

## Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Кыралиева Г.Б., Токтогулова З.А. - ЖАГУ

Решение многих задач науки и техники сводится к составлению и решению дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями на некотором ограниченном промежутке. При этом часто получаются уравнения, для которых невозможно найти точное решение в виде формулы. В этих случаях используется приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Кроме того приближение методы использует и в тех случаях, когда решение получается в аналитическом виде, но слишком громоздко, а также в тех случаях, когда требуется составить таблицу значений искомой функции.

Особенно эффективно применение приближенных методов с помощью электронно вычислительных машин. Рассмотрим несколько приближенных методов.

Пусть требуется составить таблицу решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y), x \in [a, b] \quad (1)$$

удовлетворяющего начальному условию  $y(a) = y_0$ , где  $y_0$  задано.

Одним из наиболее простых и наглядных методов является метод Эйлера и Рунге-Кутты.

Метод Эйлера: Найдем частное решения уравнения по методу Эйлера

$$y' = \frac{y}{x+1} - \frac{1}{2}(x+1)^2 \quad (2)$$

при начальным условиям

$$y(0) = 2,75 \quad (3)$$

На промежутке с шагом интегрирования  $h_1 = 0,3$  (кратный  $h$ ), воспользуемся для решения данного уравнения реализующей алгоритм

$$P=1: Y_{n+1} = Y_n + hf(x_n, y_n)$$

Результаты полученной этой программы приведены во втором столбце таблицы 1. В третьем столбце этой таблицы для сравнения даны точные значения решения линейного дифференциального уравнения при начальном условии. Это точное решение имеет вид  $y = 3(x+1) - 1/4(x+1)^3$

Таблица 1

x	Y (Эйлер)	Y(точное)	
0,3	3,37837	3,35075	0,02762
0,6	3,84440	3,77600	0,06840
0,9	4,10765	3,98525	0,12240
1,2	4,12765	3,93800	0,18965
1,5	3,86395	3,59375	0,27020
1,8	3,27607	2,91200	0,36407
2,1	2,32353	1,85225	0,47128
2,4	0,96584	0,37400	0,59184
2,7	-0,83747	-1,56325	0,72578
3,0	3,12692	-4,00000	0,87308

Графики приближенного решения данного дифференциального уравнения методом Эйлера и точного решения.

Из таблицы 1 видно, что при шаге интегрирования  $h = 0,1$  абсолютная погрешность значения  $y$  при  $x = 3,0$  составляет  $|Δy| = 0,87308$ . На рисунок 1 приведены график точного

решения (выделен жирной линией) и соответствующее приближенное решение, полученное методом Эйлера.

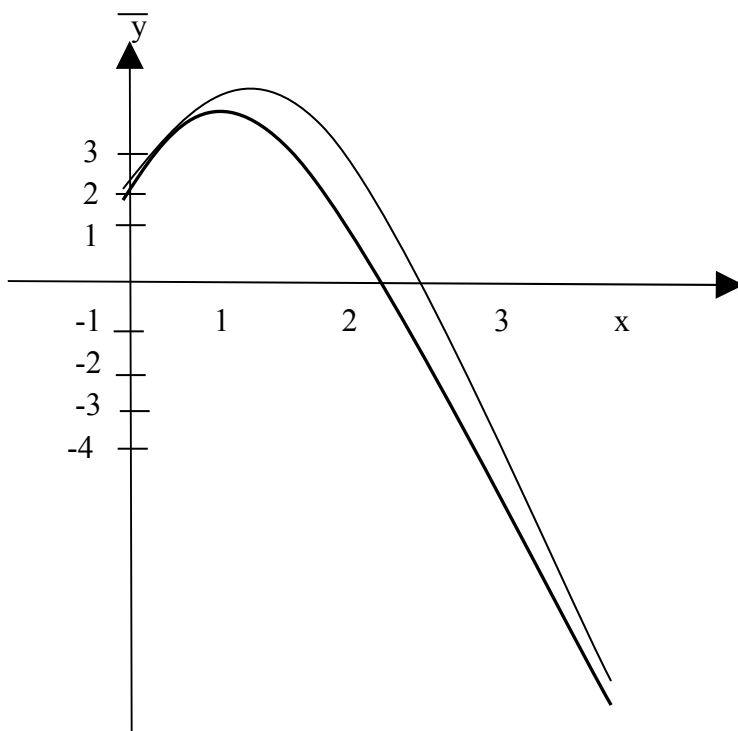


Рисунок 1.

Метод Рунге-Кутты: Найдем методом Рунге –Кутты, частное решение уравнения (2) при заданном шаге  $h$ . Результаты вычислений при шаге  $h=0,3$  интегрирования приведены в таблице 2.

Таблица 2.

x	Y(P <sub>i</sub> -R)	Y(точного решения)	(
0,3	3,35078	3,35075	0,00003
0,6	3,77606	3,77600	0,00006
0,9	3,98534	3,98525	0,00009
1,2	3,93811	3,93800	0,00011
1,5	3,59388	3,59375	0,00013
1,8	2,91215	2,91200	0,00015
2,1	1,85242	1,85225	0,00017
2,4	0,37419	0,37400	0,00019
2,7	-5,6304	-1,56325	0,00021
3,0	-3,99977	-4,00000	0,00023

Из таблицы 2 видно, что абсолютная погрешность значения  $Y$  при  $x=3,0$  при шаге интегрирования  $h=0,3$  составляет  $|Δy|=0,00023$ . Отсюда относительная погрешность около 0,006%, что значительно меньше погрешности, полученной нами при интегрировании уравнения (2) методом Эйлера с шагом интегрирования  $h=0,1$ .

Метод Рунге-Кутты требует большого объема вычислений, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом.

Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутты.

### Литература

1. В.И.Смирнов. Курс высшей математики ,М.:,Т.1,2., «Наука», 1965.
2. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2. М.: «Наука»,1966.
3. Б.П.Демидович, И.А.Марок. Основы вычислительной математики. М.: «Наука»,1966 ;.
4. Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики. М.: «Наука»,1989.

\* \* \*

УДК 51.7

### Сущность и необходимость применения математических моделей в экономике

Мамыралиева А. - ЖАГУ

Наш век – век рыночных отношений – особенно важной стороной в развитии предприятия являются продуманные затраты средств на ведение бизнеса, а также их планирование, которые в дальнейшем и определяют уровень экономической эффективности предприятия.

В настоящее время процессы принятия решений в экономике опираются на достаточно широкий круг экономико-математических методов. Ни одно более или менее серьезное решение, затрагивающее управление деятельностью отраслей или предприятий, распределение ресурсов, выбор наилучшего варианта развития, изучение рыночной конъюнктуры, прогнозирование, планирование и т.п., не осуществляется без предварительного математического моделирования конкретного процесса или его частей.

Особое место занимает экономико-математическое моделирование при решении вопросов финансирования и кредитования объектов, составления материальных, трудовых и финансовых балансов, отыскания наилучших способов вложения денежных средств, их движения в процессах производства и воспроизводства.

Экономико-математическое моделирование тех или иных социально-экономических объектов может стать эффективным лишь при правильном понимании сущности процессов и явлений, протекающих в моделируемом объекте, применении системного подхода (вначале системного анализа объекта, а затем – системного анализа модели). Более того, даже при идеальном построении экономико-математической модели ее практическое использование связано с решением конкретных мотивационных, психологических, административных и других проблем.

В этой связи экономико-математическое моделирование требует знания и грамотного применения системного анализа и синтеза объектов, принципов и подходов к принятию решений, информационных систем и ЭВМ. Отсутствие какой-либо обязательной составляющей процесса моделирования обычно делает построенную модель либо неэффективной, либо не применимой для практических расчетов.

Экономико-математическое моделирование - построение, изучение, интерпретация и применение математических моделей экономических объектов для решения задач анализа, синтеза и прогнозирования их деятельности. Оно играет большую роль, как в развитии экономической теории, так и в современной экономической практике. Вопрос о

его теоретической роли всегда вызывал острые дискуссии, не менее остро данный вопрос стоит и сейчас.

В качестве основных аспектов применения математических методов в решении практических экономических задач можно указать, во-первых, углубление количественного анализа экономических проблем, а во-вторых, возможность решения новых экономических задач.

Углубление количественного анализа заключается главным образом в изучении взаимодействия факторов, оказывающих влияние на экономические процессы, и получении количественных оценок. Возможность решения новых задач заключается в том, что посредством математического моделирования удастся решать экономические задачи, которые иными средствами решить невозможно.

Следует отметить, что сфера практического применения методов экономико-математического моделирования ограничивается лишь возможностями формализации экономических проблем и ситуаций, а также состоянием информационного обеспечения.

Следует подчеркнуть, что далеко не во всех случаях данные, полученные с помощью экономико-математического моделирования, могут использоваться непосредственно как готовые управленческие решения. Чаще они служат в качестве «консультирующих» средств, принятие же самих решений остается за человеком. Это объясняется чрезвычайной сложностью экономических процессов. Экономико-математическое моделирование, таким образом, является лишь компонентом, хотя и очень важным, в обосновании принятия практических решений.

Успехи математики стимулировали использование формализованных методов и в нетрадиционных сферах науки и практики. Так, О. Курно (1801–1877) ввел понятие функций спроса и предложения, а еще ранее немецкий экономист И.Г. Тюнен (1783–1850) стал применять математические методы в экономике и предложил теорию размещения производства, предвосхитив теорию предельной производительности труда. К пионерам использования метода моделирования можно отнести Ф. Кенэ (1694–1774), автора «Экономической таблицы» (зигзаги Кенэ) – одной из первых моделей общественного воспроизводства, трехсекторной макроэкономической модели простого воспроизводства.

Вопросы экономико-математического моделирования деятельности и оценки предприятий промышленности рассматривались в работах Ю.П. Ампилова, Ф. Велмера, А.П. Дергачева, Я.В. Моссаковского, С.С. Резниченко, С.И. Уткиной. В более широком смысле вопросами оценки бизнеса и экономико-математического моделирования деятельности предприятий занимаются такие ученые как А. Дамодаран, У. Шарп, М.А. Федотова, А.Г. Грязнова, В.Е. Лихтенштейн.

Зарубежные ученые (Р. Каплан, К. Кросс, Д. Нортон и др.) разработали модели ключевых показателей эффективности, призванные оценивать эффективность деятельности и инвестиционный потенциал предприятий. Основой таких систем стала идея взаимосвязи финансовых и нефинансовых показателей деятельности предприятия, в частности работы персонала, отношений с покупателями, эффективности производственных процессов и финансовых результатов. Данный подход позволяет учесть факторы настоящих и будущих доходов, но нуждается в существенной доработке с учетом специфики отрасли и необходимости математического моделирования взаимосвязи показателей на различных уровнях представления.

О значении и оценке мировым научным сообществом данного направления можно судить по количеству лауреатов Нобелевской премии по экономике, проводивших свои исследования на стыке экономики и математики. Нобелевская премия по экономике начала присуждаться с 1969 г. Лауреатами этой премии, по нашим подсчетам, стали 36 выдающихся ученых-экономистов, в том числе 26 ученых-экономистов - за исследования на стыке экономики и математики.

Использование математических методов в сфере управления - важнейшее направление совершенствования систем управления. Математические методы ускоряют

проведение экономического анализа, способствуют более полному учету влияния факторов на результаты деятельности, повышению точности вычислений. Применение математических методов требует:

- \* системного подхода к изучению заданного объекта, учета взаимосвязей и отношений с другими объектами (предприятиями, фирмами);
- \* разработки комплекса экономико-математических моделей, отражающих количественные показатели системной деятельности работников организации, процессов, происходящих в сложных системах, какими являются предприятия;
- \* совершенствования системы информационного обеспечения управления предприятием с использованием электронно-вычислительной техники.

Решение задач экономического анализа математическими методами возможно, если они сформулированы математически, т.е. реальные экономические взаимосвязи и зависимости выражены с применением математического анализа. Это вызывает необходимость разработки математических моделей.

В управленческой практике для решения экономических задач прибегают к различным методам. Выбранные признаки классификации достаточно условны. Например, в сетевом планировании и управлении используются различные математические методы, а в значении термина "исследование операций" многие авторы вкладывают различное содержание.

**Методы элементарной математики** используются в традиционных экономических расчетах при обосновании потребностей в ресурсах, разработке плана, проектов и т. п.

**Классические методы математического анализа** используются самостоятельно (дифференцирование и интегрирование) и в рамках других методов (математической статистики, математического программирования).

**Статистические методы** - основное средство исследования массовых повторяющихся явлений. Они применяются при возможности представления изменения анализируемых показателей как случайного процесса. Если связь между анализируемыми характеристиками не детерминированная, а стохастическая, то статистические и вероятностные методы становятся практически единственным инструментом исследования. В экономическом анализе наиболее известны методы множественного и парного корреляционного анализа.

**Экономические методы** базируются на синтезе трех областей знаний: экономики, математики и статистики. Основа эконометрии — экономическая модель, т.е. схематическое представление экономического явления или процессов, отражение их характерных черт с помощью научной абстракции. Наиболее распространен метод анализа экономики "затраты — выпуск". Метод представляет матричные (балансовые) модели, построенные по шахматной схеме и наглядно иллюстрирующие взаимосвязь затрат и результатов производства.

**Методы математического программирования** — основное средство решения задач оптимизации производственно - хозяйственной деятельности. По сути, методы — средства плановых расчетов, и они позволяют оценивать напряженность плановых заданий, дефицитность результатов, определять лимитирующие виды сырья, группы оборудования.

**Под исследованием операций** понимаются разработки методов целенаправленных действий (операций), количественная оценка решений и выбор наилучшего из них. Цель исследования операций сочетание структурных взаимосвязанных элементов системы, в наибольшей степени обеспечивающее лучший экономический показатель.

**Теория игр** как раздел исследования операций представляет собой теорию математических моделей принятия оптимальных решений в условиях неопределенности или конфликта нескольких сторон, имеющих различные интересы.

**Экономическая кибернетика** анализирует экономические явления и процессы как сложные системы с точки зрения законов управления и движения в них информации.

### Теория массового обслуживания

Данная теория позволяет изучать системы, предназначенные для обслуживания массового потока требований случайного характера. Случайными могут быть как моменты появления требований, так и затраты времени на их обслуживание. Целью методов теории является отыскание разумной организации обслуживания, обеспечивающей заданное его качество, определение оптимальных (с точки зрения принятого критерия) норм дежурного обслуживания, надобность в котором возникает непланомерно, нерегулярно.

В итоге, решение экономических задач с помощью метода математического моделирования позволяет осуществлять эффективное управление как отдельными производственными процессами на уровне прогнозирования и планирования экономических ситуаций и принятия на основе этого управленческих решений, так и всей экономикой в целом.

### Используемые литературы

1. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование: Моделирование макроэкономических процессов и систем, М.: ЮНИТИ, 2005 295 с.
2. Зайченко, Ю.П. Исследование операций Ю.П., М.: Высшая школа, 2008. – 324 с.
3. Замков, О.О. Математические методы в экономике, М.: ДИС, 2009. – 368 с.
4. Ильченко, А.Н. Экономико-математические методы, М.: Финансы и статистика, 2006.-287с.