УДК 532.526

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА С ПОПЕРЕЧНЫМ ВДУВОМ СТРУЙ

БЕКЕТАЕВА А.О., ДУЙШЕНАЛИЕВ Т.Б

Институт математики и матмоделирования МОиН Республики Казахстан, Алматы

КГТУ им. И. Раззакова, Бишкек

izvestiya@ktu.aknet.kg

На основе численной методики расчета осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для совершенного газа представлено решение задачи поперечного вдува круглой струи в сверхзвуковой поток. В работе исследована ударно-волновая картина, возникающая на обтекаемой пластине. Полученные численные результаты распределения полей скорости на поверхности пластины качественно согласуются с известными экспериментальными данными.

Введение. Теоретическое и практическое изучение взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым потоком связана, прежде всего, с разработкой новых конструкций самолетов короткого взлета и посадки, авиационных силовых установок с управлением вектора тяги, а также при проектировании прямоточных воздушно-реактивных двигателей. При вдуве поперечной струи в сверхзвуковой поток наблюдается повышение тяги, развиваемой струей, по сравнению со случаем, когда вдув струи осуществляется в неподвижную среду. Это объясняется взаимодействием струи с основным потоком, при котором возникает сложная картина течения. Образуется система скачков уплотнения, возникают зоны возвратных течений как перед струей, так и за ней. Характер взаимодействия струи с набегающим потоком зависит от интенсивности вдува, характеризующейся отношением давления p_0 на срезе сопла к p_∞ давлению в потоке, числом Маха струи, параметрами набегающего потока, таких как число Маха потока M_∞ и число Рейнольдса, а также размерами щели или круглого сопла. В качестве геометрических параметров, характеризующих инжекцию поперечных струй, обычно рассматривают длину и конфигурацию зоны отрыва перед струей, а также распределение давления на стенке вблизи сопла инжекции.

Обтекание струй и препятствий достаточно хорошо исследовано экспериментально [1-3]. Среди численных исследований известны работы, в которых моделируется поперечный вдув водорода в канале ПВРД [4-8]. В большинстве таких работ в основном производятся тестовые расчеты, и практически отсутствует численное исследование физических аспектов полученной схемы течения. Это обусловлено сложной структурой течения в области вдува струи.

В данной работе численно моделируется вдув круглой звуковой струи перпендикулярно сверхзвуковому потоку в прямоугольном канале. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки (рис.1).

Постановка задачи. Исходной является система трехмерных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\left(\vec{E}-\vec{E}_v\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\vec{F}-\vec{F}_v\right)}{\partial z}+\frac{\partial\left(\vec{G}-\vec{G}_v\right)}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

компоненты векторов $\vec{U},\vec{E},\vec{F},\vec{G}$ определяются выражениями:

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{pmatrix},\quad \vec{E}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+P)u\end{pmatrix},\quad \vec{F}=\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (E_t+P)w\end{pmatrix},\quad \vec{G}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (E_t+P)v\end{pmatrix},$$

а компоненты $\vec{E}_v,\ \vec{F}_v,\ \vec{G}_v$ связаны с вязкими напряжениями:

$$\vec{E}_v=\left(0,\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{xz},u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}-q_x\right)^T,$$

$$\vec{F}_v=\left(0,\tau_{xz},\tau_{yz},\tau_{zz},u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}-q_z\right)^T,$$

$$\vec{G}_v=\left(0,\tau_{xy},\tau_{yy},\tau_{yz},u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}-q_y\right)^T.$$

Для давления и температуры запишутся следующие выражения:

$$p=(\gamma-1)\left[E_t-\frac{1}{2}\left(\rho u^2+\rho w^2+\rho v^2\right)\right],$$

$$T=\left(\frac{1}{\rho c_v}\right)\left[E_t-\frac{1}{2}\left(\rho u^2+\rho w^2+\rho v^2\right)\right],\quad c_v=\frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2}.$$

Тензоры напряжения и потоки тепла выражаются в виде:

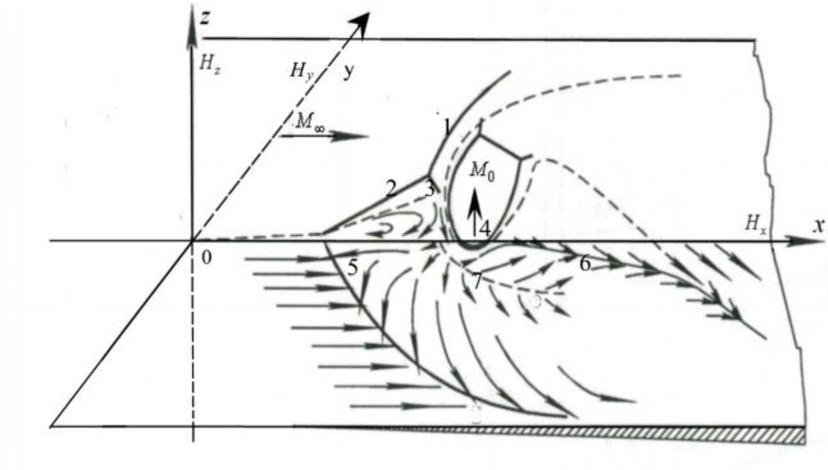


Рис.1. Схема течения

$$\tau_{xx}=\frac{2}{3}\frac{\mu_t}{Re}\left(2u_x-w_z-v_y\right),\quad \tau_{zz}=\frac{2}{3}\frac{\mu_t}{Re}\left(2w_z-u_x-v_y\right),\quad \tau_{yy}=\frac{2}{3}\frac{\mu_t}{Re}\left(2v_y-u_x-w_z\right),$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\frac{\mu_t}{Re}\left(u_z+w_x\right),\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{\mu_t}{Re}\left(u_y+v_x\right),\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\frac{\mu_t}{Re}\left(w_y+v_z\right),$$

$$q_x=-\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr\,Re}T_x,\quad q_y=-\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr\,Re}T_y,\quad q_z=-\frac{\mu_t}{(\gamma-1)M_\infty^2 Pr\,Re}T_z.$$

Здесь t - время, u,w,v - компоненты скорости потока в продольном и поперечном направлениях, ρ - плотность, P - давление, T - температура, c_v - теплоемкость при постоянном объеме, γ - показатель адиабаты, M_0 и M_∞ - числа Маха струи и потока, μ_t - коэффициент турбулентной вязкости, Re- число Рейнольдса, Pr - число Прандля, 0 - отнесен к параметрам струи, ∞- к параметрам потока.

Исходная система (1) записана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры на входе $u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$, давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$, характерным размером длины является диаметр круглого отверстия.

Система (1) замкнута с помощью алгебраической модели турбулентности Болдуина-Ломакса [9].

Граничные условия. На входе задаются параметры потока

$$u=1,\ v=0\ \ w=0,\ \ \rho=1,\ \ T=1 \qquad\qquad x=0,\quad 0\le y\le H_y,\ \ 0\le z\le H_z;$$

на нижней стенке

$$u=0,\ v=0,w=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=0\ ,\ \frac{\partial P}{\partial z}=0 \qquad z=0,\quad 0<x\le H_x,\quad 0\le y\le H_y:$$

на струе

$$u=0,\ v=0,\ T=0.6\ \ w=\sqrt{T}M_0 / M_\infty\ ,\ P=nP_\infty,\qquad z=0,\ \left|x^2+y^2\right|\le R.$$

Вблизи стенки задается пограничный слой, продольная составляющая скорости аппроксимируется степенным законом.

На верхней границе выполняется условие симметрии,

$$w=0;\ \ \frac{\partial u}{\partial z}=0;\ \ \frac{\partial v}{\partial z}=0;\ \ \frac{\partial T}{\partial z}=0 \qquad z=H_z,\ \ 0<x\le H_x,\ \ 0\le y\le H_y;$$

на боковых границах

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial y}=0 \qquad y=0,\ y=H_y,0<x\le H_x,0\le z\le H_z,$$

где H_x -длина, H_z - высота, H_y - ширина расчетной области, R - радиус круглого отверстия.

На выходной границе задается условие неотражения [10].

Метод решения. Для более точного учета течения в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне щели, т.е. в областях больших градиентов, вводится сгущение сетки в продольном и в поперечном направлении с помощью преобразований

$$\xi=\xi(x),\ \ \zeta=\zeta(y),\ \ \eta=\eta(z). \tag{2}$$

При этом линеаризованная относительно вектора $\tilde{\boldsymbol{U}}$ система уравнений (1) в обобщенных координатах запишется в виде:

$$\left[I+\Delta t\left\{\frac{\partial A_\xi^n}{\partial \xi}+\frac{\partial\ B_\eta^n}{\partial \eta}+\frac{\partial\ Q_\zeta^n}{\partial \zeta}-\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\mu_t\xi_x^2}{\mathrm{Re}J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{U_1^n}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\mu_t\eta_z^2}{\mathrm{Re}J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{U_1^n}\right)-\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\mu_t\zeta_y^2}{\mathrm{Re}J}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{U_1^n}\right)\right\}\right]\tilde{\boldsymbol{U}}^{n+1}=$$
$$=\tilde{\boldsymbol{U}}^n+\Delta t\left[2\left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}^n}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm}^n}{\partial \eta}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}_{vm}^n}{\partial \zeta}\right)-\left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}_{vm}^{n-1}}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}_{vm}^{n-1}}{\partial \eta}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}_{vm}^{n-1}}{\partial \zeta}\right)+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}_{v22}^n}{\partial \xi}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{F}}_{v22}^n}{\partial \eta}+\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{G}}_{v22}^n}{\partial \zeta}\right]+O\left(\Delta t^2\right)$$

(3)

где $\tilde{\boldsymbol{U}}=\frac{1}{J}\boldsymbol{U}$, $J=\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,z,y)}$ - якобиан преобразования, $A_\xi=\xi_x A$, $B_\eta=\eta_z B$, $Q_\zeta=\zeta_y Q$, $A=\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{U}}$, $B=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}$ $Q=\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}$ - матрицы Якоби. Диффузионные члены представлены в виде суммы вторых производных искомого вектора $\boldsymbol{U}$ с переменными коэффициентами вязкости и векторов $\widetilde{\boldsymbol{E}}^{n}_{v22}$, $\widetilde{\boldsymbol{F}}^{n}_{v22}$ и $\widetilde{\boldsymbol{G}}^{n}_{v22}$ содержащих оставшиеся диссипативные члены.

Для диффузионных векторов потоков со смешанными производными $\widetilde{E}_{vm}$, $\widetilde{F}_{vm}$, $\widetilde{G}_{vm}$ используется аппроксимация по явной схеме при равномерном шаге по времени со вторым порядком точности [11].

Система (3) решается методом Бима-Уорминга, для этого здесь применяется факторизация, что приводит к трем одномерным операторам, решение которых производится матричной прогонкой.

$$\begin{aligned}
&\text{1 шаг.}\quad \left[I+\Delta t\left\{\frac{\partial A_{\xi}^{n}}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\mu_t\xi_x^2}{\mathrm{Re}J}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{U_1^n}\right)\right\}\right]\boldsymbol{U}^{*}=RHS^{n}\\
&\text{2 шаг.}\quad \left[I+\Delta t\left\{\frac{\partial\ B_{\eta}^{n}}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\mu_t\eta_z^2}{\mathrm{Re}J}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{U_1^n}\right)\right\}\right]\boldsymbol{U}^{**}=\boldsymbol{U}^{*}\\
&\text{3 шаг.}\quad \left[I+\Delta t\left\{\frac{\partial\ Q_{\zeta}^{n}}{\partial\zeta}-\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\mu_t\zeta_y^2}{\mathrm{Re}J}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{U_1^n}\right)\right\}\right]\widetilde{\boldsymbol{U}}^{n+1}=\boldsymbol{U}^{**},
\end{aligned}\tag{4}$$

где RHS^{n} - правая часть системы уравнений (3).

При аппроксимации производных по пространственным координатам в конвективных и диффузионных членах использованы центрально-разностные операторы со вторым порядком точности.

Анализ результатов численного решения задачи

Для расчетов использовались преобразования координат следующего вида [12]:

$$\xi=K+\frac{1}{\tau}arsh\left[\left(\frac{x}{x_{ñ}}-1\right)sh(\tau K)\right],\qquad \eta=H\left[(\beta+1)-(\beta-1)\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{1-\frac{z}{a}}\right]\Bigg/\left[\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{1-\frac{z}{a}}+1\right]$$

$$\zeta=K+\frac{1}{\tau}arsh\left[\left(\frac{y}{y_c}-1\right)sh(\tau K)\right]\ \text{где}\ \ K=\frac{1}{2\tau}\ln\left[\left(1+(e^{\tau}-1)\frac{x_c}{L}\right)\Big/\left(1-(e^{\tau}-1)\frac{x_c}{L}\right)\right],$$

где β,τ - параметры сгущения, $\beta,\tau>1$, a - высота расчетной области в обобщенных координатах, x_c и y_c - точки, относительно которых производится сгущение.

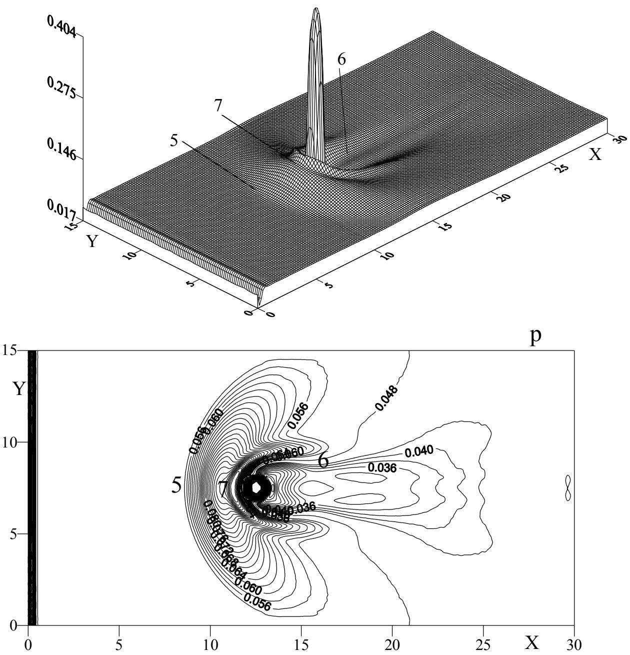
Для подавления высокочастотных возмущений на окончательном этапе вводилось сглаживание четвертого порядка с малым коэффициентом ε при сглаживающих членах. Расчет производился на разнесенной сетке размером $201\times101\times81$ с шагами по пространственным координатам $\Delta x=0.1\div0.5$, $\Delta z=0.06\div0.25$, $\Delta y=0.1\div0.5$, шаг по времени варьировался в пределах $\Delta t=0.025\div0.05$.

Существующие на данный момент экспериментальные работы дают понимание о закономерностях поперечного вдува струи в сверхзвуковой поток. В работах [1-3,8] продемонстрированы основные особенности течения. Система скачков в набегающем потоке состоит из основного скачка, косого скачка и замыкающего скачка. Внутри струи наблюдается бочкообразный скачок и центральный скачок (диск Маха).

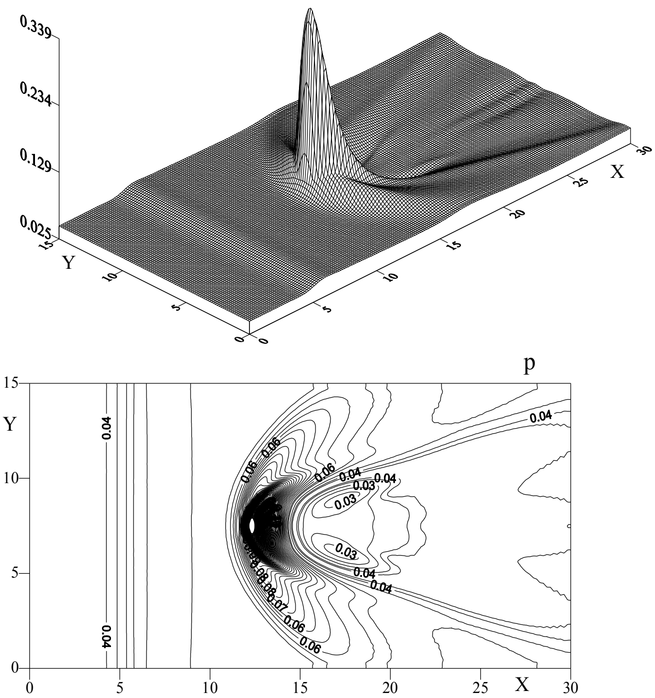
Известно, что распределение давления вблизи струи на стенке, т.е. поле изобарических кривых аппроксимируется криволинейными замкнутыми, вложенными друг в друга эллипсами, давление вдоль которых постоянно. Эту картину можно наблюдать на рисунке 2а ($n=10$, $z=0.063$), где показано распределение изобар вблизи стенки. Перед струей давление принимает максимальное значение, а за струей образуется зона с пониженным давлением. Также на графике показаны границы косого (5 - на рисунке 1 и 2а) и хвостового (6) скачков уплотнения. Эти линии являются границами передней и задней застойных зон. Здесь же прослеживается линия 7, на которой потоки, идущие сверху вниз к обтекаемой поверхности из области повышенного давления за замыкающим скачком уплотнения у стенки растекаются в разные стороны. На уровне $z=1.01$ (рисунок 2б) замыкающий скачок уплотнения выделен интенсивными линиями в виде полумесяца. Далее, в зоне основного потока (рисунок 2в, $z=1.8$), головной скачок уплотнения имеет ярко выраженную клиновидную форму.

Из картины распределения местного числа Маха в плоскости yx (рисунок 3, а) $z=0.063$, б) $z=1.01$, в) $z=1.8$), хорошо видна граница возникающей бочкообразной структуры во вдуваемой струе. Также на картине видно, что поток на пластине является дозвуковым. Непосредственно вокруг бочки возникает ускорение потока, обогнувшего струю. На уровне $z=1.01$, где течение сверхзвуковое, за струей образуется зона торможения вследствие существования области разряжения за струей. На высоте $z=1.8$ четко прослеживается клиновидная форма скачка уплотнения.

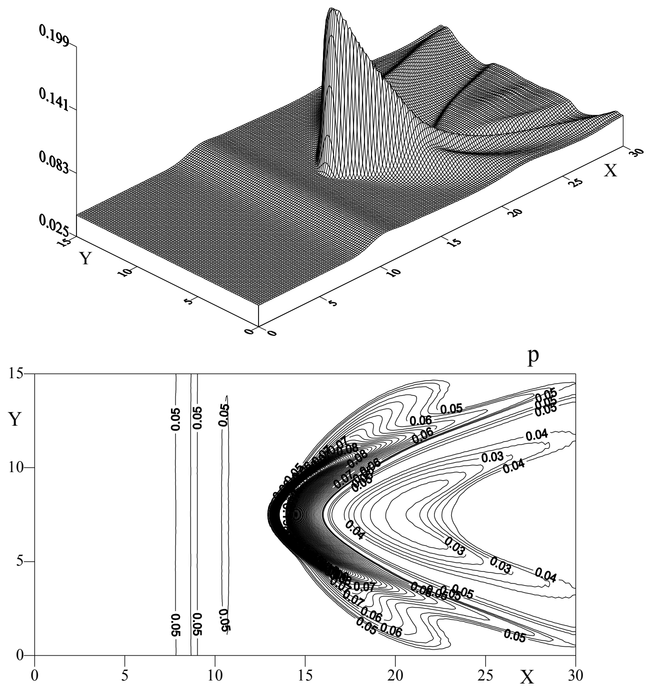
Далее выполнен численный эксперимент поставленной задачи с параметрами ($M_\infty=3$, $M_0=1$, $d=1.4$ см, $Re=1.87*10^7$, $n=15$), где течение вблизи стенки сравнивается с экспериментами работы [1]. Так, на рисунке 4а ($z=0.06$) представлено поле вектора скорости вблизи стенки. Здесь хорошо видны вышеописанные на рисунках 1 и 2 линии стекания (линии 1 и 2) и линия растекания (линия 3). Ниже, на графике 4б, показана фотография визуализирующего состава на поверхности пластины, которая дает представление о характере течения вблизи струи. Таким образом, из рисунков можно увидеть качественное согласование результатов численного расчета с экспериментом.


0.404
0.275
0.146
0.017
5
6
7
Y
X
p
0.056
0.060
0.048
0.040
0.036

а)


0.339
0.234
0.129
0.025
Y
X
p
0.04
0.06
0.03
0.07

б)



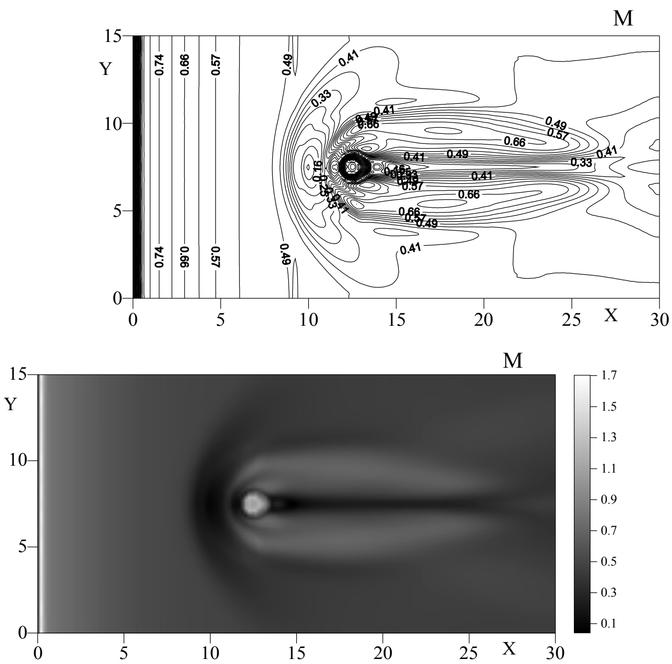
в)

а) z=0.063, б) z=1.01, в) z=1.8

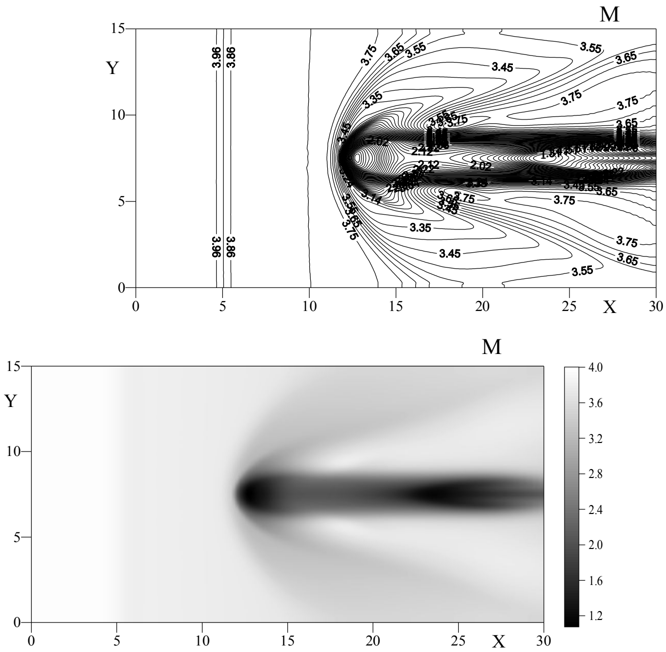
$M_{\infty}=4$, $M_0=1$, $n=10$, $Pr=0.9$, $Re=10^4$, $\gamma=1.4$.

Рис.2. Распределение изобар в плоскости yx

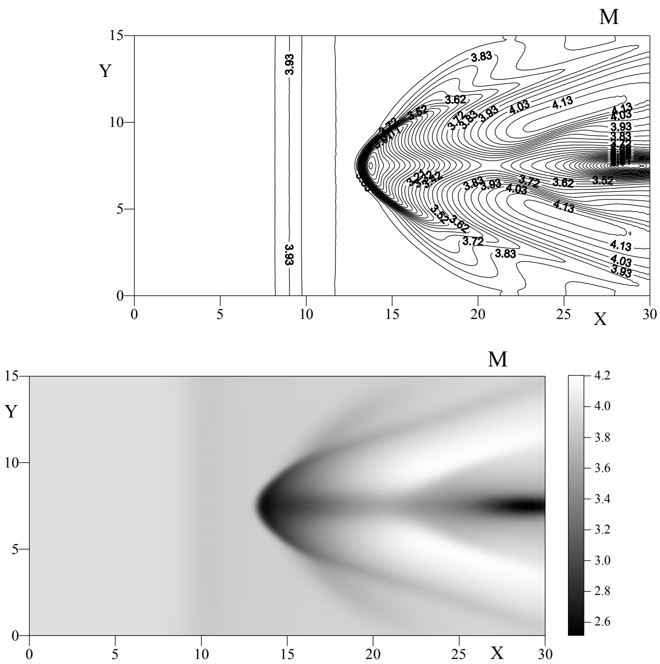
в различных сечениях z



а)



б)



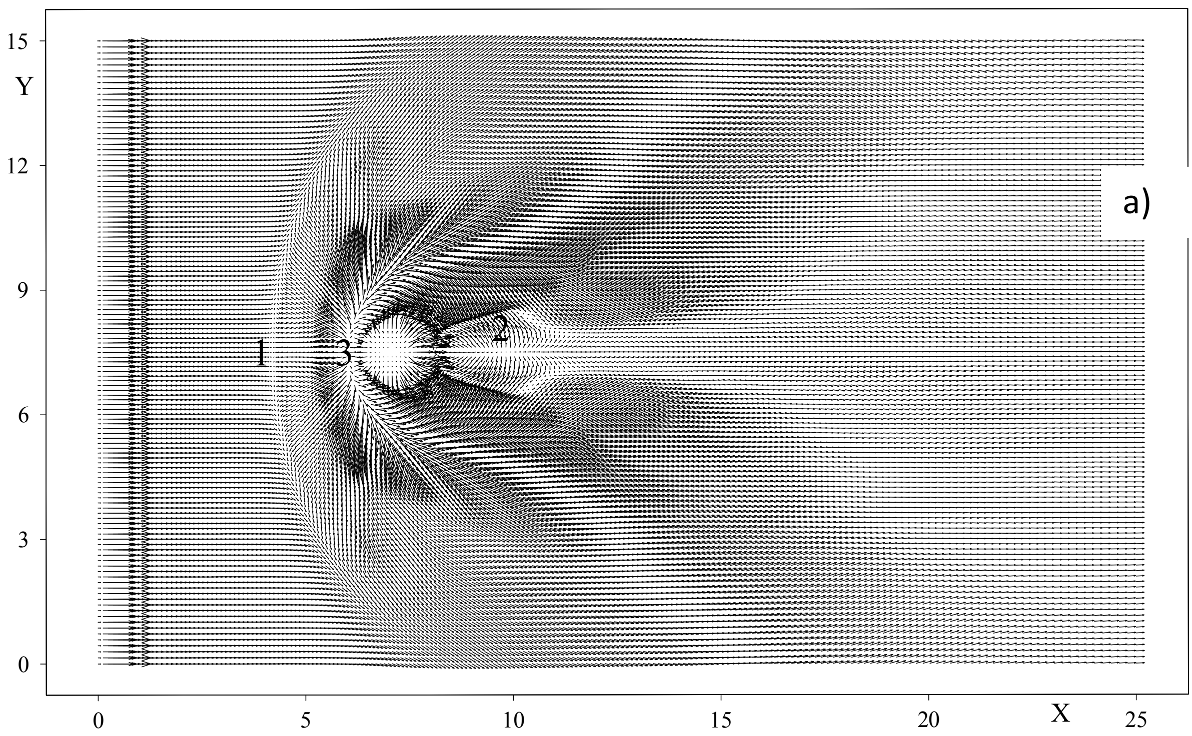
в)

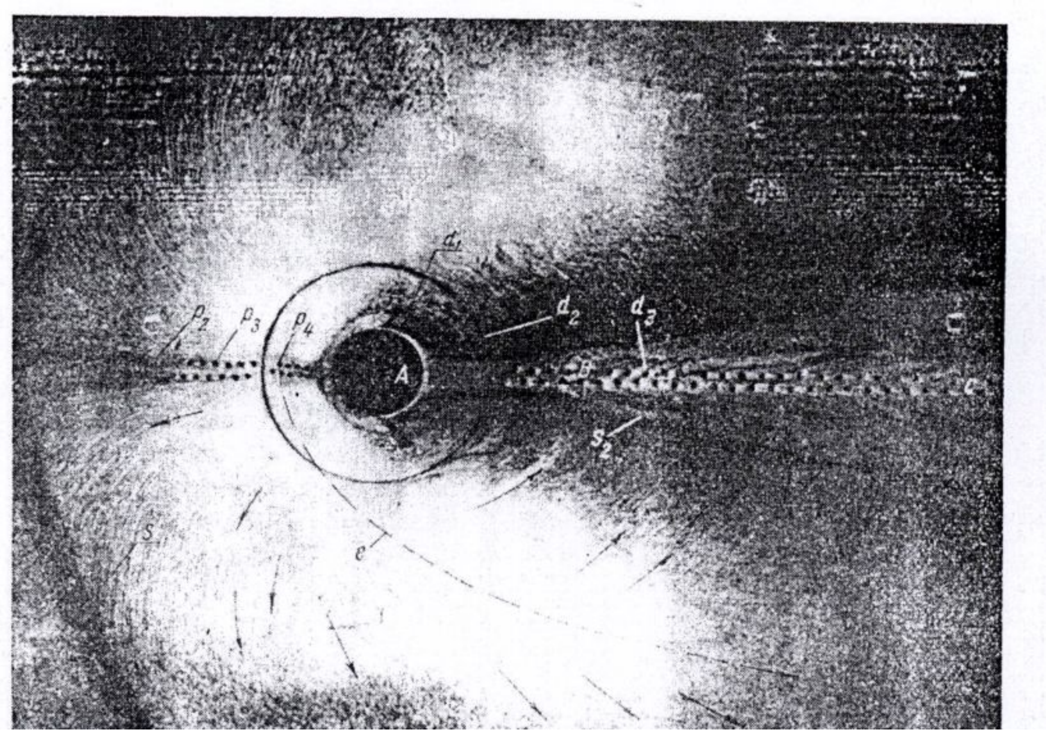
а) z=0.063, б) z=1.01, в) z=1.8

$$M_\infty = 4,\ M_0 = 1,\ n = 10,\ Pr = 0.9,\ Re = 10^4,\ \gamma = 1.4.$$

Рис.3. Распределение местного числа Маха в плоскости yx

в различных сечениях z





б)

а) сечении $z=0.06$,

б) опытные данные

$$M_{\infty}=3,\ M_0=1,\ h=1.4,\ Re=1.87*10^7,\ n=15.$$

Рис.4. Качественное сравнение расчетов для поля вектора скорости вблизи стенки с опытом [1]

Литература

1. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. Обтекание струйного газообразного препятствия на пластине сверхзвуковым потоком // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 3. С.97-102.

2. Авдуевский В.С., Медведев К.И., Полянский М.Н. Взаимодействие сверхзвукового потока с поперечной струей, вдуваемой через круглое отверстие в пластине // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 5. С.193-197.

3. Глаголев А.И., Зубков А.И., Панов Ю.А. Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия в пластине, со сверхзвуковым потоком // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2. С.99-102.

4. Grasso F., Magi V., Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows // AIAA Journal. 1995. Vol.33, № 1. P.56-62.

5. Chenault C.F., Beran P.S. Numerical Investigation of Supersonic Injection Using a Reynolds Stress Turbulence Model // AIAA Journal. 1999. Vol.37, № 10. P.1257-1269.

6. Sun De- chaun, HU Chun-bo, CAI Ti-min Computation of Supersonic turbulent Flowfield with Transfer Injection // Applied Mathematics and Mechanics 2002. Vol. 23, №1.

7. Beresh, S. J., Henfling, J. F., Erven, R. J., and Spillers, R. W., Penetration of a Transverse Supersonic Jet into a Subsonic Compressible Crossflow, AIAA Journal, Vol. 43, No. 2, 2005, pp. 379–389.

8. Бекетаева А.О., Найманова А.Ж. Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т.45, №3. С.72-80.

9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Москва: Мир, 1991.

10. Poinsot T.J., Lele S.K. Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flows // Journal of Computational Physics. 1992. № 101. P.104-129.

11. Бим Р.М., Уорминг Р.Ф. Неявная факторизованная разностная схема для уравнений Навье-Стокса течения сжимаемого газа // Ракетная техника и космонавтика. 1978. Т. 16, № 4. С.145-156.

Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Москва: Мир, 1990.