

**Министерство образования, науки и молодежной политики
Кыргызской Республики
Кыргызский Государственный технический университет
им. И. Раззакова**

**Диссертационный совет
Д 01.05.267**

На правах рукописи

УДК 532. 546 + 518.5

Мурзакматов Мукай Усупович

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО
СОСТОЯНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД С
ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИХ
ПАРАМЕТРОВ**

Специальность 01.02.05 - Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-
математических наук

Бишкек – 2006

Работа выполнена в Бсыккульском государственном университете им. К. Тыныстанова в г. Каракол

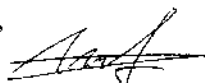
- Научный консультант:** - Засл. деятель науки Кыргызской Республики, доктор технических наук, профессор **Джаныбеков Ч.Дж.**
- Официальные оппоненты:** - доктор физико-математических наук, профессор **Туганбаев У.М.** ;
- доктор геолого-минералогических наук, профессор **Матыченков В.Е.** ;
- доктор физико-математических наук, профессор **Асанов А.А.**
- Ведущая организация:** Институт гидрогеологии и гидрофизики им. У.М. Ахмедсафина Министерства образования и науки Республики Казахстан, 480100, г. Алматы, ул. Ч. Валиханова, 94.

Защита состоится 30 июня 2006 г. в 14.00 часов на заседании Диссертационного Совета Д.01.05.267 при КГТУ им. И.Раззакова по защите докторских (кандидатских) диссертаций по адресу: 720044, г. Бишкек, пр. Мира, 66, ауд. 1/259.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызского Государственного технического университета им. И.Раззакова.

Автореферат разослан 18 мая 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, кандидат технических наук, доцент



А.С. Иманкулова

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена проблемам математического моделирования гидрогеофизических процессов фильтрации подземных вод и переноса ими нейтральных загрязнителей в неоднородной пористой среде.

Актуальность темы диссертации. За последние годы в Кыргызской Республике масштабы гидротехнического и гидромелиоративного строительства сократились, а инфраструктура таких объектов стареет, выходит из строя.

С ростом урбанизации в республике резко увеличилось население больших и средних городов, что привело к нехватке пресной воды и загрязнению эксплуатационных запасов месторождений подземных вод (МПВ). К примеру, за последние 15 лет население г. Бишкек увеличилось в 1,5 раза, в настоящее время в нем живет почти четверть населения Кыргызстана. Аналогичная картина происходит и в средних городах КР. Население этих городов снабжаются пресными подземными водами, отбираемыми из МПВ с помощью вертикальных дрен, расположенных на их территории.

В настоящее время вокруг этих городов появились одноэтажные деревни с саманными домами-временками, построенные без учета сейсмической и санитарной безопасности, что существенно увеличивает вероятность загрязнения источников подземных пресных вод. Поэтому изучение процессов фильтрации и переноса загрязнителей подземными водами, а также прогнозирование возможных последствий происходящих процессов является актуальной проблемой, что приводит к необходимости эффективного исследования динамики перечисленных процессов.

Как известно, коэффициент фильтрации, водопроницаемость пласта и гидрофизические характеристики, как коэффициент диффузии, коэффициент дисперсии в исследуемой области фильтрации изменяются от точки к точке. Из используемых математических моделей видно, что они недоопределены в том смысле, что количество уравнений меньше чем количество неизвестных. Неизвестные коэффициенты, являющиеся характеристиками среды, не имеют аналитическое выражение, известны лишь их приближенные значения, полученные путем измерения на небольшом количестве точек. Опытные фильтрационные измерения, как правило, проводятся с существенной погрешностью, достигающей до 10% и более. Отсюда возникает соображение о том, что при анализе существующих математических моделей необходимо добиваться адекватного описания процесса фильтрации, требующего разработки эффективных методов, доводящих решение проблемы до чисел.

Итак, исследуемые в диссертационной работе математические модели процесса фильтрации приводят к решению некорректно сформулированных

дифференциальных уравнений с использованием недостаточной информации о гидрогеофизических характеристиках среды, получаемых путем измерения. Математическое моделирование процессов фильтрации при отсутствии явного аналитического выражения коэффициентов, используя только их точечные значения, называется идентификацией (приведением в соответствие) исследуемого конкретного объекта.

В процессе моделирования локальных задач гидрогеологии используются прямые и обратные методы, приводящие к увеличению размерности и плохой обусловленности аппроксимирующих алгебраических систем уравнений. Для выхода из создавшегося затруднения в работе применяется модифицированный метод конечных элементов (МКЭ), где область фильтрации разбивается на крупные фрагменты, а потеря точности компенсируется использованием квадратичных базисных функций. Эта модификация условно названа методом фрагментов (МФ).

Кроме сказанного, при решении проблем идентификации гидрогеофизических параметров основная трудность заключается в восстановлении оператора уравнений по заданному набору некоторых функционалов модели. В качестве функционалов обычно принимаются показания измерительных приборов, т.е. наблюдательных скважин. Наиболее доступным и экономичным методом идентификации их является приближенное решение обратных задач для дифференциальных уравнений теории фильтрации. Основной проблемой в работе является разработка и апробация алгоритмов идентификации гидрогеофизических параметров, основанных на методе малых возмущений.

Тема диссертации связана с научной программой "Разработка принципов, методов, технических средств и базовой информационной системы прогнозирования экологического состояния подземной гидросферы", выполняемой в Институте автоматики НАН КР в 1998-2005гг. (№ государственной регистрации 0000903).

Цель диссертации заключается в разработке и реализации экономичных алгоритмов приближенного решения многомерных прогнозных и идентификационных проблем теории фильтрации подземных вод и переноса загрязнителей в пористых средах.

Задачи диссертационной работы состоят: в теоретическом исследовании движения подземных вод и переносимых ими загрязняющих веществ с помощью математического моделирования с применением вычислительной техники в месторождениях подземных вод; в применении экономичных ме-

тодов и алгоритмов решения характерных проблем теории фильтрации, дающих возможность адекватно описывать пространственное движение подземных вод; в анализе и использовании существующих методов решения обратных задач математической физики и разработке нового метода идентификации гидрогеофизических параметров среды.

Научная новизна работы. Разработан метод идентификации гидрогеофизических параметров пористой среды, основанный на методе малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений и проведен сравнительный анализ с известными методами решения обратных задач.

Теоретическая и практическая значимость. Метод идентификации, основанный на теории возмущений, имеет важное теоретическое значение при решении обратных задач фильтрации жидкости. Он также может применяться при исследовании процессов, описываемых эллиптическими и параболическими уравнениями. Практическая ценность работы заключается в том, что разработанные алгоритмы и программы могут применяться в гидрогеологических расчетах, а также в учебном процессе для чтения спецкурсов и выполнения дипломных работ.

Экономическая значимость полученных результатов. Предлагаемая методика идентификации гидрогеофизических параметров может применяться в водохозяйственных и гидромелиоративных расчетах, частично заменяя дорогостоящие опытно - фильтрационные работы (ОФР).

Основные положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Для кусочно однородных водоносных пластов предлагается использовать модифицированный МКЭ.
2. МКЭ и МФ реализованы трехмерные модели прогнозирования движения подземных вод и переноса загрязняющих веществ с идентификацией гидрогеофизических параметров в стационарном и нестационарном режиме.
3. Исходя из математической модели процесса фильтрации с переносом загрязнителей, удалось идентифицировать неизвестные гидрогеофизические параметры неоднородной среды в двух- и трехмерных задачах. Показаны эффективность и надежность использованных в работе методов идентификации гидрогеофизических параметров пористой среды.
4. Рекомендуется ввести в практику изучения экологического состояния МПВ методику идентификации гидрогеофизических параметров с помощью метода малых возмущений, имеющую широкий диапазон применения.
5. На основе предложенных алгоритмов созданы комплексы программ,

экономичные по отношению затрат машинного времени и легко реализуемые другими пользователями для исследования гидрогеофизических процессов.

Личный вклад соискателя. Анализ и разработка математических методов и алгоритмов расчета движения подземных вод и переноса загрязнителей и идентификации фильтрационных параметров водоносных пластов; составление программ для прогнозных и идентификационных задач гидрогеодинамики; количественный и качественный анализ результатов и обсуждение итогов проведенных вычислительных экспериментов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследований диссертационной работы обсуждались на различных научных семинарах и конференциях: на ряде международных, всесоюзных и республиканских научно-технических конференций по математическому моделированию гидрогеологических процессов и автоматизации гидромелиоративных систем, на съездах и совещаниях по теоретической и прикладной механике в 1974-1990 гг., на Международной научной конференции "Математическое моделирование в естественных науках" в Каз ГНУ им. Аль-Фараби (Алматы, 1997г.), на научно-практических конференциях, посвященных: 60-летию образования Иссык-Кульской области (Каракол, 1999г.), 60-летию образования Иссык-Кульского государственного университета им. К. Тыныстанова (Каракол, 2000г.), 5-летию образования Нарынского государственного университета (Нарын, 2001г.), на Международной конференции "Модернизация высшей школы в переходный период: состояние и перспективы", посвященной 50-летию образования КГПУ им. И.Арабаева (Бишкек, 2002 г.), на Республиканской научно-практической конференции "Проблемы социально-экономического развития горных районов Кыргызстана", (Джалал-Абад, 2002 г.), на Республиканской конференции "Проблемы прикладной математики, механики и инженерного образования" (Бишкек, 2004г.), на Международном научно-техническом симпозиуме "Образование через науку", посвященном 50-летию ФПИ-КТУ им. И. Раззакова (Бишкек, 2004г.), на второй Международной конференции по электронике и компьютерным технологиям ИКЕССО' 2005 (Бишкек, 2005 г.), на научном семинаре секции физико-математических и технических наук НТС, на семинарах кафедры прикладной математики ИГУ им. К. Тыныстанова (Каракол, 1998-2005 гг.) и на объединенном семинаре лабораторий Института автоматизации НАН КР (Бишкек, 2002-2005гг.).

Опубликованность результатов. Содержание диссертационной рабо-

ты изложены в одной научной монографии и свыше 25 научных статьях, которые опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и заключения, изложенных на 235 страницах машинописного текста, содержит 25 таблиц, 9 рисунков и список использованной литературы из 194 наименований.

Краткое содержание работы

В введении изложены актуальность рассматриваемых проблем, методы исследования и научная новизна, обоснованность и достоверность результатов исследований, практическая и теоретическая ценность работы и основные положения, выносимые на защиту.

Глава 1. Краткий обзор методов решения задач идентификации гидрогеологических параметров

В §1.1 дана краткая историческая справка об исследованиях по теории фильтрации математическими методами.

При проведении гидрогеологических исследований на достаточно крупных месторождениях подземных вод, особенно при обосновании проектов водозаборных и дренажных сооружений или крупных оросительных и осушительных систем, применение математического моделирования с использованием вычислительной техники является необходимым. Это требование объясняется экономичностью и быстротой реализации проекта в жизнь.

Основным методом решения указанных проблем в настоящее время является математическое моделирование гидрогеологических процессов с применением ЭВМ. В гидрогеологии математическое моделирование как метод расчета берет начало в работах В.И. Аравина и С.Н. Нумерова, П.Я. Полубариновой - Кочиной, Н.Н.Веригина, В.М. Шестакова, Ф.Б.Абуталиева и других. С.Н.Нумеровым был разработан метод, основанный на приведении плоской задачи теории установившейся фильтрации к граничным задачам Римана-Гильберта в теории аналитических функций, который получил применение при решении ряда задач фильтрации в земляных плотинах. П.Я. Полубариновой-Кочиной разработан метод решения задач теории установившейся фильтрации, основанный на аналитической теории дифференциальных уравнений. Ф.Б. Абуталиевым получены аналитические решения задач неустановившейся фильтрации подземных вод в многослойных пластах с учетом упругости слабопроницаемых прослоек.

За последние три десятилетия одним из приближенных методов решения задач теории фильтрации является МКЭ, который оказался удобным при изучении движения подземных вод в областях со сложной геометрией и с неизвестной свободной поверхностью. В настоящее время на ЭВМ решаются задачи региональной оценки ресурсов и эксплуатационных запасов подземных вод, составления различных прогнозов на орошаемых территориях с учетом работы дренажей, рассматриваются задачи оптимального выбора условий эксплуатации водозаборов, дренажей, решаются обратные задачи.

Обратные задачи гидрогеологии часто решаются совместно с прямыми задачами, так как приходится параллельно уточнять как значения динамических функций, так и значения гидрогеологических параметров. Ясно, что в практической ситуации задача должна быть хорошо поставлена в физическом смысле, но в обычной математической формулировке обратная задача является плохо обусловленной. Это происходит главным образом из-за недостающих или неточных данных, а также из-за того, что различные комбинации искомых параметров могут привести к одинаковым результатам, что означает неединственность. Недостаток информации делает исследуемую модель недоопределенной, которую можно улучшать по мере получения новых данных путем решения обратных задач.

В §1.2 дана характеристика задач гидрогеологии, описаны трудности, встречающиеся при их решении. Для достоверного описания процесса фильтрации подземных вод необходимо не только решать нелинейные дифференциальные уравнения и их системы совместно с начально-краевыми условиями в области со сложной геометрией, но и приближенно образовывать соответствующие начальные и граничные условия, однозначно описывающие процесс фильтрации на конкретных локальных подобластях изучаемого района, а также следует приводить в соответствие модели к изучаемому объекту с помощью идентификации отдельных гидрогеологических параметров среды.

Накопление значительного объема данных о различных типах водоносных горизонтов привело к критической переоценке теоретических решений и к осознанию важности обратной задачи. Использование численных методов в значительной мере способствовало объединению гидравлических и химических моделей водоносных горизонтов.

Под обратными задачами гидрогеологии подразумеваются задачи, целью которых является доопределение либо гидрогеологических параметров, либо граничных условий, либо дифференциального оператора задачи. Путем решения обратных задач исследователь должен доопределить некорректную задачу и идентифицировать математическую модель процесса фильтрации, т.е. установить соответствие исследуемого гидрогеологического объекта сво-

ему образу, выраженному в математической модели. В таком понимании содержание обратных задач и задач идентификации совпадают.

Основные трудности в решении обратных гидрогеологических задач связаны с тем, что они относятся к классу некорректных задач. Математически это выражается в отсутствии непрерывной зависимости решения от входных данных, означающем, что небольшие погрешности в измерении расходов или отметок уровней воды, на основе анализа которых ведется решение обратной задачи, могут обуславливать весьма широкий разброс в величине оцениваемых параметров, т.е. возникает неоднозначность в результатах подбора параметров. Математические обоснования и приемы приведения некорректных обратных задач к условно корректным изложены в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, Г.И. Марчука, В.А. Морозова и других. Показано, что обосновать однозначность решения обратных задач можно путем введения так называемых критериев физического правдоподобия. Они уменьшают неопределенность в подборе параметров, ограничивают возможный диапазон их изменения. Действительно, априорная информация о возможном законе изменения фильтрационных свойств пласта позволяет выделить фрагменты с одинаковой величиной водопроницаемости, коэффициентов фильтрации и диффузии и существенно сократить число искомых параметров.

Обратные задачи позволяют определить в отдельных точках области фильтрации значения гидрогеологических параметров по картам гидро или пьезоизогипс или по отдельным значениям отметок пьезометрических уровней, расходов скважин, дебитов источников, фильтрационных потерь и т.п. В такой постановке определением параметров с использованием различных математических моделей занимались Ф.Б. Абуталнев, Н.Н. Веригин, В.В. Веселов, И.К. Гавич, Ч.Д. Джаныбеков, М.Дж. Джаманбаев, И.Е. Жернов, В.А. Мироненко, Н.А. Огильви, В.М. Шестаков, R.W. Nelson, S. Neuman, V. Vemuri, W.J. Karplus, Y. Emselem, G. De Marsily и др.

Приближенные методы идентификации основаны на требованиях дискретной информации об искомых функциях и параметрах модели и в применении численных методов. Эти методы используют сложные итерационные процессы для целенаправленного поиска параметров, т.е. параметры последовательно уточняются от одного приближения к другому в процессе решения прямой задачи. В эту группу входят многие численные методы, отличающиеся своими подходами при решении этой проблемы (например, метод регуляризации, метод малых возмущений и т.д.).

В работах Ч.Дж. Джаныбекова и М.Дж. Джаманбаева разработаны новые методики идентификации математической модели, позволяющие построить адекватную модель объекта и дополняющие изыскания в проблеме иден-

тификации, созданы аналитические и приближенные методы решения задач фильтрации, обоснованы достоверность и точность разработанных методик идентификации теоретически и численно. Ч. Дж. Джаныбеков разработал ряд алгоритмов, идентифицирующих коэффициент водопроводимости неоднородного пласта, основанные на вариационном принципе или на аппарате нелинейного программирования, использующие линейные и нелинейные базы конечных элементов. Характер конструкции каждого алгоритма связан с условием задания внутренних условий, точность их согласована с точностью входных данных, хотя отдельные из них являются адаптирующимися и самоисправляющимися в процессе итерации.

Некоторые обратные задачи математической физики успешно решаются на основе методов теории малых возмущений и теории сопряженных функций. В последнее время на основе этих теорий разработаны алгоритмы для идентификационных задач теории фильтрации.

В §1.3 рассматривается вывод дифференциальных уравнений, описывающих фильтрационные и диффузионные процессы, которые предстоит исследовать и начально краевые условия, обеспечивающие единственность решения этих уравнений.

Исходя из гидродинамических уравнений Эйлера, используя закон Дарси как линейный закон сопротивления и уравнение неразрывности, с учетом источников и стоков, перетоков из ниже и вышележащих водоносных горизонтов получается уравнение неустановившейся напорной фильтрации подземных вод

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = f, \quad (1.1)$$

где $H=H(x,y,z,t)$ функция напора, $k=k(x,y,z)$ коэффициент фильтрации, $\mu=\mu(x,y,z)$ упругая водоотдача, $f=f(x,y,z,t)$ функция источников и стоков.

Баланс массы вещества в пористой среде в сочетании с основным законом диффузии (законом Фика) приводит к уравнению переноса растворенных веществ

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} - v_y C \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} - v_z C \right) = g. \quad (1.2)$$

Здесь $C=C(x,y,z,t)$ концентрация вещества, $D=D(x,y,z)$ коэффициент конвективной диффузии, v_x, v_y, v_z компоненты скорости фильтрации, $n_0=n_0(x,y,z)$ пористость пласта, $g=g(x,y,z,t)$ источник растворимого вещества. Даны формулировки начально краевых условий для уравнений (1.1), (1.2), обеспечивающих единственность их решения.

В §1.4 изложены требования, предъявляемые к тестовым задачам.

Глава 2. Приближенное решение плановых задач фильтрации и массопереноса

В §2.1 выводится алгоритм решения МКЭ стационарного уравнения напорной фильтрации

$$LH = -\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (2.1)$$

$$lh = T \frac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha(x, y), \quad (x, y) \in \partial D = S, \quad (2.2)$$

где $Q(x, y)$ - функция, учитывающая переток из ниже- и вышележащих пластов.

Плоская область D разбивается на треугольные элементы с общим числом вершин (узлов) n . Пусть элемент (e) имеет своими вершинами точки i, j, k с координатами (x_i, y_i) , (x_j, y_j) и (x_k, y_k) . Внутри этого элемента решение задачи ищется в виде

$$H^{(e)}(x, y) = H_i N_i^{(e)}(x, y) + H_j N_j^{(e)}(x, y) + H_k N_k^{(e)}(x, y),$$

где $H_s = H(x_s, y_s)$ ($s=i, j, k$) значения искомой функции в узлах сетки;

$$N_s^{(e)}(x, y) = (a_s + b_s x + c_s y) / A_e, \quad s = i, j, k,$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j,$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad c_j = x_i - x_k,$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i, \quad b_k = y_i - y_j, \quad c_k = x_j - x_i,$$

$$A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}.$$

В сеточной области искомая функция представляется в виде

$$H(x, y) \approx H_n(x, y) = \sum_e H^{(e)}(x, y) = \sum_{j=1}^n H_j N_j(x, y). \quad (2.3)$$

Подставляя в уравнениях (2.1), (2.2) вместо H функцию H_n и применяя обобщенный принцип Галеркина, получаем систему уравнений

$$\iint_D N_i (LH_n - f) dx dy + \int_S N_i (lH_n - \alpha) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

После замены функции H_n ее разложением (2.3) и применения формулы Грина приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

с коэффициентами

$$a_{ij} = \iint_b T(x, y) q(N_i, N_j) dx dy + \iint_b N_i N_j Q(x, y) dx dy + \int_s N_i N_j \beta(x, y) ds,$$

$$f_i = \iint_b N_i f(x, y) dx dy + \int_s N_i \alpha(x, y) ds,$$

где

$$q(N_i, N_j) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}.$$

СЛАУ (2.4) хорошо обусловлена, ее матрица имеет диагональное преобладание, поэтому она решается методом Гаусса.

В §2.2 МКЭ решаются нестационарные двумерные уравнения фильтрации подземных вод и массопереноса. Если фильтрационный поток осредняется по высоте, то уравнение диффузии (1.2) запишется в виде

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} - v_y C \right) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

с начально краевыми условиями

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

$$D \frac{\partial C}{\partial n} = \beta_c C + \alpha_c, \quad (x, y) \in \partial G = S, \quad t > 0.$$

Загрязняющие вещества переносятся подземными водами, поэтому предварительно необходимо определить вектор скорости фильтрации $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ из уравнения фильтрации

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f(x, y, t), \quad (x, y) \in G, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

$$T \frac{\partial H}{\partial n} = \beta H + \alpha, \quad (x, y) \in S, \quad t > 0.$$

Уравнения (2.5) и (2.6) слабосвязаны, т.к. в уравнении (2.5) присутствует функция $H(x, y, t)$ (через \mathbf{v}), но функция $C(x, y, t)$ в уравнении (2.6) не участвует, поэтому совместное их решение невозможно. Следует сначала решить задачу (2.6), вычислить компоненты v_x и v_y по формулам $v_x = k \partial H / \partial x$, $v_y = k \partial H / \partial y$, а затем решить задачу (2.5).

Разбив область G на треугольные элементы, приближенное решение задач (2.5) и (2.6) ищем в виде

$$C_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^n C_j(t) N_j(x, y),$$

$$H_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t) N_j(x, y).$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи (2.5). Задача (2.6) решается совершенно аналогично. Предварительно временной отрезок $[0, T_0]$, на котором изучается рассматриваемый процесс, разобьем на q элементарных отрезков длиной $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k=1, 2, \dots, q$. Подставляя в задаче (2.5) вместо $C(x, y, t)$ функцию $C_n(x, y, t)$ и проведя интегрирование на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем уравнения

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \iint_G N_i(LC_n - g) dx dy + \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \int_S N_i(LC_n - \alpha_c) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$L = n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial}{\partial x} - v_x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial}{\partial y} - v_y \right), \quad l = D \frac{\partial}{\partial n} - \beta_c.$$

После подстановки вместо C_n ее разложения и использования формулы Грина приходим к СЛАУ

$$\sum_{j=1}^n c_{ij}^{(k)} C_j^{(k)} = g_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

с коэффициентами

$$c_{ij}^{(k)} = S_{ij} + D_{ij} + \sigma R_{ij}^{(k)} \Delta t_k,$$

$$g_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n [S_{ij} - (1 - \sigma) R_{ij}^{(k-1)} \Delta t_k] C_j^{(k-1)} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} (A_i + G_i) dt.$$

Здесь

$$S_{ij} = \iint_G n_0(x, y) N_i(x, y) N_j(x, y) dx dy, \quad R_{ij} = -V_{ij}^{(k)} - H_{ij}^{(k)} - B_{ij}^{(k)},$$

$$D_{ij} = \iint_G D(x, y) q(N_i, N_j) dx dy, \quad V_{ij}^{(k)} = \iint_G N_i \left(v_x^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_y^{(k)} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$H_{ij}^{(k)} = \int_S \frac{1}{m} N_i N_j (\beta^{(k)} H^{(k)} + \alpha^{(k)}) ds, \quad B_{ij}^{(k)} = \int_S N_i(x, y) N_j(x, y) \beta_c(x, y, t_k) ds,$$

$$A_i = \int_S N_i(x, y) \alpha_c(x, y, t) ds, \quad G_i = \iint_G N_i(x, y) g(x, y, t) dx dy,$$

m - мощность пласта.

В общем случае матрица системы (2.7) не является симметричной, ее можно решить одним из точных или приближенных методов. В таблицах 2.1 и 2.2 приведены точные и приближенные значения функций $H(x,y,t)$ и $C(x,y,t)$, полученные при решении тестовой задачи.

Сравнительно быстрый рост погрешности в расчете концентрации загрязняющего вещества объясняется тем, что она аккумулирует погрешности обеих задач, к тому же по результатам решения задачи (2.6) выполняется некорректная операция численного дифференцирования напорной функции.

В § 2.3 рассматривается приближенное решение плановых задач фильтрации методом фрагментов. При решении задач численными методами, особенно при идентификации параметров среды, одной из основных трудностей является решение СЛАУ, состоящей из большого количества уравнений. Поэтому создание экономичного метода приближенного решения задач фильтрации представляет собой актуальную проблему. Для решения этой проблемы целесообразно использовать естественную фрагментность исследу-

Таблица 2.1

Точные и приближенные значения напоров.

№ узл.	$t=0.05$		$t=0.25$		$t=0.5$	
	Точные знач.	Приблж. знач.	Точные знач.	Приблж. знач.	Точные знач.	Приблж. знач.
2	1.294	1.272	1.581	1.554	2.029	1.995
9	1.316	1.288	1.608	1.574	2.064	2.02
13	1.094	1.066	1.336	1.302	1.716	1.672
14	1.178	1.15	1.439	1.404	1.848	1.803
19	1.051	1.021	1.284	1.248	1.649	1.602
22	1.314	1.286	1.605	1.57	2.061	2.017

Таблица 2.2

Точные и приближенные значения концентрации солей.

№ узл.	$t=0.05$		$t=0.25$		$t=0.5$	
	Точные знач.	Приблж. знач.	Точные знач.	Приблж. знач.	Точные знач.	Приблж. знач.
2	2.588	2.6	3.161	3.187	4.059	4.169
9	2.633	2.629	3.215	3.219	4.129	4.131
13	2.188	2.168	2.672	2.653	3.431	3.425
14	2.356	2.34	2.878	2.862	3.695	3.643
19	2.103	2.072	2.568	2.531	3.297	3.253
22	2.628	2.615	3.21	3.196	4.122	4.001

дуемой области фильтрации. Знание фрагментности области позволяет выделить участки, в пределах которых гидрогеологические параметры среды имеют постоянные значения или они изменяются незначительно. В таких случаях вместо относительно малых элементов можно использовать крупные фрагменты, а для компенсации возросшей погрешности из-за увеличения шага сетки следует применять нелинейные базисные функции.

Введя произвольные линейно-независимые функции $N_1(x, y)$, $N_2(x, y)$ в области D , искомую функцию $H(x, y, t)$ в уравнении (2.6) внутри фрагмента (f) аппроксимируем функцией

$$H^{(f)}(x, y, t) = a^{(f)}(t) + b^{(f)}(t)N_1(x, y) + c^{(f)}(t)N_2(x, y). \quad (2.8)$$

Коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a(t) + b(t)N_{1i} + c(t)N_{2i} = H_i(t), \\ a(t) + b(t)N_{1j} + c(t)N_{2j} = H_j(t), \\ a(t) + b(t)N_{1k} + c(t)N_{2k} = H_k(t), \end{cases}$$

где

$$N_{1s} = N_1(x_s, y_s), N_{2s} = N_2(x_s, y_s), H_s(t) = H(x_s, y_s, t), \quad s = i, j, k$$

Подставляя выражения для $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ в (2.8), получаем

$$H^{(f)}(x, y, t) = H_i(t)N_i^{(f)}(x, y) + H_j(t)N_j^{(f)}(x, y) + H_k(t)N_k^{(f)}(x, y).$$

Функции $N_i(x, y)$, $N_j(x, y)$, $N_k(x, y)$ выражаются через базисные функции $N_1(x, y)$ и $N_2(x, y)$. Приближенное решение начально-краевой задачи (2.6) представим в виде

$$H_n(x, y, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t)N_j(x, y)$$

и по алгоритму решения задачи (2.1) приходим к СЛАУ.

В частном случае, к решению задачи (2.1), (2.2) применяется МКЭ с квадратичными базисами. Рассматриваются два алгоритма, основанные на квадратичных базисных функциях.

Алгоритм 1, изложенный в теории МКЭ, использует квадратичные интерполяционные полиномы, полученные с помощью шести узлов в каждом элементе.

Суть алгоритма 2 состоит в том, что в качестве базисных функций служат частные решения

$$H_1(x) = \alpha x^2 + p_1 x + q_1, \quad H_2(y) = \alpha y^2 + p_2 y + q_2, \quad \alpha = -\frac{f_0}{2T_0} \quad (2.9)$$

уравнения

$$-T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = f_0,$$

а функции формы образуются по формулам

$$N_s(x, y) = a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y), \quad s = i, j, k.$$

На тестовых примерах задача (2.1), (2.2) решается при постоянных коэффициентах с целью выяснения влияния базисных функций на точность приближенного решения. Расчеты проводились для сеток с элементами, являющимися прямоугольными (табл. 2.3) и равносторонними (табл. 2.4) треугольниками.

Таблица 2.3

Сравнение линейных и квадратичных базисов

Точное решение	1.00	1.50	2.00	3.00	3.50	5.00
Линейные базисы	0.87	1.36	1.89	2.78	3.39	5.20
Алгоритм 1	0.78	1.27	1.69	3.32	2.88	4.73
Алгоритм 2	0.95	1.46	1.95	2.99	3.48	4.97

Таблица 2.4

Сравнение линейных базисов и алгоритма 2

Точное решение	1.000	1.125	1.500	2.125	3.000
Линейные базисы	0.949	1.112	1.423	2.050	3.151
Алгоритм 2	1.018	1.145	1.539	2.138	3.001

В табл. 2.3 показаны решения в квадратной, а в табл. 2.4 в круговой областях в узлах, лежащих в первом квадранте. Единичный квадрат и единичный круг последовательно измельчались до получения сетки с шагом $h=0,25$. В таблицах приведены значения, полученные на наиболее мелкой сетке. На крупной сетке при одинаковом количестве исходной информации точность приближенного решения в алгоритме 2 на несколько порядков выше чем в линейных базисах. Алгоритм 1 в смысле точности решения занимает среднее положение между другими алгоритмами. В реальных условиях, когда применяется метод фрагментов, алгоритм 2 имеет большое преимущество перед линейными базисами. При измельчении сетки результаты применения линейных базисов и алгоритма 2 нивелируются, а алгоритм 1 теряет преиму-

щество перед линейными базисами (табл. 2.3). С точки зрения практического применения алгоритм 1 явно проигрывает другим алгоритмам, поскольку для него требуется вдвое больше исходных данных. Приведенные доводы дают основание считать, что алгоритм 2 в сочетании с методом фрагментов является наиболее предпочтительным перед другими.

В § 2.4 приводится алгоритм приближенного решения задачи по определению полей напоров и водопродимости пласта. В зависимости от степени изученности области фильтрации в некоторых дискретных множествах точек могут задаваться экспериментальные значения напорной функции $H(x, y)$, коэффициента фильтрации $k(x, y)$, водопродимости $T(x, y)$ и др. параметров. По этим неполным данным необходимо восстановить картину течения жидкости, т.е. идентифицировать фильтрационный поток.

Если в области фильтрации заданы экспериментальные значения

$$H(x_i, y_i) = H_i', \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.10)$$

$$T(x_i, y_i) = T_i', \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (2.11)$$

то, опираясь на эти данные, строится итерационная процедура последовательного уточнения значений функций H и T путем решения задачи (2.1), (2.2) поочередно относительно искомых функций. Главная трудность в этой задаче заключается в недостатке информации об искомых функциях и в плохой обусловленности СЛАУ относительно функции $T(x, y)$. Для ослабления некорректности в этой системе необходимо использовать не только количественную, но и качественную информацию об искомой функции. Считая функцию $T(x, y)$ гладкой, мы получаем устойчивый алгоритм для ее определения.

Итоги решения тестовых задач подтверждают: а) известную закономерность о зависимости результатов от исходной информации (при задании значений T_i' в ~10% узлов погрешность в определении функции $T(x, y)$ составляет ~24%, а при задании этих значений в ~45% узлов – погрешность ~9%); б) утверждение о малой чувствительности функции напора к изменениям коэффициента фильтрации.

В §2.5 разработан алгоритм идентификации водопродимости напорного водоносного пласта с помощью метода регуляризации А.Н.Тихонова. Задача идентификации водопродимости в неоднородной пористой среде сводится к решению коэффициентной обратной задачи для уравнения напорной фильтрации. Для обеспечения единственности решения должны быть заданы значения напоров и искомой функции в некотором дискретном множестве точек, полученные наблюдением и / или экспериментом.

Задача заключается в определении функции $T(x, y)$ из уравнений (2.1), (2.2)

при соблюдении внутренних условий (2.10), (2.11). Требуется найти функцию $T(x, y)$, доставляющей в области D минимум функционалу.

$$\Phi(T) = \sum_{i=1}^p [H_i(T) - H_i^*]^2 + \sum_{j=1}^q (T_j - T_j^*)^2 + \gamma |\delta T|^2, \quad (2.12)$$

где δT – вариация функции $T(x, y)$; γ – параметр регуляризации; $H_i(T)$ – расчетные значения напоров, которые находятся как решение задачи (2.1), (2.2).

При каждом наборе значений функции $T(x, y)$ получаем вполне определенные значения функции $H(x, y)$, т. е. имеем оператор $H(T)$, определенный алгоритмически по формулам МКЭ. Этот оператор в общем случае является нелинейным. Линеаризуем его следующим образом

$$H(T) = H(\tilde{T}) + \sum_{s=1}^n (T_s - \tilde{T}_s) \frac{\partial H}{\partial T_s} + R_2(\Delta T), \quad (2.13)$$

где \tilde{T}_s – значение функции T в точке (x_s, y_s) , полученное в предыдущей итерации; $R_2(\Delta T)$ – остаточный член разложения. Подставляя (2.13) в (2.12) и используя необходимое условие минимума функции многих переменных, получаем СЛАУ

$$\frac{\partial \Phi(T)}{\partial T_k} = \sum_{i=1}^p \left[\tilde{H}_i + \sum_{s=1}^n (T_s - \tilde{T}_s) \frac{\partial H_i}{\partial T_s} - H_i^* \right] \frac{\partial H_i}{\partial T_k} + \mu_k (T_k - T_k^*) + \gamma (T_k - \tilde{T}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$\sum_{s=1}^n c_{ks} T_s = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

Здесь

$$c_{ks} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial H_i}{\partial T_s} \frac{\partial H_i}{\partial T_k}, \quad k \neq s, \quad c_{kk} = \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial H_i}{\partial T_k} \right)^2 + \gamma + \mu_k,$$

$$d_k = \sum_{i=1}^p \left(H_i^* - \tilde{H}_i + \sum_{s=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial T_s} \tilde{T}_s \right) \frac{\partial H_i}{\partial T_k} + \mu_k T_k^* + \gamma \tilde{T}_k, \quad \mu_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \Gamma^* \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } \Gamma^* \text{ не задано.} \end{cases}$$

Алгоритм решения данной задачи отлажен на ряде тестовых примеров. Здесь рассмотрим один из них. В центре круговой в плане области с радиусом $R=3000$ м работает откачивающая скважина с постоянным дебитом, пробуренная в напорный водоносный пласт мощностью $m=100$ м. На границе области фильтрации поддерживается постоянный напор $H_0=1000$ м. Точным решением задачи является функция $H(x, y) = H_0 - 5 \cdot 10^{-6} (R^2 - x^2 - y^2)$.

Водопроводимость идентифицирована при функции источника

$$f(x, y) = -10^{-3} [60 + 0,02R - 0,03(x + y)].$$

В табл.2.5 приведены точные и приближенные значения функции $T(x,y)$ при различных значениях p и q , где p и q – число экспериментальных (наблюдательных) точек по напорам и водопродовимости соответственно. Число всех узлов сетки равно $n = 39$.

Таблица 2.5
Точные и приближенные значения водопродовимости $T(x,y)$

Точные значения водопродовимости	Приближенные значения водопродовимости								
	$p=39$			$p=15$			$p=10$		
	$q=15$	$q=10$	$q=5$	$q=15$	$q=10$	$q=5$	$q=15$	$q=10$	$q=5$
2280	2200	2000	2365	1999	2299	2021	2236	1854	2155
3268	3200	3000	3155	3056	3248	3268	2960	3489	2965
4000	4260	3900	4236	3565	3699	4098	3574	4056	3156
5000	4950	4800	4300	4800	4287	4821	4865	5044	4421
5626	5000	5598	5012	5500	5490	5160	5011	5697	5795
6000	5500	6388	6020	6265	6388	5398	6265	6388	5326
7000	6300	6496	7000	7212	6496	6365	7356	6150	8000
8040	7500	7402	7037	7595	7402	7056	7522	7556	8867
8732	8000	8900	7800	8464	8900	7199	8464	8905	9856
9000	8800	8505	8231	8970	8505	8102	10250	8994	10269
Отн. погр. в %	11,1	12,2	14,0	12,3	14,3	17,6	13,9	18,7	21,1

В табл. 2.6 решение данной задачи сравнивается с соответствующими результатами, полученными другими методами. Следует отметить, что идентификация параметров водоносных горизонтов с использованием методов малых возмущений и регуляризации является устойчивой процедурой, что очень важно при проведении гидрогеологических расчетов в реальных условиях.

Таблица 2.6
Сравнение с результатами, полученными другими методами

Отн. погр. в %	$q=15$			$q=10$			$q=5$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	12,5	12,6	12,3	14,0	15,4	14,3	15,4	16,9	17,6

Примечание: a -погрешности метода малых возмущений;
 b -погрешности, полученные по методу итераций;
 c -погрешности метода регуляризации, полученные при $p=15$.

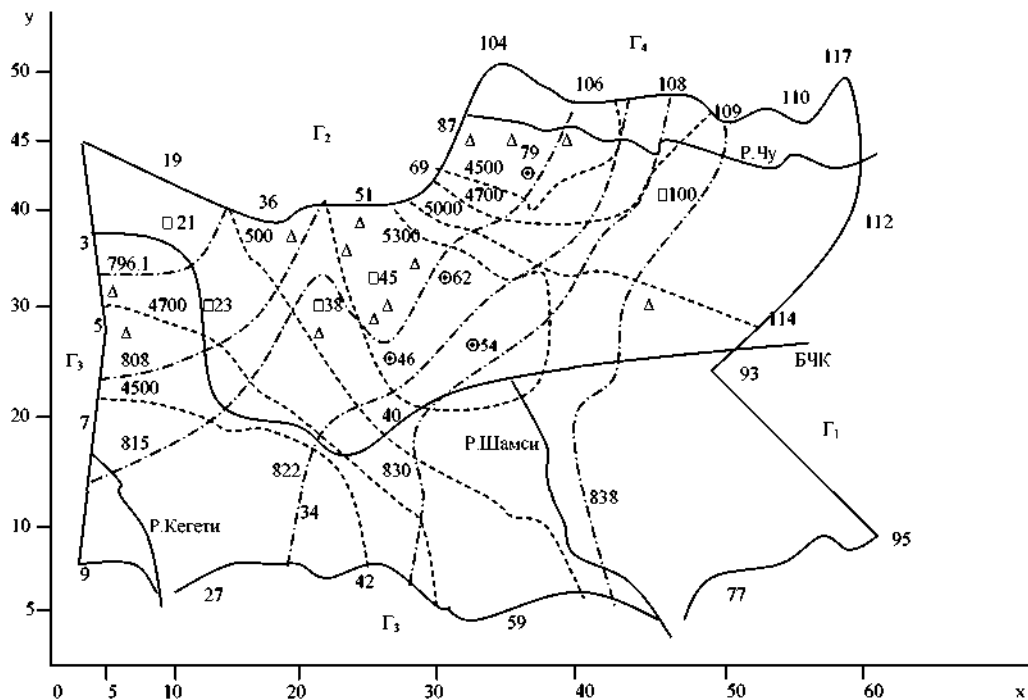


Рис.2.1. Плановая схема режимно– балансового участка «Красная речка»
(условные обозначения см. рис.2.2)

В §2.6 рассматривается применение изложенного в §2.4 алгоритма к определению полей напорной функции и проводимости пласта на гидрогеологических объектах Красная речка в Чуйской долине и Чонкойсуу в Ысык-кульской области.

Применение квадратичных базисов (2.9) и метода фрагментов позволило значительно уменьшить объем работы. В результате относительная погрешность в первом объекте составила для водопродимости 8,5% (была 7,7%), для функции напора – 4,3% (была 2,02%), а во втором объекте соответственно 15,7% (была 16,1%) и 2,7% (была 0.89%). В скобках приведены результаты, полученные в указанной работе. На рисунках 2,1 и 2,2 показаны линии равных напоров и равных проводимостей для рассматриваемых участков.

Глава 3. Приближенное решение пространственных задач фильтрации и массопереноса

В §3.1 рассматривается стационарное движение подземных вод в пространственной области V , описываемое уравнением

$$\Delta H = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = W, \quad (x, y, z) \in V, \quad (3.1)$$

$$iH = k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma = \partial V. \quad (3.2)$$

Разбиваем область V на тетраэдральные элементы и внутри элемента (e) с вершинами i, j, k, l , представим искомую функцию в виде

$$H^{(e)}(x, y, z) = H_i F_i^{(e)} + H_j F_j^{(e)} + H_k F_k^{(e)} + H_l F_l^{(e)}, \quad (3.3)$$

где

$$H_s = H(x_s, y_s, z_s), \quad F_s(x, y, z) = a_s + b_s x + c_s y + d_s z, \quad s = i, j, k, l,$$

a_s, b_s, c_s, d_s являются элементами матрицы, обратной по отношению к матрице

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{pmatrix}.$$

Суммируя равенство (3.3) по всем элементам, получаем разложение приближенного решения задачи

$$H_n(x, y, z) = \sum_{j=1}^n H_j F_j(x, y, z). \quad (3.4)$$

Здесь n - число узлов в области V .

Заменяя в задаче (3.1), (3.2) функцию $H(x, y, z)$ функцией $H_n(x, y, z)$, на основании обобщенного принципа Галеркина имеем равенство

$$\iiint_V F_i(LH_n - W)dv + \iint_{\Sigma} F_i(IH_n - \alpha)d\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.5)$$

откуда, после применения формулы Грина получаем СЛАУ

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

с коэффициентами

$$a_{ij} = \iiint_V kq(F_i, F_j)dv - \iint_{\Sigma} F_i F_j \beta d\sigma, \quad f_i = \iiint_V F_i W dv + \iint_{\Sigma} F_i \alpha d\sigma,$$

где

$$q(F_i, F_j) = \frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z}.$$

Решив систему (3.6) методом Гаусса, получаем приближенное решение задачи (3.1), (3.2).

В §3.2 решается уравнение неустановившегося течения подземных вод

$$\Delta H = W, \quad (x, y, z) \in V; \quad IH = \alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t > 0, \quad (3.7)$$

где

$$A = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} - \beta.$$

Для приближенного решения задачи образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s = 1, 2, \dots$ и интегрируем равенство (3.5) на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \left[\iiint_V F_i(\Delta H_n - W)dv + \iint_{\Sigma} F_i(IH_n - \alpha)d\sigma \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя вместо H_n ее разложение (3.4), получаем СЛАУ

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(s)} H_j^{(s)} = f_i^{(s)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

где

$$a_y^{(s)} = M_{ij} + (N_{ij} - \sigma B_{ij}^{(s)}) \Delta t_s, \quad 0 < \sigma \leq 1,$$

$$f_i^{(s)} = [\sigma W_i^{(s)} + (1 - \sigma) W_i^{(s-1)}] \Delta t_s + \sum_{j=1}^n \{ [M_{ij} - (1 - \sigma) B_{ij}^{(s-1)}] H_j^{(s-1)} \} + \\ + [\sigma A_i^{(s)} + (1 - \sigma) A_i^{(s-1)}] \Delta t_s,$$

$$M_{ij} = \iint_V \mu F_i F_j dV, \quad N_{ij}^{(s)} = \iint_V kq(F_i, F_j) dV,$$

$$W_i^{(s)} = \iint_V F_i W^{(s)} dV, \quad B_{ij}^{(s)} = \iint_{\Sigma} F_i F_j \beta^{(s)} d\sigma, \quad A_i^{(s)} = \iint_{\Sigma} F_i \alpha^{(s)} d\sigma.$$

Система уравнений (3.8) решается шаг за шагом при значениях $s=1, 2, \dots$. На каждом временном слое ее матрица является симметричной с диагональным преобладанием, поэтому ее можно решать методом Гаусса.

В §3.3 рассматривается решение задачи (3.7) методом фрагментов. Считая для простоты область V цилиндрической с основаниями произвольной формы, разобьем ее на m треугольных призм (фрагментов) с вершинами i, j, k, l, j', k' и представим функцию H в фрагменте (f) в виде

$$H^{(f)}(x, y, z, t) = H_i(t)F_i^{(f)} + H_j(t)F_j^{(f)} + H_k(t)F_k^{(f)} + H_l(t)F_l^{(f)} + H_{j'}(t)F_{j'}^{(f)} + H_{k'}(t)F_{k'}^{(f)}.$$

Здесь базисные функции $F_i, F_j, F_k, F_l, F_{j'}, F_{k'}$ должны быть линейно-независимыми нелинейным функциями. Эти функции образуем с помощью частных решений следующего стационарного уравнения фильтрации с постоянными коэффициентами

$$-k_0 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) = W_0. \quad (3.9)$$

Частными решениями этого уравнения являются функции

$$H_1(x) = \alpha x^2 + p_1 x + q_1, \quad H_2(y) = \alpha y^2 + p_2 y + q_2, \quad H_3(z) = \alpha z^2 + p_3 z + q_3,$$

где

$$\alpha = -\frac{W_0}{2k_0}, \quad p_i, q_i, \quad (i=1, 2, 3) \text{ - произвольные параметры.}$$

Учитывая призматичную форму фрагментов, базисные функции $F_s(x, y, z)$ ($s=i, j, k, l, j', k'$) образуем в виде

$$F_s(x, y, z) = (a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y))(u_s + v_s \varphi(z)), \quad s = i, j, k, l, j', k', \quad (3.10)$$

где

$$u_s = \frac{\varphi(z_s + \Delta z)}{\Delta \varphi(z_s)}, \quad v_s = -\frac{1}{\Delta \varphi(z_s)}, \quad u_{s'} = -\frac{\varphi(z_s)}{\Delta \varphi(z_s)}, \quad v_{s'} = \frac{1}{\Delta \varphi(z_s)}, \quad (3.11)$$

$\Delta\varphi(z_s) = \varphi(z_s + \Delta z) - \varphi(z_s)$, $s=i, j, k$; $\varphi(z)$ – произвольная нелинейная элементарная функция, определенная на отрезке $[z, z + \Delta z]$. В частности, в качестве $\varphi(z)$ можно взять функцию $H_s(z)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции $F_s(x, y, z)$ ($s=i, j, k, i', j', k'$), определенные формулами (3.10), равны единице в узле s , а в других узлах обращаются в нуль, и что сумма базисных функций в произвольной точке $M(x, y, z)$ фрагмента (f) равна единице, следовательно, функции F_i, F_j, \dots, F_k обладают всеми свойствами функций формы в классическом методе конечных элементов.

Приближенное решение задачи (3.7) ищем в виде

$$H_n(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n \sum_{(f)} H^{(f)}(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n H_j(t) F_j(x, y, z). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в уравнения (3.7) и применяя принцип Галеркина, получаем СЛАУ (3.8).

В случае тетраэдральных фрагментов базисные функции имеют вид

$$F_s(x, y, z) = a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y) + d_s H_3(z), \quad s = i, j, k, l,$$

где коэффициенты вычисляются аналогично тому, как это делается в случае линейных базисных функций.

В случае призматических фрагментов преимуществом базисов (3.10) является разделенность переменных, а именно то, что интегралы в формулах для коэффициентов системы берутся сначала по треугольному основанию призмы, где можно использовать результаты применения квадратичных базисов в двумерной задаче, а затем легко вычисляются по z в постоянных пределах.

Хотя оценка точности аппроксимации искомой функции весьма затруднительна, есть основания полагать, что если применение линейных базисных функций в МКЭ является аналогом линейного интерполирования, то использование квадратичных базисов в МФ должно быть аналогом формулы Симпсона.

Изучая алгоритмы решения задачи (3.7) с применением тетраэдральных и призматических элементов, можно сравнить их с вычислительной точки зрения. Если считать коэффициенты уравнений (3.7) постоянными, то в случае тетраэдральных элементов под объемными и поверхностными интегралами соответственно будут многочлены первой и второй степени, а в случае призматических элементов – многочлены второй и четвертой степени. Ясно, что во втором случае вычисление интегралов затрудняется существенно, в то же время точность аппроксимации искомой функции значительно выше. Для каждого узла сетки в первом случае объемные интегралы берутся 13 раз по

тетраэдру, поверхностные – 18 раз по треугольникам, а во втором случае объемные – 7 раз по призме и поверхностные – 14 раз по треугольникам и прямоугольникам. Как и в двумерной задаче, преимущество МФ должно наблюдаться при значительном укрупнении фрагментов.

Таблица 3.1

Сравнение МКЭ и МФ

Время $t=0.1$						
Точное решение	1.105	1.241	1.383	1.428	1.462	1.56
Тетраэдральные базисы	1.109	1.239	1.376	1.435	1.459	1.524
Призматические базисы	1.112	1.241	1.384	1.439	1.458	1.523
Время $t=0.5$						
Точное решение	1.649	1.851	2.064	2.13	2.18	2.328
Тетраэдральные базисы	1.668	1.849	2.054	2.142	2.18	2.275
Призматические базисы	1.658	1.852	2.065	2.146	2.174	2.273
Время $t=1.0$						
Точное решение	2.718	3.051	3.403	3.511	3.595	3.837
Тетраэдральные базисы	2.747	3.05	3.392	3.536	3.603	3.758
Призматические базисы	2.734	3.055	3.406	3.537	3.584	3.751

В табл.3.1 приведены результаты решения тестовой задачи МКЭ и МФ. Как видно из таблицы, точность приближенного решения в обоих методах имеет один и тот же порядок, а в МФ объем вычислений сокращается примерно на четверть по сравнению с МКЭ.

В §3.4 рассматривается решение стационарной задачи, а в §3.5 – нестационарной задачи переноса загрязнителей в подземных водах. Остановимся на нестационарном случае. Пространственная модель этого процесса состоит из двух уравнений параболического типа с соответствующими начально-краевыми условиями:

1) задача (3.7),

2) задача

$$\begin{aligned}
 AC = n_0 \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} - v_y C \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} - v_z C \right) = \\
 = g(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in V, \quad t > 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

$$IC = D \frac{\partial C}{\partial n} - \beta_c C = \alpha_c(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t > 0,
 \tag{3.14}$$

$$C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V.
 \tag{3.15}$$

Задачи (3.7) и (3.13)–(3.15) решаем методом фрагментов. Представив функции $H(x, y, z, t)$ и $C(x, y, z, t)$ соответственно в виде (3.12) и

$$C_n(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n C_j(t) F_j(x, y, z)$$

и применяя к этим задачам принцип Галеркина, получаем соответственно СЛАУ (3.8) и

$$\sum_{j=1}^n c^{(s)}_{ij} C_j^{(s)} = g^{(s)}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.16)$$

где

$$c^{(s)}_{ij} = M_{ij} + D^{(s)}_{ij} - \sigma(N^{(s)}_{ij} + B^{(s)}_{ij} - V^{(s)}_{ij}), \quad 0 < \sigma \leq 1,$$

$$g_i^{(s)} = \sum_{j=1}^n [M_{ij} + (1 - \sigma)(N^{(s-1)}_{ij} + B^{(s-1)}_{ij} - V^{(s-1)}_{ij})] C_j^{(s-1)} +$$

$$+ \sigma(G_i^{(s)} + A_i^{(s)}) + (1 - \sigma)(G_i^{(s-1)} + A_i^{(s-1)}),$$

$$M_{ij} = \frac{1}{\Delta t_s} \iiint_V F_i F_j n_0 dv, \quad D_{ij} = \iiint_V Dq(F_i, F_j) dv,$$

$$N^{(s)}_{ij} = \iiint_V F_j \left(v_x^{(s)} \frac{\partial F_i}{\partial x} + v_y^{(s)} \frac{\partial F_i}{\partial y} + v_z^{(s)} \frac{\partial F_i}{\partial z} \right) dv, \quad G_i^{(s)} = \iiint_V F_i g^{(s)} dv,$$

$$B^{(s)}_{ij} = \iint_{\Sigma} F_i F_j \beta_c^{(s)} d\sigma, \quad A_i^{(s)} = \iint_{\Sigma} F_i \alpha_c^{(s)} d\sigma, \quad V^{(s)}_{ij} = \iint_{\Sigma} F_i F_j v_n^{(s)} d\sigma.$$

Скорость фильтрации $v(x, y, z, t)$ определяется через $H(x, y, z, t)$ по формуле Дарси $v = -k \text{grad} H$.

Результаты решения тестовой задачи показаны в табл. 3.2

Таблица 3.2

Значения функции $C(x, y, z, t)$

$t=0.1$		$t=0.5$		$t=1.0$	
Точные значения	Прибл. значения	Точные значения	Прибл. значения	Точные значения	Прибл. значения
2.767	2.768	4.127	4.142	6.805	6.871
2.21	2.222	3.297	3.31	5.437	5.481
2.855	2.903	4.259	4.368	7.023	7.358
2.299	2.346	3.429	3.583	5.654	6.254
3.12	3.189	4.655	4.864	7.675	8.378
2.564	2.567	3.825	3.838	6.306	6.428

Глава 4. Применение теории возмущений к идентификации гидрогеофизических параметров пористых сред

В § 4.1 разрабатывается алгоритм идентификации коэффициента фильтрации в дифференциальном уравнении установившегося течения подземных вод. Рассмотрим краевую задачу

$$Lh = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V; \quad lh = \alpha(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (4.1)$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta.$$

Задача заключается в вычислении поля коэффициента фильтрации $k(x, y, z)$ при наличии экспериментальных значений этой функции в некотором множестве точек

$$k(x_s, y_s, z_s) = k^s(x_s, y_s, z_s), \quad s = 1, 2, \dots, p. \quad (4.2)$$

Используя эти значения, мы образуем начальное приближение искомой функции $k(x, y, z) \approx k^{(0)}(x, y, z)$ где $k_{\min}^s \leq k^{(0)}(x, y, z) \leq k_{\max}^s$.

Пусть правые части уравнений (4.1) получают малые возмущения δf и $\delta \alpha$ соответственно. Тогда задача (4.1) переходит в задачу

$$Lh' = f', \quad (x, y, z) \in V; \quad lh' = \alpha', \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (4.3)$$

где

$$h' = h + \delta h, \quad f' = f + \delta f, \quad \alpha' = \alpha + \delta \alpha.$$

Из (4.3) с учетом (4.1) приходим к краевой задаче относительно вариации δh :

$$L\delta h = \delta f, \quad (x, y, z) \in V; \quad l\delta h = \delta \alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma \quad (4.4)$$

Решая задачи (4.1) и (4.4) при известном коэффициенте фильтрации $k^{(0)}(x, y, z)$ и известных вариациях $\delta f(x, y, z)$ и $\delta \alpha(x, y, z)$, находим функции $h(x, y, z)$ и $\delta h(x, y, z)$ и образуем функцию $h'(x, y, z) = h(x, y, z) + \delta h(x, y, z)$.

Теперь рассмотрим случай, когда малые возмущения принимают не только правые части уравнений (4.1), но и их коэффициенты $k(x, y, z)$ и $\beta(x, y, z)$. Это равносильно изменению гидрогеологических характеристик пористой среды. Пусть вместо задачи (4.1) имеем краевую задачу

$$L'h = f'', \quad (x, y, z) \in V; \quad l'h' = \alpha'', \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (4.5)$$

где

$$L' = L + \delta L, \quad l' = l + \delta l, \quad f'' = f' + \delta f', \quad \alpha'' = \alpha' + \delta \alpha',$$

$$\delta L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \delta l = \delta k \frac{\partial}{\partial n} + \delta \beta.$$

Из (4.5) с учетом (4.3) получаем краевую задачу

$$\delta L h' = \delta f', \quad (x, y, z) \in V; \quad \delta l h' = \delta \alpha', \quad (x, y, z) \in \Sigma. \quad (4.6)$$

Если известна функция $h'(x, y, z)$, отсюда можно получить уравнение относительно вариации искомой функции $\delta k(x, y, z)$.

Представляя искомую вариацию в виде

$$\delta k(x, y, z) \approx \delta k_n(x, y, z) = \sum_{j=1}^n \delta k_j F_j(x, y, z)$$

и применяя к задаче (4.6) принцип Галеркина, приходим к СЛАУ относительно δk_j :

$$\sum_{j=1}^n \left(\iiint_V F_i q(F_j, h') dv \right) \delta k_j = \iiint_V F_i \delta f' dv - \iint_{\Sigma} F_i (h' \delta \beta - \delta \alpha') d\sigma, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Система (4.7) является плохо обусловленной, так как функция $q(F_i, h')$ не обеспечивает матрице системы диагональное преобладание. Поэтому для решения этой системы необходимо применить метод сингулярного разложения матрицы (SVD-метод). Кроме этого, мы также используем качественную информацию о гладкости искомой функции, другими словами, полагаем, что градиент ее вариации близок к нулю, что поможет ослабить некорректность системы (4.7).

Решив систему (4.7), образуем первое приближение коэффициента фильтрации

$$k^{(1)}(x, y, z) = k^{(0)}(x, y, z) + \delta k(x, y, z)$$

и подставляя вместо $k^{(0)}(x, y, z)$ функцию $k^{(1)}(x, y, z)$, повторяем снова весь цикл вычислений. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i |h_i^{(v+1)} - h_i^{(v)}| < \varepsilon,$$

где v – номер итерации.

В §4.2 решается задача идентификации коэффициента фильтрации водоносного пласта в нестационарном режиме. Известно, что функция $k(x,y,z)$ от времени не зависит, но определение этой функции в нестационарном случае позволяет полнее учитывать ее влияние на изменения поля функции напора во времени, т.е. значения функции $k(x,y,z)$ в данном случае более достоверны по сравнению со значениями, полученными при решении стационарной задачи.

Пусть имеем начально-краевую задачу

$$Ah = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.8)$$

$$h(x, y, z, 0) = h_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V,$$

$$lh = \alpha(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.9)$$

где

$$A = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta.$$

Пусть также заданы внутренние условия (4.2).

Образуем начальное приближение искомой функции $k^{(0)}(x,y,z)$, как это сделано §4.1 и решая задачу (4.8), (4.9) при этой функции, находим начальное приближение поля напоров $h^{(0)}(x,y,z,t)$.

Затем составляем задачу, сопряженную к задаче (4.8), (4.9):

$$A^* h^* = p(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.10)$$

$$l^* h^* = \alpha^*(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.11)$$

где

$$A^* = -\mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l^* = l.$$

Задача (4.10), (4.11) является ретроспективной, "начальное" условие для которой определяется из равенства

$$h_{T_0}^* = h^*(x, y, z, T_0) = h_0 h_0^* / h_{T_0} \quad (4.12)$$

Решая задачу (4.10)-(4.12) в обратном направлении времени, вычислим поле сопряженной функции $h^{*(0)}(x,y,z,t)$.

Далее, придавая правым частям уравнений (4.8) и (4.9) вариации δf и $\delta \alpha$, приходим к краевой задаче относительно вариации напорной функции

$$A\delta h = \delta f, \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.13)$$

$$l\delta h = \delta\alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T_0) \quad (4.14)$$

с начальным условием

$$\delta h(x, y, z, 0) = 0,$$

решив которую, находим поле вариаций $\delta h(x, y, z, t)$ и образуем функцию

$$h'(x, y, z, t) = h^{(0)}(x, y, z, t) + \delta h(x, y, z, t).$$

Теперь решаем ретроспективную краевую задачу относительно вариации сопряженной функции δh^*

$$A^* \delta h^* = \delta p, \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.15)$$

$$l^* \delta h^* = \delta\alpha^*, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T_0) \quad (4.16)$$

с начальным условием

$$\delta h^*(x, y, z, T_0) = 0$$

и вычислим поле сопряженной функции

$$h^*(x, y, z, t) = h^{*(0)}(x, y, z, t) + \delta h^*(x, y, z, t).$$

Наконец, подвергая возмущению оператор ретроспективной задачи, получаем краевую задачу относительно функции $h^*(x, y, z, t)$:

$$A^* h^* = p', \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.17)$$

$$l^* h^* = \alpha^*, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.18)$$

где

$$A^* = A^* + \delta L, \quad l^* = l^* + \delta l, \quad p' = p + \delta p, \quad \alpha^* = \alpha^* + \delta \alpha^*.$$

Из задачи (4.17), (4.18) с учетом уравнений (4.8), (4.9) приходим к задаче

$$\delta L h^* = \delta p, \quad \delta l h^* = \delta \alpha^*, \quad (4.19)$$

откуда получаем СЛАУ относительно δh^* :

$$\sum_{j=1}^n \left(\iiint_V F_j q(F_j, h^*) dv \right) \delta k_j = \iiint_V F_i \delta \rho' dv + \iint_{\Sigma} F_i (\delta \alpha^* - h^* \delta \beta) d\sigma, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (4.20)$$

Решив систему (4.20) с использованием количественной и качественной информации об искомой функции, как это сделано в §4.1, образуем первое приближение поля коэффициента фильтрации

$$k^{(1)}(x, y, z) = k^{(0)}(x, y, z) + \delta k(x, y, z)$$

и продолжаем итерационную процедуру до выполнения условия

$$\max_i |h_i^{(v+1)}(k_0) - h_i^{(v)}(k_0)| < \varepsilon.$$

В этом параграфе также дан алгоритм идентификации упругой водоотдачи $\mu(x, y, z)$.

В §4.3 и 4.4 совершенно аналогично разработаны алгоритмы идентификации коэффициента диффузии $D(x, y, z)$ и пористости грунта $n_\rho(x, y, z)$ в стационарном и нестационарном случаях соответственно.

В главе 5 приведены результаты вычислительных экспериментов по идентификации гидрогеофизических параметров.

Для достоверного описания процесса фильтрации подземных вод необходимо привести в соответствие математическую модель изучаемому объекту. В существующих методах моделирования все еще отсутствуют эффективные подходы идентификации основных гидрогеологических параметров среды. Из-за недостаточности информации исследователи используют в математических моделях не совсем достоверные, а в действительности грубо осредненные значения этих параметров.

Эксперименты проводились на основе методов теории малых возмущений и теории сопряженных функций, отдельные задачи решались также методом регуляризации и с использованием итерационной процедуры, предложенной Ч. Дж. Джаныбековым. Во всех случаях используется количественная информация вида (2.10), (2.11) и (4.2). В силу некорректности обратной задачи получаемые СЛАУ относительно искомым функций или их вариаций оказываются плохо обусловленными. Для ослабления некорректности использовалась также качественная информация об искомым функциях (например, гладкость и нормальность). Но и при любой дополнительной информации значения искомым функций изменяются в довольно широких интервалах, поскольку динамические функции (напоры и концентрации загрязнителей) малочувствительны к изменениям коэффициента фильтрации, водопроводности и коэффициента диффузии.

Заключение

1. Построены методы и реализованы алгоритмы приближенного решения прямых пространственных нестационарных задач фильтрации подземных вод совместно с уравнениями переноса загрязнителей МКЭ и МФ с граничными условиями общего вида. Путем использования качественной и количественной информации об искомым функциях и более эффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений разработана усовершенствованная методика идентификации гидрогеологических параметров, позволяющая свести некорректные задачи к комплексу устойчивых вычислительных алгоритмов.

2. Установлено, что при решении практических задач о плановых и пространственных потоках подземных вод в однородных и кусочно-однородных пластах целесообразно применять метод фрагментов, при этом объем вычислений в МФ существенно сокращается (до 25%) по сравнению с МКЭ, а точность аппроксимации коэффициентов СЛАУ в обоих методах имеет одинаковый порядок. В объектах со сложными границами МФ следует использовать совместно с МКЭ с тем, чтобы конечные элементы дополняли фрагменты до границ области фильтрации.

3. На основе метода регуляризации, теории малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений впервые в практике гидрогеологических расчетов разработаны приближенные методы и реализованы эффективные алгоритмы идентификации основных гидрогеофизических параметров неоднородных пористых сред (коэффициентов фильтрации, водопроницаемости и упругой водоотдачи пласта, коэффициентов диффузии, пористости и т.д.).

Разработанный комплекс алгоритмов, реализующий проблемы идентификации гидрогеофизических характеристик, отличается простотой и технологичностью. Он состоит из двух блоков: первый блок решает прямую и сопряженную (ретроспективную) задачи (причем по одному и тому же алгоритму), второй - плохо обусловленную СЛАУ относительно вариации искомой функции, где используются регуляризирующие алгоритмы.

4. Работа комплекса алгоритмов апробирована на решении ряда многомерных стационарных и нестационарных модельных задач. В прогнозных задачах точность аппроксимации использованных методов хорошо согласуется с теоретическими оценками, а результаты решения проблем идентификации показывают достаточную для практики гидрогеологических расчетов эффективность предлагаемой методики.

5. Адекватность использованных математических моделей, экономичность и надежность методики решения прогнозных и идентификационных

задач, достоверность полученных результатов проверены на отдельных МПВ, расположенных в Кыргызстане, путем сопоставления результатов счета с данными наблюдений по этим объектам.

6. Разработанные в диссертационной работе методы дают возможность прогнозировать движение подземных вод и идентифицировать гидрогеофизические характеристики неоднородной пористой среды, используя незначительное количество их точечных значений как внутренние условия, что очень важно в практической работе инженера-гидрогеолога.

Результаты исследований дают основание утверждать, что изложенная методика приближенного решения многомерных прогнозных задач и проблем идентификации, используемая при моделировании движения подземных вод и переноса ими солей с применением метода фрагментов, метода возмущений и сопряженных дифференциальных уравнений является существенным вкладом в гидрогеомеханику, и она найдет применение в гидрогеологических расчетах.

**Основные научные результаты диссертации опубликованы в
следующих работах:**

1. Мурзакматов М.У. О решении граничной обратной задачи фильтрации методом регуляризации // Респ. научно–техн. конф. по вопросам технологии и автоматизации гидромелиоративных систем. –Фрунзе, 1977. С. 29–31.
2. Мурзакматов М.У. Определение фильтрационного сопротивления дрены методом регуляризации // Тезисы докладов Всесоюзного научно–техн. семинара «Матем. моделирование гидрогеологических процессов». –М.: ВСЕГИНГЕО, 1981.– С. 47–48.
3. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Байболотов Б.А. Об одном приближенном методе идентификации течения жидкости в пористых средах // Вестник ИГУ, №4, 2000.–С. 94–99.
4. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Исабеков К.А. Приближенное решение задач фильтрации подземных вод с использованием фрагментности области // Вестник ИГУ, №4, 2000.–С. 104–108.
5. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Джаныбеков Б. Нестационарное пространственное течение подземных вод // Вестник ИГУ, №5, 2001.–С. 152–159.
6. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Имангазиева К. Краевая задача для пространственной квазистационарной фильтрации // Материалы научно–пактич. конф., посвященной 5–летию образования ИГУ: Нарын, 2001.
7. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Идентификация коэффициента фильтрации пористой среды методом теории возмущений // Вестник ИГУ, №7, 2002. – С.24–34.
8. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Идентификация гидрогеологических параметров среды в нестационарных течениях подземных вод //Вестник ИГУ, №7, 2002. – С. 72–84.
9. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Идентификация параметров в задаче о переносе загрязнителей в пористой среде, // Вестник ИГУ, №8, 2002. – С. 38–50.
10. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Алгоритмы для определения коэффициента диффузии и пористости грунта, // Вестник ИГУ, №8, 2002. – С. 50–58.
11. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Приближенное решение краевой задачи для пространственной нестационарной фильтрации подземных вод методом фрагментов // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 19–26.

12. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Применение метода конечных элементов с квадратичными базисами к решению задач напорной фильтрации подземных вод // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 26-33.
13. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Об идентификации водопроницаемости напорного потока методом теории возмущений // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 49-54.
14. Мурзакматов М. У. Математическое моделирование в процессе обучения (на примере моделирования динамики подземных вод) // Вестник ИГУ, №10, 2004. – С. 200-204.
15. Мурзакматов М.У. Приближенное решение стационарного уравнения массопереноса. // Вестник ИГУ, №11, 2004.-С. 10 – 13.
16. Мурзакматов М.У. Математическая модель переноса загрязнителей в подземных водах при нестационарном режиме. // Вестник ИГУ, №11, 2004.-С. 14 – 19.
17. Мурзакматов М.У. Идентификация водопроницаемости пористых сред в плановом нестационарном потоке // Проблемы спектроскопии и спектрометрии: Межвузовский сборник научных трудов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2004. Вып.17, – С. 74 – 83.
18. Мурзакматов М. У., Мамыров Ж.М. Приближенное решение уравнения Буссинеска методом конечных элементов // Проблемы спектроскопии и спектрометрии: Межвузовский сборник научных трудов. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2004. Вып.17, – С. 83 – 89.
19. Мурзакматов М. У., Байболотов Б. А. Об идентификации водопроницаемости напорного потока методом теории возмущений // Материалы Международного научно – технического симпозиума «Образование через науку», т. 1. – Бишкек, 2004. – С. 188-192.
20. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М. Идентификация водопроницаемости пласта методом регуляризации // Доклады НАН Республики Казахстан, Алматы, №6, 2004. – С. 82-87.
21. Мурзакматов М.У., Асанакунуова Ж.Т. Приближенная идентификация коэффициента диффузии в плановом напорном потоке подземных вод // Вестник ИГУ, № 13, Каракол, 2005. – С. 65-70.
22. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. – Бишкек: Илим, 2005. – 180с.
23. Мурзакматов М. У., Ажыгулова Н. Т. Математическая модель переноса загрязнителей в подземных водах при стационарном режиме // Вестник Оренбургского государственного университета, № 4 (42), Оренбург, 2005. – С. 119-123.
24. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Приближенное решение краевой за-

- дачи пространственной стационарной фильтрации подземных вод // Вестник Оренбургского государственного университета, №5 (43), Оренбург, 2005.– С.93-102.
25. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации напорного пласта методом регуляризации // 2nd International conference on Electronics and Computer in Kyrgyzstan, Bichkek, 2005. – pp. 186 -191.
26. Мурзакматов М.У. Идентификация водопроницаемости пласта в стационарном потоке подземных вод // Вестник ИГУ, № 15, Каракол, 2005. – С. 78-82.

Резюме

Мурзакматов Мукай Усупович

Жер астындагы суулардын экологиялык абалын прогноздоо жана гидрогеофизикалык параметрлерди идентификациялоо

01.02.05 – Суюктуктун, газдын жана плазманын механикасы адистиги боюнча физика-математика илимдеринин доктору деген илимий даражаны алуу үчүн жазылган диссертация.

Ачкыч сөздөр: алгоритм, бир тектүү эмес чөйрө, борпон чөйрө, булгоочу заттар, гидрогеофизикалык параметрлер, жер астындагы бассейн, жер астындагы суулар, идентификация, калыптанган агым, прогноз, суулуу жер катмары, суу өткөрүүчүлүк, тескери маселе, чыпкалануу, экология.

Диссертация жер астындагы суулардын чыпкалануу жана булгоочу заттардын борпон чөйрөдө таралуу теориясынын прогноздук жана идентификациялык көп өлчөмдүү маселелерин жакындатып чыгаруунун экономдуу алгоритмдерин түзүүгө жана аларды колдонууга арналган, ал алгоритмдер колдонмо математика менен механиканын фундаменталдуу методдоруна негизделген.

Диссертациянын экономдуу алгоритмдерди түзүүгө байланышкан жоболорунун тууралыгы тесттик маселелерди чыгаруу жана адабияттардагы белгилүү эсептөөлөр же байкоолордон алынган маалыматтар менен салыштыруу аркылуу далилденген.

Резюме

Мурзакматов Мукай Усупович

Прогнозирование экологического состояния подземных вод с идентификацией гидрогеофизических параметров

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы.

Ключевые слова: алгоритм, водоносный пласт, водопроницаемость, гидрогеофизические параметры, загрязняющие вещества, идентификация, неоднородная среда, обратная задача, подземные воды, подземный бассейн, пористая среда, прогноз, установившееся течение, фильтрация, экология.

Диссертация посвящена разработке и реализации экономичных алгоритмов приближенного решения многомерных прогнозных задач и проблем иден-

тификации теории фильтрации подземных вод и переноса загрязняющих веществ в пористых средах, основанных на фундаментальных методах прикладной математики и механики.

Основные положения диссертации, связанные с методической разработкой экономических алгоритмов, подтверждены путем решения тестовых задач и сопоставления с конкретными численными расчетами, известными в литературе, либо с данными наблюдений.

Resume

Murzakmatov Mukay Usupovich

Prognosis of ecological state of underground waters with identification of hydrogeophysical parameters

Doctoral dissertation on physics and mathematics, specialty 01.02.05. Mechanics of liquid, gas and plasma.

Key words: algorithm, aquifer, ecology, filtration, ground water, heterogeneous media, hydrogeophysical parameters, identification, inverse problem, pollution, permeability, porous media, prognosis, steady flow, underground reservoir.

The dissertation work is devoted to the study and realization of economical algorithms, the approximate solution of monoregular, prognostic and identifying test of underground water filtration theory, and the transference of pollution in porous media based on fundamental methods of applied mathematics and mechanics.

The main points of the dissertation are connected with a methodological study of economical algorithms, proved by test solutions and comparisons with either concrete calculations which are known in the literature or with the results of observations.



ОсОО «Банковский вестник»

Заказ №125/58. Тираж 100 экз.