплообмена, находятся коэффициенты теплообмена.

После определения коэффициентов температуропроводностей и теплообмена, температурное поле грунта для последующих времен находится из условия разности температурных потоков между элементами области. Временной шаг берется не очень большим, а выбирается из физики процесса так, чтобы изменение температуры грунта было незначительным. Затем вычисляются значения температуры грунта в другом временном шаге, используя их как начальное условие, и процесс определения коэффициентов температуропроводностей, теплообмена и температуры грунта повторяется заново по изложенному алгоритму. На стыках границ или элементов области ставятся два условия теплообмена: для теплового потока, идущего со стороны пруда и со стороны грунта :

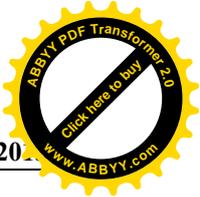
$$\frac{\partial T_{\text{в}}}{\partial x} = \gamma_1^- (T_{\text{в}} - T_1), x = 0. \tag{8}$$

$$\frac{\partial T_{\text{г}}}{\partial x} = \gamma_1^+ (T_{\text{г}} - T_{\text{в}}), x = 0. \tag{9}$$

Здесь условие (8) означает поток тепла, идущего со стороны пруда, а условие (9) – поток тепла со стороны грунта основания хвостохранилища,  $T_{\text{в}}$  – температура воды пруда;  $T_1$  – температура грунта основания пруда;

$$T_{\text{г}} = T^k(x, t, a) = N_i^k(x, t, a) * T_i + N_j^k(x, t, a) * T_j,$$

- температура грунта в  $k$ -ом элементе, с помощью которой находятся коэффициенты температуропроводностей для каждого элемента;  $\gamma_1^-$ ,  $\gamma_1^+$  – коэффициенты теплообмена между водой и грунтом, грунтом и водой. Коэффициенты теплообмена находятся,



используя начальные условия температуры и вычисленные коэффициенты температуропроводностей при  $t_0 = 0$ .

$$\gamma_1^- = \frac{\partial T_B / \partial x}{T_B^{(0)} - T_1^{(0)}}, \quad \gamma_1^+ = \frac{\partial T_r / \partial x}{T_1^{(0)} - T_B^{(0)}} \quad (10)$$

Используя найденные значения коэффициентов теплообмена, находятся значения температуры в последующие моменты времени для первого элемента «1»

$$T_1 = \frac{(T_B \gamma_1^- - \partial T_B / \partial x)}{\gamma_1^-},$$

$$T_2 = \frac{(\frac{\gamma_1^+}{\gamma_1^-} * \frac{\partial T_B}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial x} * T_1)}{\partial N_j / \partial x} \quad (11)$$

Температура грунта для последующих элементов находится из условия «сшивания», т.е. из уравнения, характеризующего разность температурных потоков на стыках элементов. На стыке элементов «1» и «2» имеем уравнение

$$\frac{\partial T_r^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial T_r^{(2)}}{\partial x} = \gamma_2^- (T_2 - T_3) - \gamma_2^+ (T_2 - T_1)$$

$$\text{или } T_3 = \frac{\gamma_2^- T_2 - \gamma_2^+ (T_2 - T_1) - \frac{\partial T_r^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial x} * T_2}{\gamma_2^- - \partial N_j^{(2)} / \partial x} \quad (12)$$

Коэффициенты теплообмена  $\gamma_2^-$ ,  $\gamma_2^+$  находятся из условия теплообмена, используя начальное условие для температуры:

$$\gamma_2^- = \frac{\partial T_r^{(1)} / \partial x}{T_2^{(0)} - T_B^{(0)}}, \quad \gamma_2^+ = \frac{\partial T_r^{(2)} / \partial x}{T_2^{(0)} - T_1^{(0)}} \quad (13)$$

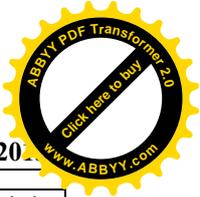
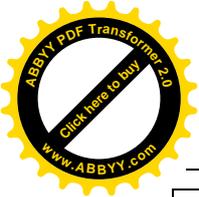
Повторяя этот алгоритм, находим последующие значения температуры грунта.

В отличие от обычных численных методов, здесь не проводится решение системы алгебраических уравнений, т.е. нет операций приближенного вычисления производных и интегралов, а они вычисляются аналитически. При этом мы избавляемся от вычислительных погрешностей. Достоверность предложенного алгоритма проверялась на практическом примере, где использовались данные наблюдения температуры грунта с помощью термисторов из наблюдательной скважины глубиной 20м. Эта глубина разбита неравномерно на 10 элементов. В табл.1 приведены значения коэффициентов температуро-проводностей по глубинам, найденные как решения трансцендентного уравнения (6) с точностью  $\varepsilon = 0.002$ . Как видно из табл.1, значения коэффициентов температуропроводностей до глубины 7.53м. постоянны и равны 0.2765, а от 7.53м. до 20м. также постоянны и равны 4.402. В табл.2 приведены значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов, вычисленные по формуле (12).

Таблица 1.

Значения коэффициентов температуропроводностей

	4.	5	6.	7	8	9.	11.	14.
	53-5.53	.53-6.53	53-7.53	.53-8.53	.53-9.53	53-11.53	53-14.53	53-19.53



	0,	0	0,	4	4	4,	4,4	4,4
	2765501	,27655	27655	,40155	,40155	40155	0155	0155

Таблица 2.

**Значения коэффициентов теплообмена на стыках элементов**

	4,	5,	6,	7,	8,	9,	1	1	1
	53	53	53	53	53	53	1,53	4,53	9,53
[k]	-	-	9,	-	-	5,	1	5,	-
	0,5380083	17,85291	311128	100,3299	54,04002	554611	7,77161	358785	10,43885
1[k]	-	1	-	2	3,	-	-	-	1,
	0,0721688	9,10033	526,9399	5,18457	698798	25,88969	3,78001	10,96662	12968

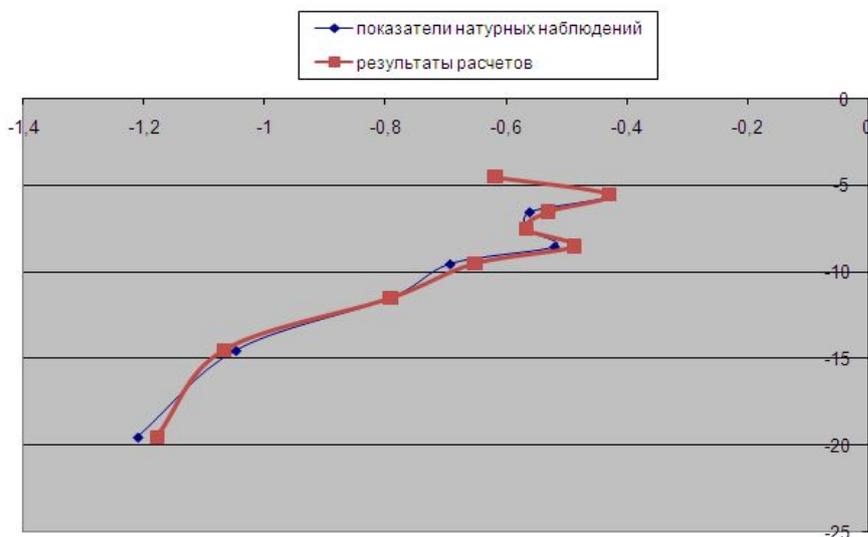
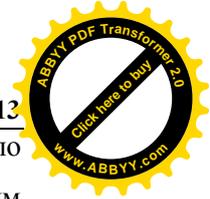
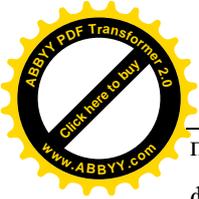


Рис.1 Графики значения температуры, вычисленные теоретическим способом и данные из натуральных наблюдений

Вторая строка  $M[k]$  соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующим поток тепла, со стороны дна пруда, а третья строка  $M1[k]$  соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующим поток тепла со стороны вечной мерзлоты. Используя найденные теплофизические параметры, определены значения температуры грунта в разные времена и на разных глубинах по формуле (11) и (12). На рис.1 показаны графики значений температуры, вычисленных теоретическим способом, и данные из натуральных наблюдений. Как видно из графика, они почти совпадают. Это подтверждает правильность подхода и алгоритма определения температуры грунта, коэффициентов теплопроводностей и теплообмена.

Вторая строка  $M[k]$  соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующим поток тепла, со стороны дна пруда, а третья строка  $M1[k]$  соответствует коэффициентам теплообмена, характеризующим поток тепла со стороны вечной мерзлоты. Используя найденные теплофизические



параметры, определены значения температуры грунта в разные времена и на разных глубинах по формуле (11) и (12). На рис.1 показаны графики значений температуры, вычисленных теоретическим способом, и данные из натуральных наблюдений. Как видно из графика, они почти совпадают. Это подтверждает правильность подхода и алгоритма определения температуры грунта, коэффициентов теплопроводностей и теплообмена.

### Литература

1. Джаманбаев М.Дж. Методы решения и идентификации параметров математической модели процессов переноса. Бишкек: Илим, 1996. – стр. 121.
2. Джаманбаев М.Дж., Кадыркулова С. Методика расчета теплопереноса в горных породах. Известия Кыргызского технического университета им. И. Раззакова, № 7-Бишкек. 2005. - с.129 -133.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер.с англ. –М.: Мир, 1979.- стр. 392
4. Томирдиаро С.В. Тепловые расчеты оснований в районах вечной мерзлоты. Магагадан. 1963. – стр.104.
5. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов (общая и прикладная). М.ВШ., 1973. - 446 стр.