



**КЫРГЫЗСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Ж.БАЛАСАГЫНА**

На правах рукописи  
Б43 УДК 519.6  
ББК 22.25 УДК 533(075.8)

**ЧЕЧЕЙБАЕВ БАЙЫШ**

**Аналитическое исследование и численное решение  
методом Давыдова некоторых задач механики одно-и  
двухфазных сред.**

**01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы»**

Диссертация  
на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант: Заслуженный работник образования Кыргызской Республики, доктор физико-математических наук, профессор А.И.Исманбаев

**БИШКЕК – 2013**



# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Введение

**Глава I. Исследование трансзвуковых потенциальных течений газа на основе рекуррентной системы уравнений в частных производных.**

1.1. Вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений для исследования установившихся стационарных потенциальных течений газа в трансзвуковом диапазоне скоростей.

1.2. Пространственные трансзвуковые течения газа мейеровского типа в соплах Лаваля.

1.3. Течения газа с плоской звуковой поверхностью  
1.4. Решение рекуррентной системы дифференциальных уравнений и определение последующих приближений потенциала скорости возмущения.

1.5. Пространственные околосвуковые потенциальные течения газа через сопло с двумя сужениями

1.6. Смешанное сверхзвуковое течение газа в сопле и слабоогнутой трубе.

1.7. Сверхзвуковое течение газа в сопле и слабоогнутой трубе.

**Глава II. Исследование пространственно-трехмерных нестационарных околосвуковых и сверхзвуковых течений газа.**

2.1 Вывод рекуррентной системы уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственных неустановившихся течений газа.

2.2. Пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в сопле Лаваля.

2.3. Трансзвуковое истечение газа из сосуда с критической



скоростью. 2.4. Обтекание искривленной поверхности. Обтекание газа в пространство с пониженным давлением.

2.5. Исследование задачи обтекания крыла пространственно-трехмерным нестационарным сверхзвуковым газовым потоком.

### **Глава III. Исследование нестационарных трансзвуковых течений смеси газа и твердых частиц.**

3.1. Упрощение системы дифференциальных уравнений трансзвуковых течений смеси газа и твердых частиц.

3.2. Расчет трансзвуковых течений двухфазной смеси в сопле Лаваля.

3.3. Приближенно-аналитический метод для исследования нестационарных трансзвуковых двухфазных течений в соплах.

3.4. Расчет двухфазных течений Прандтля-Мейера около угла.

### **Глава IV. Метод Давыдова для решения задач нефтегазовой подземной гидромеханики.**

4.1. Метод Давыдова для моделирования двумерных безынерционных течений.

4.2. Метод Давыдова для моделирования инерционных фильтрационных течений при использовании модели С.А.Христиановича.

4.3. Тестовые расчеты методом Давыдова пространственно-двумерных однофазных фильтрационных течений при различных моделях фильтрации.

4.4. Аналитическое исследование пространственно-трехмерных инерционных фильтрационных течений газа в пористой среде при использовании модели С.А.Христиановича.

### **Глава V. Исследование нелинейных свойств метода крупных частиц Давыдова для решения задач газовой динамики.**



5.1. Разностная модель метода Давыдова на треугольной сетке в пространственно-двумерном случае.

5.2. Пространственно-трехмерная разностная модель метода Давыдова на треугольной сетке.

5.3. Исследование разностных схем метода Давыдова для расчета течений вязкого и теплопроводного газа.

5.4. Применение системы REDUCE-3 в исследовании разностных схем метода Давыдова применительно к задачам инерционной фильтрации.

5.5. Дифференциальные приближения высоких порядков для многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц.

**Заключение**

**Литература**



## Введение

В настоящее время сопла используются при решении многих научных и технических проблем. Исторически первые применения сопел связаны с паровыми турбинами в которых они были использованы шведским инженером де Лавалем. Развитие аэродинамики больших скоростей потребовало создания лабораторных методов экспериментального исследования высокоскоростных потоков и положило начало применения сопел в аэродинамических трубах.

В последние десятилетия возникла еще одна область практического использования сопел в качестве генераторов рабочего тела в МГД-устройствах и в газодинамических и химических лазерах.

Разработаны методы решения уравнений в частных производных описывающих течения в соплах, решения задач обтекания потоком газа различных тел при транс- и сверхзвуковых скоростях. Сложность задачи состоит не только в большом числе таких уравнений необходимых для описания неравновесных процессов но и в том, что тип их различен в различных частях сопла. В случае стационарного течения в дозвуковой области соответствующая система уравнений в частных производных является эллиптической, в сверхзвуковой – гиперболической. Таким образом, при изучении течений в соплах приходится иметь дело с различными областями современной физики, а при решении уравнений описывающих течения – с основными типами уравнениями математической физики. Теоретические расчетные и аналитические методы физической газовой динамики внутренних течений применяются в настоящее время при решении задач охраны воздушного бассейна от токсичных компонент. Эти методы позволяют описать образование и трансформацию токсичных компонент в парогенераторах тепловых электростанций двигателях внутреннего сгорания в различных металлургических установках.

Методы физической газовой динамики могут быть использованы в метеорологии и порошковой металлургии. Задача о непосредственном интегрировании нелинейных уравнений газовой динамики как в области дозвуковых так и сверхзвуковых скоростей представила большие и казалось непреодолимые математические трудности. Рассмотрение приближенных линеаризованных уравнений соответствующих малым возмущениям в теории тонкого крыла или тела вращения привела кряду важных результатов. В данной работе рассмотрены пространственно-трехмерные стационарные и



нестационарные внутренние течения газа в соплах, каналах и истечения газососуда с критической скоростью.

Проведена линеаризация основного уравнения газовой динамики относительно потенциала скорости на физической плоскости для решения задач обтекания газом различных тел при до- и сверхзвуковых скоростях.

В связи с полетами летательных аппаратов в широком диапазоне скоростей и высот практика выдвинула для исследования целый ряд сложных задач газовой динамики требующих разработки принципиально новых подходов и методов для их решения. Сюда относится например, изучение трансзвуковых режимов обтекания, определение характеристик вязких потоков газа течений при наличии излучения и ионизации, исследование явлений происходящих при срыве потока в следе за телом. При этом часто бывает необходимым рассматривать сложные формы аппаратов, различные траектории полетов в возмущенной области, где могут появиться вторичные скачки уплотнения, местные сверхзвуковые зоны подобласти «обратного» течения.

В настоящее время одним из основных способов исследования сложных нелинейных задач механики является вычислительный эксперимент. Для численного моделирования разнообразных задач механики сплошных сред успешно используется метод крупных частиц Ю.М. Давыдова. С его помощью решаются актуальные задачи механики сплошных сред в следующих областях: машиностроения, экологии, технологии парашютостроения, ракетные двигатели твердого топлива, газогенераторы, закачка жидкости в скважины нефтегазоносных пластов, физика плазмы, взаимодействие лазерного излучения, а также взаимодействие электронных и ионных пучков с веществом, инерционный термоядерный синтез, космофизика, геомеханика, радиоэлектроника и т.д.

Современное истолкование метода крупных частиц Давыдова состоит в рассмотрении многопараметрических классов разностных схем расщепления с оптимизацией по параметрам. Алгоритмы метода конструируются с учетом архитектуры высокопроизводительных супер-ЭВМ. Значительное развитие получило в данной работе исследование глубоко нелинейных свойств применяемых алгоритмов, получены матрицы аппроксимационных вязкости, дисперсии, бидисперсии, тривязкости и др. Здесь же были выведены разностные формулы метода крупных частиц для треугольной и призматической формы ячеек. Рассмотрены эйлеров. лагранжев и заключительный этапы вычислительного процесса.



Основное уравнение газовой динамики, записанное относительно потенциала скорости, является весьма сложным для аналитического решения, поэтому для исследования потенциальных течений газа были выведены приближенные уравнения. Для случая строго потенциальных стационарных течений оно было выведено Т. Карманом [57, 165], К.Г.Гудерлеем [21, 167], К.Осватичем [173 и др.], а для нестационарных - Ц. Линем, Э. Рейснером, С.Цзянем [170 и др.].

Применяя метод малых возмущений к квазилинейному дифференциальному уравнению Эйлера относительно потенциала скорости, автором настоящей работы была выведена рекуррентная система уравнений в частных производных второго порядка. Нулевое приближение рекуррентной системы является основным при исследовании пространственных стационарных околосвуковых течений газа и называется уравнением Кармана. Последующие приближения являются линейными уравнениями в частных производных второго порядка.

Характерной чертой теории малых возмущений для трансзвуковых течений газа является то, что описывающие их приближенные уравнения остаются нелинейными на плоскости физических переменных. В связи с этим, автор данной диссертации обратил особое внимание к исследованию качественных особенностей трансзвуковых течений, которые можно обнаружить, изучая некоторые частные решения задачи.

Аналогичным образом, исходя из квазилинейного дифференциального уравнения, записанного относительно потенциала скорости, в настоящей работе была также выведена рекуррентная система уравнений в частных производных второго порядка. Для нулевого приближения потенциала скорости возмущения здесь получено нелинейное уравнение Линя-Рейснера-Тзяня. Это уравнение является фундаментальным при изучении пространственных нестационарных течений газа в околосвуковом режиме скоростей. Анализ групповых свойств уравнений позволяет найти автомодельные решения уравнений Кармана, Линя-Рейснера-Тзяня, с помощью которых можно исследовать околосвуковые течения газа в соплах, криволинейных каналах, а также обтекание околосвуковым потоком газа тел с различными геометрическими формами. Первыми исследователями смешанных до- и сверхзвуковых течений в соплах Лавалья были Т. Мейер и Дж.И. Тейлор. Разлагая потенциал скоростей в ряд по степеням пространственных координат, Т. Мейер построил поток с дозвуковым полем скоростей в области до горла канала и сверхзвуковым - позади него.



В настоящей работе, применяя различные способы интегрирования нелинейного уравнения Кармана, метод Крускаля-Кларксона, найдено решение, описывающее пространственное околзвукое течение мейеровского типа в сопле Лавалья. Здесь также было исследовано течение Тэйлора, поле скоростей которого является в целом дозвуковым, но содержит местные сверхзвуковые зоны у стенок канала, в окрестности канала минимального сечения.

Далее, на основе выведенной рекуррентной системы уравнений в частных производных определено первое приближение потенциала скорости возмущения. Наиболее полное исследование течений газа с прямой звуковой линией перехода через скорость звука принадлежит Л.В. Овсянникову и опубликованы в его работах [79, 80 и др.]. Здесь наличие на звуковой линии особых точек позволило построить сопло, стенки которого имеют изломы.

Методом разделения переменных авторами настоящей работы найдено решение уравнения Кармана, описывающее пространственное течение газа в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода. Последующие приближения потенциала скорости возмущения являются решением уравнения Ламе. Околзвукое течение газа в соплах с двумя сужениями изучались на плоскости потенциала скорости и функции тока в работах С.Томотики и К.Томады [176, 177], С.Томотики и З.Хазимото [175].

На физической плоскости найдены решения, описывающие околзвукое нестационарные течения газа в сопле с двумя сужениями. В предлагаемой нами работе также изучены задачи обтекания выпуклой стенки потоком газа, истечения газа из сосуда с критической скоростью, течения расширения Прандтля-Мейера и др. Исследованы двумерные неустановившиеся течения в соплах и т.д.

Газовая динамика многофазных сред отличается от классической механики присутствием в потоке мелких жидких или твердых частиц различных размеров и форм, которые в процессе течения обмениваются с газом энергией и импульсом, могут переходить из одного агрегатного состояния в другое. Одним из наиболее эффективных методов исследования многофазных течений является метод математического моделирования, который получил в настоящее время широкое распространение. Для исследования таких задач наиболее распространенной среди математических моделей, с точки зрения практического применения, является модель двухфазного течения смеси газа и твердых частиц в соплах.

Первыми работами, где были проведены аналитические исследования задачи о течении газа с частицами в сопле, являются работы Дж. Клигеля [58,



59] и У. Ренни [86]. Анализ Дж. Клигеля основан на предположении о том, отставание твердых частиц от газа по скорости и температуре является постоянной величиной, тогда как У. Ренни использовал метод возмущений. Вслед за этими работами вышло в свет множество работ, относящихся к аналитическим методам исследований двухфазных потоков смеси газа и частиц в соплах в различных диапазонах скоростей. На первом этапе исследований течений смеси газа и частиц в соплах рассматривались течения в одномерном приближении, при этом, в большинстве случаев, задача решалась при учете отставания частиц относительно газа по скорости и температуре.

Одной из особенностей такого вида течения является переход скорости газа через скорость звука, осуществляемый в расширяющейся части сопла. Для течения смеси газа с частицами массовый расход через сопло не определяется однозначно через размеры сечения минимальной площади, как это имеет место в случае чистого газа. Отметим, что необходимость подбора параметров во входном сечении сопла приводит к тому, что решение прямой задачи о двухфазном течении Лавая смеси газа с твердыми частицами становится достаточно сложным. Поэтому на практике широкое распространение получили обратные методы расчета двухфазных течений в соплах, где заранее известным принимается распределение какого-либо физического параметра вдоль оси сопла (например, скорости газа или скорости частиц), а остальные величины, в том числе и форма канала, определяются в процессе решения. Здесь взаимодействие газа и частиц описывается известным стоксовским законом сопротивления. Заметим, что частным случаем двухфазного течения с постоянным отставанием является равновесный поток смеси газа и частиц.

В работах Л. Хассана и Т. Делингера [104 и др.], при задании распределения скорости частиц по длине сопла, решение обратной задачи было найдено в квадратурах, при этом здесь было предположено, что взаимодействие фаз происходит по законам сопротивления Стокса. К проблеме интегрирования уравнений для моделирования одномерных двухфазных течений смеси газа и частиц в сопле Лавая с заданными геометрическими параметрами посвящена статья Глауца.

Одномерные двухфазные течения смеси газа и твердых частиц в каналах с постоянной и переменной площадью поперечного сечения рассматривались в работах Т. Neilson и А. Gilohvist.

В ряде работ развивались методы расчета плоских двухфазных течений смеси газа с частицами в соплах. Например, в работе [10] построены линии тока частиц в двумерном потоке при известных параметрах газа. Для



расширяющейся части сопла расчет проводился в предположении того, что в начальном сечении сопла скорость частиц имеет только осевую составляющую. Было установлено, что около стенки сопла образуется слой чистого газового потока, а толщина этого слоя зависит от геометрических данных сопла. Физические параметры газа находились с помощью метода характеристик. Следует отметить, что в плоскопараллельном двухфазном течении смеси газа и частиц в соплах, в отличие от одномерных потоков, выяснены некоторые новые детали, в частности, существование пристеночного слоя чистого газа, хотя теоретические исследования проводились при сильных допущениях, касающихся взаимодействия газа и частиц.

Для расчета двухфазного течения в окрестности минимального поперечного сечения в работе [59] предлагается решение Зауэра для случая совершенного газа.

Применение зависимостей, предложенных Зауэром для описания двухфазных течений с постоянным запаздыванием частиц, дали возможность найти распределения физических параметров газа в окрестности минимального поперечного сечения. При помощи интегрирования уравнений движения и энергии частиц, вдоль их линий тока определены компоненты скоростей и температуры частиц.

Задача расчета плоского двухфазного течения в дозвуковой и трансзвуковой частях сопла Лавала рассмотрена в работе Г.В. Дритова и А.П.Тишина, в которой было учтено также влияние частиц на движение газа. Методы расчета двухфазного плоскопараллельного течения в сопле в рамках двухжидкостной модели сплошной среды для дозвукового и трансзвукового режимов скоростей были развиты в работах И.М. Васеника, А.Д. Рычкова и В.И.Копченова, А.Н. Крайко, где для преодоления ряда трудностей, связанных с переходом через скорость звука, был использован метод установления.

Обширная библиография исследований по течениям двухфазных смесей приведена в обзорной статье А.Н.Крайко, Р.И.Нигматулина, В.К.Старкова и Л.Е.Стернина "Механика многофазных сред" (опубликована в сб.: Итоги науки и техники. Гидромеханика. - М.: ВИНТИ, 1972, т.6, с. 93-174), а подробное рассмотрение ряда вопросов газовой динамики двухфазных течений в соплах Лавала содержится в монографии [97].

Как известно, плоскопараллельные нестационарные двухфазные околосвуковые течения смеси газа и частиц являются смешанными, поскольку в потоке имеются зоны как дозвуковых, так и сверхзвуковых скоростей. При значениях чисел Маха, превышающих единицу, система уравнений



двухфазного течения смеси газа и частиц является гиперболической и течения поддаются расчету при использовании метода характеристик. Однако здесь часть системы уравнений, относящаяся к движению газовой фазы, становится эллиптической в области дозвуковых скоростей. Отметим, что методы интегрирования эллиптических и гиперболических уравнений принципиально различны, что создает здесь дополнительные трудности. Кроме этого, границы области изменения типа уравнения заранее неизвестны и определяются лишь в процессе решения задачи.

В этом направлении в настоящей работе выполнена работа по приведению системы уравнений для моделирования нестационарных течений двухфазной смеси газа и твердых частиц к нелинейному уравнению в частных производных второго порядка (уравнение Эйлера) относительно потенциала скорости. Полученное уравнение Эйлера приводится далее методом малого возмущения к рекуррентной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, к системе смешанного типа.

Нулевое приближение потенциала скорости возмущения здесь определяется интегрированием основного уравнения теории нестационарных околосвуковых течений газа, т.е. уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, а последующие приближения определяются решением соответствующих линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Необходимые параметры равновесного течения двухфазных сред выражаются через составляющие скорости, согласно соответствующим конечным соотношениям.

В настоящей диссертации разработан приближенно-аналитический метод для исследования двумерных нестационарных течений двухфазных сред при трансзвуковом режиме скоростей. Здесь рассматривается система дифференциальных уравнений динамики двухфазных сред (газ и твердые частицы), состоящая из уравнений неразрывности, движения, энергии и уравнения состояния, относящихся к обеим фазам. Основные физические величины, соответствующие газовой и твердой фазам - составляющие вектора скорости, плотность, температура, давление - разлагаются в ряд по степеням малого параметра. Предположение о том, что равновесное двухфазное течение (отсутствие скоростного и температурного отставания) наступает в области трансзвуковых течений, приводит к упрощению системы уравнений двухфазного течения и позволяет проводить исследование как внутренних, так и внешних трансзвуковых двухфазных течений. Отметим, что относительно составляющих скоростей в случае равновесных двухфазных течений



получается система нелинейных уравнений в частных производных первого порядка, эквивалентная уравнению Линя-Рейснера-Тзяня.

В настоящей работе для определения первых приближений искомых физических величин двухфазной среды получена система линейных уравнений в частных производных первого порядка. Скоростное и температурное отставание фаз здесь определяется в процессе решения и является суммой линейной функции от пространственных переменных и экспоненциальной функции. Исследованы двухфазные плоскопараллельные нестационарные течения в соплах Лаваля, течения в сопле с прямой звуковой линией перехода, в сопле с двумя сужениями в трансзвуковом режиме скоростей.

Появление в XX веке электронно-вычислительных машин (ЭВМ) способствовало бурному развитию методов математического моделирования. Особое место среди методов численного моделирования занимают методы вычислительного эксперимента.

Ярким представителем методов вычислительного эксперимента является метод крупных частиц, разработанный в конце 60-х годов XX века [11, 12, 22-48 и др.]. Ныне данный метод носит имя своего автора [2, 18, 51, 65, 73, 100-101, 115-121, 124-125, 143-144, 178 и др.] – Академика Ю.М. Давыдова. Метод Давыдова позволяет в прямом смысле ставить вычислительный эксперимент: исследовать принципиально новые физические явления без априорной информации о структуре решения [11, 48 и др.]. Создателем метода Ю.М.Давыдовым выстроена как единое целое научно-математическая концепция метода крупных частиц, которая глубоко и всесторонне проанализирована, теоретически обоснована и в настоящее время широко применяется при решении актуальных задач механики сплошных сред, механики сыпучих материалов, задач экологии, машиностроения, химической технологии и многих других [2, 11, 12, 18, 22-48, 51, 65, 73, 100-101, 115-121, 124-125, 128, 143-144, 178 и др.]. Метод Давыдова стал в прямом смысле энциклопедическим. Он вошел во все математические энциклопедии мира [33, 38, 162]. Поэтому в настоящей работе для численного решения задач подземной гидромеханики был использован метод Давыдова.

Начало развитию теории фильтрации положили опыты А. Дарси (1856 г.), Ф. Форхгеймера (1898 г.) и Г. Хелле-Шоу (1897 г.). Выдающийся вклад в развитие теории фильтрации в нефтегазоносных пластах внесли С.А.Христианович, П.Я.Полубаринова-Кочина, Б.Б. Лапук, И.А.Чарный, В.Н.Щелкачев и др.



Традиционным уравнением подземной гидромеханики, характеризующим процесс фильтрации жидкости в пористой среде, является экспериментально установленный закон А. Дарси и его обобщения на случай многофазных течений [163, 1, 8-9 и др.]. В настоящее время закон Дарси широко применяется при прогнозировании процессов разработки месторождений нефти и газа. Однако, как показывает практика, проведенные в течение последних трех десятилетий на месторождениях измерения скоростей фильтрации и давления в условиях достаточно резких изменений давления во времени режимов работы скважин показали очень большое отличие данных измерений от предвычисленных [74, 75], где при вычислениях в качестве динамического уравнения использовался закон Дарси. Расчеты производились с помощью хорошо известных методов, основанных на точных решениях уравнений фильтрации для упругого режима. В основу уравнений фильтрации был положен закон А. Дарси и его обобщения для “турбулентного” режима, когда пропорциональность скорости фильтрации градиенту давления заменяется квадратичной зависимостью и коэффициент проницаемости имеет размерность не площади, а длины. В связи с этим возникает проблема моделирования фильтрационных течений при использовании более совершенных моделей фильтрации.

Совпадения данных расчетов и опыта наблюдались только при очень медленных изменениях давления во времени. При больших изменениях давления имело место большое расхождение расчетных и опытных данных, что побудило С.А. Христиановича в начале 80-х годов прошлого века вернуться к рассмотрению основ теории и подвергнуть анализу возможность проникновения.

В работах С.А. Христиановича [106-108 и др.] была предложена новая модель фильтрации в условиях импульсного нагружения, которая обобщает закон А. Дарси на случай учета сил инерции, больших градиентов давления и пористости среды.

В данной диссертационной работе предложены разностные схемы метода Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании модельного уравнения академика С.А. Христиановича и проведен сравнительный анализ численных решений, полученных при использовании модели С.А. Христиановича с численными решениями, полученными при использовании традиционной модели А. Дарси и известными аналитическими решениями модельных задач.

В диссертационной работе также отражены следующие научные



результаты [46-47, 114-128, 143-145, 148-149] в области подземной гидромеханики:

- исследованы нелинейные свойства разностных схем метода Давыдова для задач инерционной фильтрации при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича, определены элементы матрицы аппроксимационной вязкости и дисперсии при использовании модельного уравнения А.Дарси;

- получен класс аналитических решений задачи о плоскорадиальном притоке жидкости к скважине при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича;

- выведено дифференциальное уравнение в частных производных относительно потенциала скорости, описывающее пространственно-трехмерную фильтрацию совершенного газа при использовании уравнения С.А.Христиановича;

- выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений второго порядка для моделирования пространственно-трехмерной фильтрации газа в пласте при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича и найден класс точных аналитических решений полученного дифференциального уравнения в случае нулевого приближения потенциала скорости возмущения.

Важнейшим свойством системы уравнений нестационарной газовой динамики является ее гиперболичность. Стационарные течения описываются системой уравнений, которая при некоторых условиях утрачивает свою гиперболичность: она является эллиптической или смешанно-гиперболической в одной части пространства, занятой газом и чисто эллиптической - в другой части. Изучение общих свойств решений таких систем и получение частных решений, соответствующих конкретным условиям движения газа, является весьма трудной математической проблемой.

Автор диссертационной работы выражает свою искреннюю признательность - Президенту Национальной академии прикладных наук России, академику Королевской АН Испании, Почетному академику НАН Кыргызской Республики, Почетному академику АН Туркменистана, Заслуженному деятелю науки и техники России, Почетному доктору и Почетному профессору ряда крупнейших университетов мира, доктору физико-математических наук, профессору Ю.М. Давыдову за оказанную помощь в выборе проблемы научного направления и постановке исследуемых задач, метода численного эксперимента и обсуждения полученных результатов.

Постоянное внимание доктора физико-математических наук, профессора Ю.М. Давыдова и научного консультанта доктора физико-математических



наук, профессора А.И. Исманбаева на всех этапах выполнения и апробирования научных результатов способствовало разрешению задач, выполненных в данной диссертационной работе.

### **Актуальность темы диссертации**

Исследование пространственно-трехмерных стационарных, а также нестационарных трансзвуковых течений газа в соплах, криволинейных каналах и т.д. является актуальным.

В связи с этим разработки приближенно-аналитических методов решения многомерных нестационарных задач трансзвуковой аэродинамики одно и двухфазных сред (газ и твердые частицы) имеет фундаментальное научное значение.

Дальнейшее развитие метода крупных частиц метода Давыдова для случая треугольной сетки и призматической ячеек, а также исследование свойств разностных схем, имеет очень важное значение в науке и технике. Это связано прежде всего тем, что метод Давыдова позволяет решить сложные научно-технические проблемы взаимодействия лазерного излучения с веществом, экологии, геомеханики и т.д.

Построение разностных схем метода Давыдова, решение задач подземной гидромеханики при использовании модельного уравнения академика С.А. Христиановича на случай учета сил инерции, больших градиентов давления и пористости среды является требованием практики.

**Тема диссертации** связана с научными программами «Теоретические основы движения многофазных сплошных сред при малых и больших скоростях» в Институте автоматики НАН КР в период 1990-1995 (№госрегистрации 01860050628) и научными программами НИИ парашютостроения РАН.

### **Цели и задачи исследования заключается в следующем:**

- исследование пространственно-трехмерных течений газа в трансзвуковом режиме скоростей на основе полного нелинейного уравнения Эйлера относительно потенциала скорости;
- упрощение системы дифференциальных уравнений динамики двухфазных сред (газ и твердые частицы) для решения обратных задач трансзвуковых течений в соплах и внешнего обтекания различных тел двухфазным потоком;
- численное исследование методом крупных частиц Давыдова фильтрационных течений жидкости на основе современного модельного уравнения академика С.А.Христиановича;
- разработки численного алгоритма метода крупных частиц Давыдова на треугольной сетке и для расчетной области из призматических ячеек для



исследования пространственно-двумерных и пространственно-трехмерных течений идеального газа;

- исследование диссипативных, дисперсионных и других глубоких нелинейных свойств многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Давыдова.

#### **Практическая значимость полученных результатов:**

- предложенные в работе разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании современной нелинейной модели С.А. Христиановича могут быть применены на практике при решении задач разработки месторождений нефти и газа в случае учета больших градиентов пластового давления и пористости, сил инерции;

- разностная модель метода крупных частиц Давыдова на треугольной сетке может найти широкое применение при решении задач с треугольной и гексагональной симметриями;

- разработанные приближенно-аналитические методами рекуррентные системы уравнений в частных производных и найденные их решения вносят определенный вклад в развитие теории трансзвуковых течений одно- и двухфазных сред в различных видах сопел, в криволинейных каналах, а также при решении внешних задач трансзвуковой аэродинамики и может быть использована на практике;

- выведенная при использовании в качестве динамического уравнения современной нелинейной фильтрационной модели С.А. Христиановича уравнение в частных производных типа Эйлера, соответствующая рекуррентная система уравнений в частных производных позволяют решить практические задачи инерционной фильтрации жидкости и газа.

Выведенные в работе аналитические выражения могут быть применены в разработке конструкций новых высокоскоростных летательных аппаратов, исследовании космического пространства, при добыче нефти и газа из залежей нефти и газа в недрах, морей и океанов.

#### **Экономическая значимость полученных результатов:**

- алгоритм метода Давыдова на треугольной сетке и призматической ячейке могут найти широкое применение при решении сложных научно-технических проблем парашютостроения, машиностроения, физики плазмы, термоядерного синтеза, во многих отраслях механики сплошных сред, приносящих существенные экономические выгоды.

- разностные схемы метода Давыдова на основе нелинейной модели С.А. Христиановича может найти применение при расчете месторождений нефти и газа и в технико-экономическом отношении также приносит экономические пользы для пользователей.

#### **Основные положения диссертации выносимые на защиту:**

1. Методом малых возмущений выведены рекуррентные системы уравнений в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости возмущения для исследования пространственно-трехмерных



трансзвуковых течений газа в как в стационарном, так и в нестационарных режимах течения.

2. Найдены точные аналитические решения нелинейных уравнений в частных производных второго порядка, описывающие пространственно-трехмерные стационарные потенциальные течения газа в соплах Лавалья, в сопле с плоской поверхностью перехода, в сопле с двумя сужениями как в стационарном, так и в нестационарном случаях. Исследованы истечение газа из сосуда с критической скоростью и течение газа в слабоогнутой трубе. Получены решения обратных внешних задач обтекания трансзвуковым потоком газа вогнутой поверхности, задачи расчета расширенного течения Прандтля-Мейера.

3. Разработан приближенно-аналитический метод для решения внутренних и внешних задач трансзвуковых течений двухфазных сред (газ и твердые частицы). Исследованы пространственно-двумерные нестационарные течения двухфазных сред в различных видах сопел в окрестности горловины, где осуществляется переход через скорость звука.

4. Предложены разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича при учете больших градиентов давления, пористости и сил инерции. Проведены тестовые расчеты методом крупных частиц Давыдова пространственно-двумерных однофазных фильтрационных течений при использовании фильтрационных моделей А.Дарси и С.А.Христиановича.

5. Исследованы нелинейные свойства разностных схем метода крупных частиц Давыдова для решения задач инерционной фильтрации жидкости при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича, также исследованы разностные схемы для расчета течений вязкого и теплопроводного газа.

6. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка типа уравнения Эйлера для исследования пространственно-трехмерной нестационарной фильтрации газа в пористой среде при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича.

Применяя метод малых возмущений к полученному уравнению, выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, с помощью которой можно исследовать пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в пористой среде. Здесь получены точные решения, описывающие фильтрационные течения газа.

7. Предложены разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для решения задач газовой динамики на треугольной сетке и в области из призматических ячеек. При использовании системы аналитических вычислений REDUCE-3 вычислены на ЭВМ дифференциальные приближения многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Давыдова для решения пространственно-трехмерных нестационарных задач газовой динамики. Определены элементы матриц аппроксимационной вязкости, дисперсии, бидисперсии, тривязкости и т.д.



## Научная новизна работы

1. Применяя метод малых возмущений к основному уравнению газовой динамики, записанному относительно потенциала скорости, выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Для исследования пространственно-трехмерных стационарных околозвуковых течений газа получено нелинейное уравнение Кармана, которое является основным уравнением теории трансзвуковой аэродинамики. Последующие приближения потенциала являются линейными неоднородными уравнениями в частных производных второго порядка. Здесь определены точные решения уравнения Кармана, описывающие потенциальные течения газа в соплах Лаваля, процесс истечения газа из сосуда с критической скоростью, движение газа в слабоогнутой трубе, исследованы течения расширения Прандтля-Мейера и т.д.

2. Для исследования пространственно-трехмерных нестационарных течений газа также выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Здесь в трансзвуковом приближении получено нелинейное уравнение Линя-Рейснера-Тзяня. Определены точные аналитические решения, описывающие пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в сопле Лаваля, истечение газа из сосуда, обтекание искривленных поверхностей. Найден класс автомодельных решений уравнения Линя-Рейснера-Тзяня. Разработан приближенно-аналитический метод для решения задач газовой динамики в пространственно-трехмерной постановке в случаях как стационарных, так и нестационарных течений газа в декартовой системе координат.

3. Опираясь на квазилинейное дифференциальное уравнение Эйлера и применяя метод малых возмущений для исследования пространственно-трехмерных нестационарных течений газа при до- и сверхзвуковых скоростях, выведена также рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Здесь для определения нулевого приближения потенциала скорости возмущения получено волновое уравнение. Исследованы задачи обтекания крыла пространственно-трехмерным нестационарным сверхзвуковым потоком газа.

Разработан приближенно-аналитический метод для исследования пространственно-двумерных нестационарных двухфазных течений (газ и твердые частицы) в трансзвуковом режиме скоростей.

Система уравнений в частных производных, состоящая из соответствующих для каждой из фаз уравнений неразрывности, движения и энергии упрощена путем разложения в ряд всех основных величин. При этом для равновесного двухфазного течения в трансзвуковом приближении получается система уравнений Линя-Рейснера-Тзяня. Для определения последующих членов ряда получается система уравнений в частных производных первого порядка.

На основе разработанного приближенно-аналитического метода и выведенной системы дифференциальных уравнений исследованы трансзвуковые течения двухфазной смеси в сопле Лаваля, в сопле с прямой



звуковой линией перехода, проведен расчет двухфазных течений около ут...  
т.д.

4. Впервые предложены разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича и проведен сравнительный анализ численных решений, полученных при использовании современной модели С.А.Христиановича с численными решениями, полученными при использовании традиционной модели А.Дарси.

5. Впервые с использованием системы аналитических вычислений REDUCE-3 на персональном компьютере, вычислены дифференциальные приближения разностных схем метода Давыдова для решения задач инерционной фильтрации при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича.

6. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости, описывающее пространственно-трехмерную нестационарную фильтрацию газа в пористой среде при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича.

7. Выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для моделирования пространственно-трехмерной нестационарной фильтрации газа в пласте при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича и найден класс точных аналитических решений полученного дифференциального уравнения в случае нулевого приближения потенциала скорости возмущения.

8. Разработаны новые алгоритмы метода крупных частиц Давыдова на неортогональных (треугольных и шестиугольных) расчетных сетках для пространственно-двумерных и трехмерных течений.

9. Исследованы разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для расчета течений вязкого и теплопроводного газа. Методом дифференциальных приближений выведена гиперболическая форма второго дифференциального приближения. Определены элементы матрицы аппроксимационной вязкости.

10. Исследованы глубокие нелинейные свойства многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Давыдова для расчета пространственно-трехмерных нестационарных течений газа. Определены элементы матриц аппроксимационной вязкости, дисперсии, бивязкости, бидисперсии и тривязкости.

**Личный вклад соискателя состоит в следующем:**

- выведены рекуррентные системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственно-трехмерных стационарных (нестационарных) до-, транс- и сверхзвуковых течений газа;

- выведена рекуррентная система уравнений в частных производных для исследования фильтрационных течений газа в пористой среде и получены точные аналитические решения для нулевого, первого приближения потенциала скорости;



- получены аналитические решения основного уравнения трансзвуковой аэродинамики, описывающие пространственные течения газа в соплах, криволинейных каналах, обтекание трансзвуковым потоком газа вогнутой поверхности;
- разработка приближенно-аналитического метода для решения задач внутренних и внешних течений двухфазной среды в трансзвуковом режиме скоростей;
- вывод разностных схем метода Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании фильтрационных моделей А. Дарси и С.А. Христиановича и исследование нелинейных свойств разностных схем методом дифференциальных приближений, проведение тестовых расчетов;
- вывод разностных схем метода Давыдова для треугольных и призматических ячеек;
- вычисление дифференциальных приближений разностных схем метода Давыдова для расчета пространственно-трехмерных нестационарных течений газа.

### **Апробация результатов исследований:**

Основные результаты работы докладывались:

- на V Международной конференции «Метод крупных частиц: теория и приложения» (г. Москва, Национальная Академия прикладных наук (НАПН) РФ, 1994 г.);
- на III Республиканской научно-методической конференции «Компьютеры в учебном процессе и науке» (г. Бишкек, КСХИ, 1995 г.);
- на Юбилейном международном симпозиуме «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред» (г. Москва, НАПН РФ, 1997 г.);
- на II Международном симпозиуме «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред» (Москва, НАПН РФ, 1999 г.);
- на третьем Международном конгрессе «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред» (г. Москва, НАПН РФ, 2000 г.);
- на научно-практической конференции «Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века», посвященной 45-летию образования строительного факультета КГУСТА (г. Бишкек, КГУСТА, 2000 г.);
- на международной научной конференции «Проблемы математического моделирования и информационных технологий, посвященной 60-летию академика НАН КР А.Жайнакова (г. Бишкек, НАН КР, 2001 г.);
- на международной научной конференции «Современные проблемы механики сплошных сред» (Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2002 г.);
- на международной научно-практической конференции «Состояние и перспективы технико-экономического развития Кыргызстана» (г. Бишкек, КГУСТА, 2003 г.);
- на научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава и студентов КГУСТА, посвященной 2200-летию



кыргызской государственности и 125-летию г. Бишкек (г. Бишкек, КГУС 2003 г.).

- на юбилейной научно-практической конференции, посвященной 70-летию факультета физики и электроники КНУ им. Ж.Баласагына (г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2003 г.);

- на юбилейной международной научной конференции «Роль академика Р.З. Сагдеева в развитии плазменных исследований в Кыргызской Республике», посвященной 70-летию академика РАН, Почетного профессора КНУ Р.З. Сагдеева (г. Бишкек, КНУ им. Ж.Баласагына, 2003 г.);

- на международной юбилейной конференции «Академик Я.Б. Зельдович и современная физика», посвященной 90-летию Я.Б. Зельдовича (г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2004 г.);

- на международном семинаре «Вычислительные методы и решение оптимизационных задач», организованном Институтом вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и НАН Кыргызской Республики (Кыргызская Республика, Иссык-Кульская область, 2004 г.);

- на II международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (г. Бишкек и Иссык-Кульская область, 13-17 сентября 2006 г.);

- на Юбилейном международном конгрессе «Актуальные проблемы машиностроения, механики, прикладной и вычислительной математики» (г.Москва, НАПН РФ, 3-12 февраля 2007 года).

### **Опубликованные результаты.**

Результаты, полученные в диссертации, отражены в опубликованных работах, в том числе в двух монографиях.

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы и изложена на 276 страницах, включая 30 рисунков, списка литературы из 178 наименований.



## ГЛАВА I

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА НА ОСНОВЕ РЕКУРРЕНТНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

### 1.1. Вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений для исследования установившихся стационарных потенциальных течений газа в трансзвуковом диапазоне скоростей.

Будем исследовать пространственные стационарные течения газа, основываясь на уравнении в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости  $\varphi(x, y, z)$ . Уравнение пространственно-трехмерных установившихся потенциальных течений идеального газа в декартовой системе координат имеет вид [113]:

$$(a^2 - u^2)\varphi_{xx} + (a^2 - \vartheta^2)\varphi_{yy} + (a^2 - w^2)\varphi_{zz} - 2u\vartheta\varphi_{xy} - 2uw\varphi_{xz} - 2\vartheta w\varphi_{yz} = 0, \quad (1.1.1)$$

где  $u = \varphi_x$ ,  $\vartheta = \varphi_y$ ,  $w = \varphi_z$  - составляющие вектора скорости потока,  $a$  - скорость звука, которая вычисляется так [69]:

$$a^2 = \frac{\chi + 1}{2} a_*^2 - \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2). \quad (1.1.2)$$

Здесь  $\chi = \frac{C_p}{C_v}$ ,  $C_p, C_v$  - удельные теплоемкости газа при постоянном

давлении и постоянном объеме, соответственно,  $a_*$  - критическая скорость, достигающаяся в точках потока, где скорость частиц равна скорости звука.

Подставляя выражение для квадрата скорости (1.1.2) в уравнение Эйлера (1.1.1), приводим его к виду

$$(a_*^2 - \varphi_x^2 - h^2(\varphi_y^2 + \varphi_z^2))\varphi_{xx} + (a_*^2 - \varphi_y^2 - h^2(\varphi_x^2 + \varphi_z^2))\varphi_{yy} + (a_*^2 - \varphi_z^2 - h^2 * (\varphi_x^2 + \varphi_y^2))\varphi_{zz} - \frac{4}{\chi + 1} \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} - \frac{4}{\chi + 1} \varphi_x \varphi_z \varphi_{xz} - \frac{4}{\chi + 1} \varphi_y \varphi_z \varphi_{yz} = 0, \quad (1.1.3)$$

где  $h^2 = \frac{\chi - 1}{\chi + 1}$ .



Интегрирование полученного нами квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости  $\varphi(x, y, z)$  (1.1.3) представляет значительные трудности, связанные с его нелинейностью, поэтому для решения задачи интегрирования перейдем к выводу приближенных уравнений, описывающих течения в околосвуковом диапазоне скоростей.

Традиционно при линеаризации исходных уравнений газовой динамики оперируют только главными членами, опуская члены более высоких порядков малости. В данной диссертации будем выводить рекуррентную систему дифференциальных уравнений для исследования установившихся потенциальных пространственно-трехмерных течений газа в трансзвуковом диапазоне скоростей. Здесь одним из наиболее широко употребляемых методов упрощения полных уравнений газовой динамики является метод малого параметра или метод возмущений, который будет использоваться в нашей работе.

Предположим, что на бесконечности вверх по течению поток является поступательным, тогда решение уравнения (1.1.3), удовлетворяющее данным Коши на оси симметрии

$$\varphi(x, 0, 0) = f(x), \quad \varphi_y(x, 0, 0) = 0, \quad \varphi_z(x, 0, 0) = 0, \quad (1.1.4)$$

можно представить в виде

$$\varphi(x, y, z) = a_*(x + \tilde{\varphi}(x, y, z)) \quad (1.1.5)$$

Далее потенциал скорости возмущения  $\tilde{\varphi}(x, y, z)$  будем искать в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k+1} \varphi_k(x, y, z), \quad (1.1.6)$$

где в качестве  $\varepsilon$  можно взять величину  $\varepsilon = 1 - M_\infty^2$ . Здесь  $M_\infty$  - число Маха на бесконечности вверх по течению.

Подставляя (1.1.6) в уравнение (1.1.3) и преобразуя переменные в форме

$$x \rightarrow x, \quad y = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{y}, \quad z = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{z}, \quad (1.1.7)$$



получаем  $(n + 1)$  дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка.

Приведем здесь первые четыре приближения уравнения Эйлера (1.1.3), решая которые можно определить приближения поправки к потенциалу скорости возмущения  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  и т.д.:

$$-(\chi + 1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} - \varphi_{0\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{0\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (1.1.8)$$

$$-(\chi + 1)\varphi_{1x}\varphi_{0xx} + \varphi_x + \varphi_{1xx}) + \varphi_{1\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{1\bar{z}\bar{z}} = \frac{\chi + 1}{2}\varphi_{0x}^2\varphi_{0xx} + (\chi - 1)\varphi_{0x}\varphi_{0\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{0x}\varphi_{0\bar{z}\bar{z}} + 2(\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}} + \varphi_{0\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}}) \quad (1.1.9)$$

$$-(\chi + 1)(\varphi_{2x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0x}\varphi_{2xx}) + \varphi_{2\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{2\bar{z}\bar{z}} = (\chi + 1)(\varphi_{0x}\varphi_{1x}\varphi_{0xx} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1xx}) + \quad (1.1.10)$$

$$+(\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{1\bar{y}\bar{y}} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{y}\bar{y}}) + (\chi - 1) \cdot (\varphi_{0x}\varphi_{1\bar{z}\bar{z}} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{z}\bar{z}}) + 2(\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{1x\bar{y}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}} + \varphi_{0\bar{y}}\varphi_{0x}\varphi_{0x\bar{y}}) + 2(\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{1x\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}} + \varphi_{0\bar{z}}\varphi_{0x}\varphi_{0x\bar{z}}) + \frac{\chi - 1}{2}(\varphi_{0\bar{y}}^2 + \varphi_{0\bar{z}}^2)\varphi_{0xx} = 0$$

$$-(\chi + 1)(\varphi_{3x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0x}\varphi_{3xx}) + \varphi_{3\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{3\bar{z}\bar{z}} = (\chi + 1)((\varphi_{0x}\varphi_{2x} + \frac{1}{2}\varphi_{1x}^2)\varphi_{0xx} + (\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{1x})\varphi_{1xx} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{2xx}) + \frac{(\chi + 1)}{2}(\varphi_{0\bar{y}}^2\varphi_{0\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{0\bar{z}}^2\varphi_{0\bar{z}\bar{z}}) + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{2\bar{y}\bar{y}} + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{2\bar{z}\bar{z}} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1\bar{y}\bar{y}}) + (\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{y}\bar{y}}) + (\chi - 1)(\varphi_{0x}\varphi_{2\bar{z}\bar{z}} + (\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1\bar{z}\bar{z}}) + (\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{1x} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{0\bar{z}\bar{z}}) + 2(\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{2x\bar{y}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{1x\bar{y}} + \varphi_{2\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}} + (\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{1x\bar{y}} + \varphi_{1\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}})\varphi_{0x} + \varphi_{0\bar{y}}\varphi_{0x\bar{y}}\varphi_{1x}) + 2(\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{2x\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{1x\bar{z}} + \varphi_{2\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}} + (\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{1x\bar{z}} + \varphi_{1\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}})\varphi_{0x} + \varphi_{0\bar{z}}\varphi_{0x\bar{z}}\varphi_{1x}) + 2\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{0\bar{z}}\varphi_{0\bar{y}\bar{z}} + (\chi - 1)(\frac{1}{2}(\varphi_{0\bar{y}}^2 + \varphi_{0\bar{z}}^2)\varphi_{1xx} + (\varphi_{0\bar{y}}\varphi_{1\bar{y}} + \varphi_{0\bar{z}}\varphi_{1\bar{z}})\varphi_{0xx}) \quad (1.1.11)$$

Полученные линейные уравнения в частных производных второго порядка (1.1.9), (1.1.10), (1.1.11) и последующие приближения к полному уравнению газовой динамики (1.1.3) можно представить в виде рекуррентно определяемых и интегрируемых систем дифференциальных уравнений:

$$-(\chi + 1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{0\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (1.1.12)$$

$$\begin{aligned}
& -(\chi + 1)(\varphi_{\text{ox}\bar{x}} \varphi_{n\bar{x}} + \varphi_{\text{ox}} \varphi_{n\bar{x}\bar{x}}) + \varphi_{n\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{n\bar{z}\bar{z}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\chi + 1}{2} \varphi_{i\bar{x}\bar{x}} \bar{\varphi}_{n-1-i} + 2\varphi_{i\bar{x}\bar{y}} \varphi_{(n-1-i)\bar{y}} + \right. \\
& + 2\varphi_{i\bar{x}\bar{z}} \varphi_{(n-1-i)\bar{z}} + (\chi - 1)(\varphi_{i\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}}) \varphi_{(n-1-i)\bar{x}} \left. \right] + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\chi + 1}{2} [\varphi_{i\bar{x}\bar{x}} (G_{n-2-i} + D_{n-2-i}) + \\
& + \bar{\varphi}_{(n-2-i)} (\varphi_{i\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}})] + \sum_{i=0}^{n-2} (\chi + 1) \varphi_{(n-1-i)\bar{x}} \varphi_{(i+1)\bar{x}\bar{x}} + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{(n-2-i)\bar{x}} (\phi_i + \psi_i) + \\
& + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi + 1}{2} (\varphi_{i\bar{y}\bar{y}} G_{n-3-i} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}} D_{n-3-i}) + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_{i\bar{y}\bar{y}} D_{n-3-i} + \varphi_{i\bar{z}\bar{z}} G_{n-3-i}) + \\
& + 2 \sum_{i=0}^{n-3} \varphi_{i\bar{y}\bar{z}} R_{n-3-i}. \tag{1.1.13}
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения для функций  $\phi_i, \psi_i, \varphi_i, D_i, R_i, G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), которые выражаются через частные производные потенциала скорости возмущения и используются при определении выражений, содержащихся в правой части рекуррентной системы (1.1.13):

$$\begin{aligned}
\phi_i = \phi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{x}\bar{y}} \varphi_{(m-k)\bar{y}}, \psi_i = \psi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{x}\bar{z}} \varphi_{(m-k)\bar{z}}, \bar{\varphi}_m = \frac{1}{m\varphi_{\text{ox}}} \sum_{k=1}^m (3k - m) \varphi_{k\bar{x}} \bar{\varphi}_{m-k}, \\
D_{n-2-i} = D_m = \frac{1}{m\varphi_{\text{ox}\bar{z}}} \sum_{k=1}^m (3k - m) \varphi_{k\bar{z}} D_{m-k} \\
G_{n-2-i} = G_m = \frac{1}{m\varphi_{\text{oy}}} \sum_{k=1}^m (3k - m) \varphi_{k\bar{y}} G_{m-k}, R_{n-2-i} = R_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{y}} \varphi_{(m-k)\bar{z}}. \tag{1.1.14}
\end{aligned}$$

Применяя соотношения (1.1.14), запишем выражения для функций  $\phi_i, \psi_i, \varphi_i, D_i, R_i, G_i$  при значениях  $m = 1, 2, 3$ :

$$\phi_0 = \varphi_{\text{ox}\bar{y}} \varphi_{\text{oy}}, \phi_1 = \varphi_{\text{ox}\bar{y}} \varphi_{1\bar{y}} + \varphi_{1\bar{x}\bar{y}} \varphi_{\text{oy}}, \phi_2 = \varphi_{\text{ox}\bar{y}} \varphi_{2\bar{y}} + \varphi_{1\bar{x}\bar{y}} \varphi_{1\bar{y}} + \varphi_{2\bar{x}\bar{y}} \varphi_{\text{oy}}, \tag{1.1.15}$$

$$\psi_0 = \varphi_{\text{ox}\bar{z}} \varphi_{\text{oz}}, \psi_1 = \varphi_{\text{ox}\bar{z}} \varphi_{1\bar{z}} + \varphi_{1\bar{x}\bar{z}} \varphi_{\text{oz}}, \psi_2 = \varphi_{\text{ox}\bar{z}} \varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{1\bar{x}\bar{z}} \varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{2\bar{x}\bar{z}} \varphi_{\text{oz}}, \tag{1.1.16}$$

$$\bar{\varphi}_1 = 2\varphi_{1\bar{x}} \varphi_{\text{ox}}, \bar{\varphi}_2 = \varphi_{1\bar{x}}^2 + 2\varphi_{2\bar{x}} \varphi_{\text{ox}}, \bar{\varphi}_3 = 2(\varphi_{1\bar{x}} \varphi_{2\bar{x}} + \varphi_{3\bar{x}} \varphi_{\text{ox}}) \tag{1.1.17}$$

Положим здесь, что

$$\bar{\varphi}_0 = \varphi_{\text{ox}}^2, G_1 = 2\varphi_{1\bar{y}} \varphi_{\text{oy}}, G_2 = \varphi_{1\bar{y}}^2 + 2\varphi_{2\bar{y}} \varphi_{\text{oy}}, G_3 = 2(\varphi_{1\bar{y}} \varphi_{2\bar{y}} + 2\varphi_{3\bar{y}} \varphi_{\text{oy}}) \tag{1.1.18}$$

Также здесь принято, что  $G_0 = \varphi_{\text{oy}}^2$ . Аналогичным образом определяются величины  $D_1, D_2, D_3, D_0, R_0, R_1$  и  $R_2$ .

$$D_1 = 2\varphi_{1\bar{z}} \varphi_{\text{oz}}, D_2 = \varphi_{1\bar{z}}^2 + 2\varphi_{2\bar{z}} \varphi_{\text{oz}}, D_3 = 2(\varphi_{1\bar{z}} \varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{3\bar{z}} \varphi_{\text{oz}}), D_0 = \varphi_{\text{oz}}^2 \tag{1.1.19}$$

$$R_0 = \varphi_{\text{oy}} \varphi_{\text{oz}}, R_1 = \varphi_{\text{oy}} \varphi_{1\bar{z}} + \varphi_{1\bar{y}} \varphi_{\text{oz}}, R_2 = \varphi_{\text{oy}} \varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{1\bar{y}} \varphi_{1\bar{z}} + \varphi_{2\bar{y}} \varphi_{\text{oz}}. \tag{1.1.20}$$



Если в рекуррентной системе (1.1.13) для  $n$  изначально задать значение в виде натуральных  $1, 2, 3, \dots$  и воспользоваться формулами (1.1.14)-(1.1.20), то мы получаем возможность написать уравнения в частных производных второго порядка, решениями которых являются искомые приближения потенциала скорости возмущения.

Пусть, например, будет  $n = 4$ , тогда из (1.1.13) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 & -(\chi + 1)(\varphi_{\text{оxx}} \varphi_{4x} + \varphi_{\text{ox}} \varphi_{4\text{xx}}) + \varphi_{4\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{4\bar{z}\bar{z}} = \frac{\chi + 1}{2}(\varphi_{\text{оxx}} \bar{\varphi}_3 + \varphi_{1\text{xx}} \bar{\varphi}_2 + \varphi_{2\text{xx}} \bar{\varphi}_1 + \varphi_{3\text{xx}} \bar{\varphi}_o) + \\
 & + 2(\varphi_{\text{ox}\bar{y}} \varphi_{3\bar{y}} + \varphi_{1\text{x}\bar{y}} \varphi_{2\bar{y}} + \varphi_{2\text{x}\bar{y}} \varphi_{1\bar{y}} + \varphi_{3\text{x}\bar{y}} \varphi_{o\bar{y}}) + 2(\varphi_{\text{ox}\bar{z}} \varphi_{3\bar{z}} + \varphi_{1\text{x}\bar{z}} \varphi_{2\bar{z}} + \varphi_{2\text{x}\bar{z}} \varphi_{1\bar{z}} + \varphi_{3\text{x}\bar{z}} \varphi_{o\bar{z}}) + \\
 & + (\chi - 1)[(\varphi_{\text{о}\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{\text{o}\bar{z}\bar{z}}) \varphi_{3x} + (\varphi_{1\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{1\bar{z}\bar{z}}) \varphi_{2x} + (\varphi_{2\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{2\bar{z}\bar{z}}) \varphi_{1x} + (\varphi_{3\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{3\bar{z}\bar{z}}) \varphi_{\text{ox}}] + \\
 & + \frac{\chi - 1}{2}(\varphi_{\text{оxx}} (G_2 + D_2) + \varphi_{1\text{xx}} (G_1 + D_1) + \varphi_{2\text{xx}} (G_o + D_o) + \bar{\varphi}_2 (\varphi_{\text{о}\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{\text{o}\bar{z}\bar{z}}) + \bar{\varphi}_1 (\varphi_{1\bar{y}\bar{y}} + \\
 & + \varphi_{1\bar{z}\bar{z}}) + \bar{\varphi}_o (\varphi_{2\bar{y}\bar{y}} + \varphi_{2\bar{z}\bar{z}})) + (\chi + 1)(\varphi_{3x} \varphi_{1\text{xx}} + \varphi_{2x} \varphi_{2\text{xx}} + \varphi_{1x} \varphi_{3\text{xx}}) + 2(\varphi_{2x} (\phi_o + \psi_o) + \\
 & + \varphi_{1x} (\phi_1 + \psi_1) + \varphi_{\text{ox}} (\phi_2 + \psi_2)) + \frac{\chi + 1}{2}(\varphi_{\text{о}\bar{y}\bar{y}} G_1 + \varphi_{\text{o}\bar{z}\bar{z}} D_1 + \varphi_{1\bar{y}\bar{y}} G_o + \varphi_{1\bar{z}\bar{z}} D_o) + \\
 & + \frac{\chi - 1}{2}(\varphi_{\text{о}\bar{y}\bar{y}} D_1 + \varphi_{\text{o}\bar{z}\bar{z}} G_1 + \varphi_{1\bar{y}\bar{y}} D_o + \varphi_{1\bar{z}\bar{z}} G_o) + 2(\varphi_{\text{о}\bar{y}\bar{z}} R_1 + \varphi_{1\bar{y}\bar{z}} R_o)
 \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Принимая во внимание полученные выражения для величин  $\bar{\varphi}_i, D_i, R_i, G_i, \psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), представленные формулами (1.1.14)-(1.1.20) и подставляя их в уравнение (1.1.21), где искомой величиной является потенциал скорости возмущения,  $\varphi_4(x, y, z)$ , можно легко убедиться в полном совпадении уравнений (1.1.13) и (1.1.21). Отметим, что, пользуясь рекуррентной системой дифференциальных уравнений (1.1.13), можно написать  $n$  приближений уравнений газовой динамики, интегрирование которых позволит определить соответствующее приближение потенциала скорости возмущения  $\varphi_n(x, y, z)$ .

Уравнение (1.1.8) для нулевого приближения потенциала скорости возмущения является фундаментальным при изучении течений газа с околосвуковыми скоростями и называется уравнением Кармана. Уравнение (1.1.8) является нелинейным, принцип суперпозиций решений для его решений несправедлив, тем не менее, оно значительно проще полного уравнения (1.1.3), определяющего потенциал скорости  $\varphi(x, y, z)$ .

Характерной чертой теории малых возмущений для трансзвуковых течений газа является то, что моделирующие их приближенные уравнения



остаются нелинейными на плоскости физических переменных. Примером  $\Gamma$  служит нелинейное уравнение Кармана (1.1.8), являющееся основным уравнением для исследования пространственно-трехмерных трансзвуковых течений газа. Уравнение (1.1.8) является дифференциальным уравнением смешанного типа. Оно эллиплично в области, соответствующей дозвуковому течению и гиперболично в области, где течение является сверхзвуковым.

## **1.2. Пространственные трансзвуковые течения газа мейеровского типа в соплах Лаваля**

Первыми исследователями смешанных до- и сверхзвуковых течений в соплах Лаваля были Т. Мейер и Дж. Тейлор. Разлагая потенциал скоростей в ряд по степеням переменных декартовой системы координат, Т. Мейер построил поток с дозвуковым полем скоростей до горла канала и сверхзвуковым – за ним [176]. Дж. Тейлор тем же способом получил семейство решений уравнений газовой динамики, описывающее течения, поле скоростей которых является в целом дозвуковым, но содержит местные сверхзвуковые зоны у стенок канала, в окрестности его минимального сечения. Течения Т.Мейера реализуется тогда, когда разность давлений на входе и выходе сопла достаточно велика. Если же эта разность ниже некоторого предела, то имеют место течения, изученные Дж. Тейлором. Первая попытка исследования перехода от одного типа течений в другой принадлежит Ф.И. Франклю и Г.Гертлеру [103].

В работах О.С. Рыжова [89, 90] рассматривались пространственные осесимметричные и плоскопараллельные течения типов Мейера и Тейлора, а также переход от одного типа к другому на физической плоскости.

В нашей работе будем рассматривать пространственно-трехмерные течения газа в декартовой системе координат в окрестности минимального поперечного сечения сопла, где осуществляется переход потока через звуковую поверхность от дозвуковой скорости к сверхзвуковой.



Рассмотрим уравнение Кармана [170], являющееся основным исследованием пространственных потенциальных околосзвуковых течений газа:

$$-(\chi + 1)\varphi_{ox} \varphi_{oxx} + \varphi_{oy\tilde{y}} + \varphi_{oz\tilde{z}} = 0.$$

Преобразуем для удобства переменные  $\tilde{y}$  и  $\tilde{z}$ , применяя следующие формулы растяжения:

$$\bar{y} = \sqrt{\alpha + 1}\tilde{y}, \bar{z} = \sqrt{\alpha + 1}\tilde{z}.$$

Тогда уравнение Кармана приводится к следующему виду:

$$\varphi_{ox} \varphi_{oxx} - \varphi_{oyy} - \varphi_{ozz} = 0. \quad (1.2.1)$$

Здесь знак  $\sim$  над переменными  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  отброшен.

Аналогичным образом, применяя преобразование растяжения к переменным  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ , сокращая обе части рекуррентной системы второго порядка на  $-(\chi + 1)$  и отбрасывая "тильды" над переменными  $\tilde{y}$  и  $\tilde{z}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{oxx} \varphi_{nx} + \varphi_{ox} \varphi_{nxx} - \varphi_{nyy} - \varphi_{nzz} = & - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} \varphi_{ixx} \bar{\varphi}_{n-1-i} + 2\varphi_{ixy} \varphi_{(n-1-i)y} + 2\varphi_{ixz} \varphi_{(n-1-i)z} + \right. \\ & \left. + (\chi - 1)(\varphi_{iyy} + \varphi_{izz}) \varphi_{(n-1-i)x} \right] - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\chi - 1}{2} [\varphi_{ixx} (G_{n-2-i} + D_{n-2-i}) + \bar{\varphi}_{n-2-i} (\varphi_{iyy} + \varphi_{izz})] - \\ & - \sum_{i=0}^{n-2} [\varphi_{(n-1-i)x} \varphi_{(i+1)xx} + 2\varphi_{(n-1-i)x} (\phi_i + \psi_i)] - \sum_{i=0}^{n-3} \frac{(\chi + 1)^2}{2} (\varphi_{iyy} G_{n-3-i} + \varphi_{izz} D_{n-3-i}) - \\ & - \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi^2 - 1}{2} (\varphi_{iyy} D_{n-3-i} + \varphi_{izz} G_{n-3-i}) - 2 \sum_{i=0}^{n-3} (\chi + 1) \varphi_{iyz} R_{n-3-i}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_i = \phi_m = \sum_{k=0}^m (\chi + 1) \varphi_{kxy} \varphi_{(m-k)y}, \psi_i = \psi_m = (\chi + 1) \sum_{k=0}^m \varphi_{kxz} \varphi_{(m-k)z}, \\ \bar{\varphi}_m = \frac{1}{m\varphi_{ox}} \sum_{k=1}^m (3k - m) \varphi_{kx} \bar{\varphi}_{m-k}, \bar{\varphi}_0 = \varphi_{ox}^2, G_{n-2-i} = G_m = \frac{1}{m\varphi_{oy}} \sum_{k=1}^m (3k - m) \varphi_{ky} G_{m-k}, \\ G_0 = (\chi + 1) \varphi_{oy}^2, D_{n-2-i} = D_m = \frac{1}{m\varphi_{oz}} \sum_{k=1}^m (3k - m) \varphi_{kz} D_{m-k}, \\ D_0 = (\chi + 1) \varphi_{oz}^2, R_{n-3-i} = R_m = (\chi + 1) \sum_{k=0}^m \varphi_{ky} \varphi_{(m-k)z}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Решение уравнения Кармана (1.2.1) будем искать в следующем виде:

$$\varphi_0(x, y, z) = f(\tilde{u}) + dx^2 + my^4 + nz^4, \quad (1.2.4)$$



где  $\tilde{u} = ax + by^2 + cz^2$ . Здесь  $a, b, c, d, m, n$  - произвольные постоянные,  $f(\tilde{u})$  - неизвестная искомая функция, а  $\tilde{u}$  - новая переменная, выражающаяся через переменные  $x, y, z$ .

Далее, находя соответствующие частные производные от нулевого приближения потенциала скорости возмущения  $\varphi_0(x, y, z)$  по переменным  $x, y, z$  и подставляя их в уравнение (1.2.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно искомой функции  $f(\tilde{u})$ :

$$a^3 f'(\tilde{u}) f''(\tilde{u}) + 2[ad - (b + c)] f'(\tilde{u}) + [2a^2 dx - 4(b^2 y^2 + c^2 z^2)] f''(\tilde{u}) + 4d^2 x - 12(my^2 + nz^2) = 0 \quad (1.2.5)$$

Будем считать здесь, что имеет место связь между постоянными величинами  $a, b, c, d, m, n$  такая, что  $a = d^2$ ,  $b = c = -d^3 / 2$  и  $m = n = d^3 / 6$ .

В этом случае дифференциальное уравнение (1.2.5) примет следующий вид:

$$d^6 f'(\tilde{u}) f''(\tilde{u}) + 4d^3 f'(\tilde{u}) + 2d^3 \tilde{u} f''(\tilde{u}) + 4\tilde{u} = 0. \quad (1.2.6)$$

Отметим, что полученное уравнение (1.2.6) является уравнением в полных дифференциалах.

После однократного интегрирования соотношение (1.2.6) приводится к следующему виду:

$$f'^2(\tilde{u}) + \frac{4}{d^3} \tilde{u} f'(\tilde{u}) + \frac{4}{d^3} f(\tilde{u}) + \frac{4}{d^6} \tilde{u}^2 = c_0, \quad (1.2.7)$$

где  $c_0$  - постоянная интегрирования.

Для интегрирования полученного уравнения введем новую искомую функцию  $R(\tilde{u})$  такую, что

$$f(\tilde{u}) = \tilde{u}^2 R(\tilde{u}). \quad (1.2.8)$$

После подстановки соотношения (1.2.8) в (1.2.7) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно новой неизвестной функции  $R(\tilde{u})$ :

$$\left[ (2R + \tilde{u} R'(\tilde{u})) + \frac{2}{d^3} \right]^2 = \frac{c_0}{\tilde{u}^2} - \frac{4R}{d^3}. \quad (1.2.9)$$



Теперь правую часть последнего уравнения обозначим через  $\tilde{v}$  и неизвестную функцию  $v^2(\tilde{u})$ :

$$v^2(\tilde{u}) = \frac{c_o}{\tilde{u}^2} - \frac{4R(\tilde{u})}{d^3}. \quad (1.2.10)$$

Тогда относительно  $v(\tilde{u})$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\tilde{u} v v' + v^2 + \frac{2}{d^3} v - \frac{4}{d^6} = 0. \quad (1.2.11)$$

Введем далее новую искомую функцию  $\eta(\tilde{u})$ , определяемую так:

$$\tilde{u} v(\tilde{u}) = -\eta(\tilde{u}). \quad (1.2.12)$$

В результате подстановки (1.2.12) в (1.2.11) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $\eta(\tilde{u})$ :

$$\eta(\tilde{u})\eta'(\tilde{u}) - \frac{2}{d^3}\eta(\tilde{u}) - \frac{4}{d^6}\tilde{u} = 0. \quad (1.2.13)$$

Введем далее неизвестную функцию  $\tau(\tilde{u})$  по формуле

$$\eta(\tilde{u}) = \tilde{u} \tau(\tilde{u}), \quad (1.2.14)$$

тогда относительно искомой функции  $\tau(\tilde{u})$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\tau(\tilde{u}) + \tilde{u} \tau'(\tilde{u}) = \frac{4}{d^6 \tau} + \frac{2}{d^3}. \quad (1.2.15)$$

Общий интеграл полученного дифференциального уравнения представляется в неявном виде:

$$\left( \tau - \frac{1 + \sqrt{5}}{d^3} \right)^{\sqrt{5}+1} \left( \tau - \frac{1 - \sqrt{5}}{d^3} \right)^{\sqrt{5}-1} = \left( \frac{\tilde{c}}{\tilde{u}} \right)^{2\sqrt{5}}, \quad (1.2.16)$$

где  $\tilde{c}$  - постоянная интегрирования.

Рассмотрим частный случай. Пусть  $\tilde{c}_o = 0$ . Тогда из общего решения (1.2.16) уравнения (1.2.15) получаем:

$$\tau_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{d^3}, \tau_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{d^3}. \quad (1.2.17)$$



Далее, согласно преобразованиям (1.2.14), (1.2.12), (1.2.10) и (1.2.9) переходим к прежним функциям и определяем решение обыкновенного дифференциального уравнения (1.2.6):

$$f(\tilde{u}) = \frac{d^3 c_0}{4} - \frac{6+2\sqrt{5}}{4d^3} \tilde{u}^2. \quad (1.2.18)$$

Теперь, подставляя полученное выражение (1.2.18) в начальный вид искомого потенциала скорости возмущения (1.2.4), определяем решение уравнения Кармана (1.2.1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) = & -\frac{(1+\sqrt{5})}{2} dx^2 + \frac{(3+\sqrt{5})}{2} xd^2(y^2 + z^2) - \\ & -\frac{(5+3\sqrt{5})}{24} d^3(y^4 + z^4) - \frac{(3+\sqrt{5})}{4} d^3 y^2 z^2 + \frac{c_0 d^3}{4}, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

здесь  $d, c_0$  - постоянные.

Если направление движения газового потока совпадает с положительным направлением оси абсцисс, то принимаем, что  $d = -d_1$ , где  $d_1 = const > 0$ .

Нулевое приближение потенциала скорости возмущения  $\varphi_0(x, y, z)$ , являющееся главным членом асимптотического ряда, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) = & \frac{(1+\sqrt{5})}{3^2} d_1 x^2 + \frac{(3+\sqrt{5})}{2} x d_1^2 (y^2 + z^2) + \\ & + \frac{(5+3\sqrt{5})}{24} d_1^3 (y^4 + z^4) + \frac{(3+\sqrt{5})}{4} d_1^3 y^2 z^2 - \frac{c_0 d_1^3}{4}, \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Полученным решением описываются пространственные потенциальные течения газа в сопле Лавалья.

Пусть в начальных данных Коши имеет место линейное распределение скорости вдоль оси симметрии канала, т.е.  $\varphi = d_1 x$ . Этому случаю соответствует основное решение уравнения Кармана (1.2.20), описывающее поток с аналитическим полем скоростей в окрестности центра сопла. С помощью формулы (1.2.20) находим составляющие вектора скорости  $u, v, w$ :

$$u = (1+\sqrt{5})d_1 x + \frac{3+\sqrt{5}}{2} d_1^2 (y^2 + z^2), \quad (1.2.21)$$



$$v = (3 + \sqrt{5})d_1^2 yx + \frac{(5 + 3\sqrt{5})}{6}d_1^3 y^3 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}d_1^3 yz^2,$$

$$w = (3 + \sqrt{5})d_1^2 zx + \frac{(5 + 3\sqrt{5})}{6}d_1^3 z^3 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}d_1^3 zy^2.$$

Для выяснения полной картины течения в окрестности центра сопла рассмотрим уравнения особых характеристик  $c_{\mp}^0$  и уравнение поверхности перехода потока через скорость звука.

Известно, что уравнение звуковой поверхности определяется из условия

$$\frac{\partial \varphi_0(x, y, z)}{\partial x} = u = 0.$$

Приравнявая к нулю горизонтальную составляющую скорости, определяем уравнение звуковой поверхности:

$$x = -\frac{(3 + \sqrt{5})}{2(1 + \sqrt{5})}d_1(y^2 + z^2). \quad (1.2.22)$$

Из формулы (1.2.22) видно, что поверхность перехода через скорость звука (параболоид вращения), как и в плоских соплах, выпукла в сторону сверхзвуковых скоростей.

Рассмотрим уравнение характеристических поверхностей для стационарных течений:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial \varphi_0(x, y, z)}{\partial x}, \quad (1.2.23)$$

где выражение в правой части зависит от решения  $\varphi_0(x, y, z)$ . Отсюда следует, что уравнение (1.2.23) имеет гиперболический тип для случая  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} > 0$ , который соответствует сверхзвуковым потокам газа; если же выполняется условие  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} < 0$ , то тип уравнения будет эллиптическим, а режим течения газа будет дозвуковым, что вполне согласуется с общей теорией установившихся течений.

Согласно (1.2.23), составим уравнение характеристик:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = (1 + \sqrt{5})d_1 x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}d_1^2(y^2 + z^2). \quad (1.2.24)$$



Для интегрирования данного нелинейного уравнения в частных производных первого порядка введем новую переменную  $\xi$  :

$$\xi = y^2 + z^2. \quad (1.2.25)$$

Тогда искомая функция  $x(y, z)$  будет зависеть только от одной переменной  $\xi$ , т.е.

$$x(y, z) = x(\xi). \quad (1.2.26)$$

Далее, учитывая (1.2.25) и (1.2.26), рассматриваемое уравнение (1.2.24) приведем к следующему виду:

$$\left[ 4 \left( \frac{dx}{d\xi} \right)^2 - \frac{(3 + \sqrt{5})}{2} d_1^2 \right] \xi = (1 + \sqrt{5}) d_1 x. \quad (1.2.27)$$

Отметим, что проходящие через центр канала характеристики являются частными решениями уравнения (1.2.27) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + \sqrt{5} - \sqrt{10(3 + \sqrt{5})}}{8} d_1 (y^2 + z^2) && (c_-^o - \text{характеристика}), \\ x &= \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{10(3 + \sqrt{5})}}{8} d_1 (y^2 + z^2) && (c_+^o - \text{характеристика}) \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Уравнение поверхности, на которой исчезает составляющая скорости  $v$ , будет иметь вид

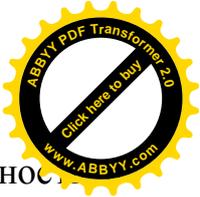
$$x = -d_1 \left( \frac{1}{2} z^2 + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{6(3 + \sqrt{5})} y^2 \right). \quad (1.2.29)$$

Аналогичным образом, составляющая скорости  $w$  "исчезает" на поверхности, уравнением которой является

$$x = -d_1 \left( \frac{1}{2} y^2 + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{6(3 + \sqrt{5})} z^2 \right). \quad (1.2.30)$$

Из соотношений (1.2.29) и (1.2.30) видно, что поверхности  $v = 0$  и  $w = 0$  являются выпуклыми в сторону сверхзвуковых скоростей.

В формуле (1.2.28) через  $c_-^o$  обозначены характеристические поверхности, касающиеся в центре сопла звуковой поверхности и целиком простирающиеся вверх по потоку, а через  $c_+^o$  - характеристические поверхности, также касающиеся в центре сопла звуковой поверхности, но простирающиеся вниз по



течению. Как показывают формулы (1.2.22), (1.2.28), звуковая поверхность  $c_+^0$ -характеристики являются параболоидами вращения. Составляющие вектора скорости потока  $\vartheta, w$  обращаются в нуль на поверхностях эллиптического параболоида, определяемого уравнениями (1.2.29) и (1.2.30), который является выпуклым в сторону сверхзвуковых скоростей, т.е. выхлопной части сопла Лавала.

Теперь остановимся на вопросе деформации линий тока околозвуковых течений. За основное движение газа принимаем равномерный поток, имеющий критическую скорость  $a_*$  и направленный вдоль оси  $Ox$ . В таком потоке линиями тока служат прямые  $y = y_0, z = z_0$ .

Обозначим через  $\Delta y$  и  $\Delta z$  отклонения линий тока от указанных прямых, которые определяются уравнениями

$$\frac{d\Delta y}{dx} = \frac{v}{u}, \frac{d\Delta z}{dx} = \frac{w}{u}.$$

Положим, что

$$y_1 = \frac{\Delta y}{y_0}, z_1 = \frac{\Delta z}{z_0}.$$

Разлагая в вышеуказанных соотношениях правые части в ряды и удерживая в них только главные члены, получаем:

$$\frac{dy_1}{dx} = \epsilon \frac{\partial \varphi_0(x, y_0, z_0)}{\partial y}, \frac{dz_1}{dx} = \epsilon \frac{\partial \varphi_0(x, y_0, z_0)}{\partial z}. \quad (1.2.31)$$

Равенства (1.2.31) показывают, что отклонение поверхности обтекаемого тела, например, стенок сопла Лавала, от цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси  $Ox$ , пропорционально первой степени  $\epsilon$ .

В соответствии с формулами (1.2.31), (1.2.21) определяем отклонения  $y_1$  и  $z_1$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= \epsilon \left[ \frac{(3 + \sqrt{5})}{2} d_1^2 y_0 x^2 + \left( \frac{5 + 3\sqrt{5}}{6} d_1^3 y_0^3 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} d_1^3 y_0 z_0^2 \right) x \right], \\ z_1 &= \epsilon \left[ \frac{(3 + \sqrt{5})}{2} d_1^2 z_0 x^2 + \left( \frac{5 + 3\sqrt{5}}{6} d_1^3 z_0^3 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} d_1^3 z_0 y_0^2 \right) x \right]. \end{aligned} \quad (1.2.32)$$



Отсюда видно, что отклонение поверхности обтекаемого тела цилиндрической поверхности является функцией, имеющей квадратичную зависимость от  $x$ .

Поперечное сечение стенки сопла с плоскостью  $x = c$ , ортогональной оси симметрии  $Ox$ , является кругом радиуса  $R = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Итак, точным решением нелинейного уравнения Кармана, найденным в виде (1.2.20), описываются околосвуковые пространственные течения газа мейеровского типа в окрестности горловины кругового сопла с аналитическим полем скоростей.

Рассмотрим теперь развитие сверхзвуковых зон, образующихся у стенок сопла Лаваля. Для этого общее решение уравнения (16) приведем к следующему виду:

$$\left( \sqrt{c_o - \frac{4}{d^3} f(\tilde{u}) + \frac{1+\sqrt{5}}{d^3} \tilde{u}} \right)^{\sqrt{5}+1} \left( \sqrt{c_o - \frac{4}{d^3} f(\tilde{u}) + \frac{1-\sqrt{5}}{d^3} \tilde{u}} \right)^{\sqrt{5}-1} = \tilde{c}^{2\sqrt{5}}. \quad (1.2.33)$$

Если положить, что  $d = -d_1 > 0$ , то из последнего выражения получаем упрощенный вид общего решения уравнения (1.2.6), представленный в неявном виде:

$$\left( \frac{2}{d_1} \sqrt{\frac{f(\tilde{u})}{d_1} - \frac{1+\sqrt{5}}{d_1^3} \tilde{u}} \right)^{\sqrt{5}+1} \left( \frac{2}{d_1} \sqrt{\frac{f(\tilde{u})}{d_1} - \frac{1-\sqrt{5}}{d_1^3} \tilde{u}} \right)^{\sqrt{5}-1} = \tilde{c}^{2\sqrt{5}}. \quad (1.2.34)$$

Отметим, что решениями, определяемыми из (1.2.33), (1.2.34) при  $\tilde{c} = 0$  и имеющими вид

$$f_{1,2}(\tilde{u}) = \frac{c_o d^3}{4} - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \tilde{u}^2, \quad (1.2.35)$$

описываются движения газа со сверхзвуковым полем скоростей за критическим сечением сопла. Рассматриваемые решения (1.2.33), (1.2.34), (1.2.35) можно применить для описания стационарных течений газа, сменяющихся последовательно по мере увеличения разности давлений на входе и выходе сопла. При этом размеры сверхзвуковой зоны, зарождающейся первоначально на стенках канала вблизи критического сечения, постепенно увеличиваются. Когда разность давлений на входе и в выхлопной части становится достаточно



большой, местная сверхзвуковая зона достигает оси сопла и сливается с сверхзвуковой зоной, идущей от противоположной стенки. При дальнейшем увеличении разности давлений в окрестности критического сечения образуется единственная поверхность перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым, течение газа вблизи нее описывается формулами (1.2.22), (1.2.20), (1.2.21), (1.2.28).

Следует отметить, что если для сопла имеет место непрерывное течение с областями местных сверхзвуковых скоростей, то при малом изменении его формы и, вероятно, расхода, должен появиться скачок уплотнения.

В работе А.А. Никольского и Г.И. Таганова [78] было впервые установлено, что небольшое изменение обтекаемого контура (точнее, появление на нем прямолинейных участков в области местных сверхзвуковых скоростей) ведет к разрушению строгой потенциальности характера течения, т.е. к необходимости образования скачка уплотнения.

Исследование возникновения ударных фронтов в местных сверхзвуковых зонах были продолжены Ф.И. Франклем, А. Буземанном и К.Г. Гудерлеем. Выводы, сделанные ими, сводятся к тому, что задача о нахождении непрерывного обтекания произвольно заданного контура с заданным на бесконечности дозвуковым потоком не имеет, вообще говоря, решения, если образуются зоны местных сверхзвуковых скоростей.

Стенки сопла сохраняют приближенно постоянную форму, несмотря на изменение режима потока. Полученные решения могут быть использованы при изучении вопроса о переходе от течений типа Тейлора к течениям типа Мейера через данное сопло Лаваля в случае исследования пространственных течений в декартовой системе координат.

Учитывая выражение (1.2.20), определяющее нулевое приближение потенциала скорости возмущения трехмерного стационарно-потенциального течения мейеровского типа в сопле Лаваля, и разрешая его относительно переменной  $x$ , получаем:



$$x_{1,2} = \frac{-(3 + \sqrt{5})d_1^2 \pm 2\sqrt{D}}{2(1 + \sqrt{5})d_1}, \quad (1.2.36)$$

где

$$D = \left\{ \left[ \frac{(3 + \sqrt{5})d_1^2}{2} (y^2 + z^2) \right]^2 - (1 + \sqrt{5})d_1 \left[ \frac{(5 + 3\sqrt{5})}{12} d_1^3 (y^4 + z^4) + \frac{(3 + \sqrt{5})}{2} d_1^3 y^2 z^2 - \frac{c_0 d_1^3}{2} - 2\bar{c} \right] \right\}.$$

Согласно полученным формулам (1.2.36), на ЭВМ при помощи системы MathCAD можно построить эквипотенциальные поверхности.

### 1.3. Течения газа с плоской звуковой поверхностью

Рассмотрим движение газа в предположении, что у него имеются две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии:  $y = 0$  и  $z = 0$ .

Будем полагать, что газ является идеальным. Для изучения пространственно-трехмерных околосвуковых течений в декартовой системе координат является основным уравнение Кармана.

В пространственных течениях газа аналитические условия

$$u = a_*, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = y = z = 0 \quad (1.3.1)$$

или же условия относительно потенциала скорости

$$\varphi(x, y, z) = a_* x, \quad u(x, y, z) = a_* \quad \text{при} \quad y = z = 0 \quad (1.3.2)$$

не приводят к тому, что проходящая через центр поверхность перехода становится плоскостью. Если имеется дополнительное требование о всестороннем сжатии или расширении потока в окрестности плоскости  $x = 0$ , расположенной по любую ее сторону, то равенства

$$u(0, y, z) = a_*, \quad \vartheta(0, y, z) = w(0, y, z) = 0, \quad \frac{\partial u(0, y, z)}{\partial x} = 0 \quad (1.3.3)$$

служат следствием условий.

Пусть дано течение идеального газа, в котором скорость достигает скорости звука вдоль плоскости  $x = 0$ , причем направление вектора скорости перпендикулярно этой плоскости в каждой ее точке. В таком случае имеем, что



$$u(0, y, z) = 1, \quad \vartheta(0, y, z) = 0, \quad w(0, y, z) = 0, \quad a_* = 1. \quad (1.3.4)$$

Из условия отсутствия вихрей в потоке следует, что

$$\frac{\partial \vartheta(0, y, z)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w(0, y, z)}{\partial x} = 0. \quad (1.3.5)$$

Уравнение неразрывности для стационарных течений в более упрощенном виде можно написать так:

$$a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = \varphi_x \frac{\partial v^2}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial v^2}{\partial y} + \varphi_z \frac{\partial v^2}{\partial z}, \quad (1.3.6)$$

где квадрат модуля вектора скорости определяется формулой  $v^2 = u^2 + \vartheta^2 + w^2$ . Положим далее в интеграле Бернулли величину критической скорости  $a_*$ , равной единице. Тогда уравнение (1.3.6) преобразуется к виду

$$[(\chi + 1) - (\chi - 1)v^2](\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = \varphi_x \frac{\partial v^2}{\partial x} + \varphi_y \frac{\partial v^2}{\partial y} + \varphi_z \frac{\partial v^2}{\partial z}. \quad (1.3.7)$$

Используя соотношения (1.3.5) и дифференцируя (1.3.6) по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial u(0, y, z)}{\partial x} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \varphi(0, y, z)}{\partial x^2} = 0.$$

Из условия безвихренности потока следует, что

$$\frac{\partial^2 \vartheta(0, y, z)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, y, z)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi(0, y, z)}{\partial x^2} = 0.$$

Условия, налагаемые на потенциал скорости, имеют вид

$$\frac{\partial^3 \varphi(0, y, z)}{\partial y \partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varphi(0, y, z)}{\partial z \partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_0(0, y, z)}{\partial x^2} = 0. \quad (1.3.8)$$

Таким образом, условия, достаточные для того, чтобы звуковой поверхностью служила плоскость  $x = 0$ , оказываются и необходимыми условиями. В рассматриваемом случае вдоль плоскости  $x = 0$  скорость течения по величине равна скорости звука, а поперечные составляющие скорости исчезают, согласно условиям (1.3.4). Кроме этого, при  $x = 0$  обращаются в нуль частные производные  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x^2}$ .

Задача Коши для уравнения (1.3.7) и теорема о течениях газа с плоской звуковой поверхностью перехода через скорость звука была сформулирована Л.В.Овсянниковым.



Рассмотрим пространственное околосзвуковое течение с плоской звуковой поверхностью перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым в окрестности горловины сопла с изломом стенки. Будем искать решение уравнения Кармана (1.2.1) и уравнения (1.1.3), удовлетворяющие условиям (1.3.2), (1.3.4), (1.3.8), (1.3.7) в следующем виде:

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 f(y, z). \quad (1.3.9)$$

Подставляя предполагаемый вид нулевого приближения потенциала скорости возмущения (1.3.9) в уравнение Кармана (1.2.1), относительно неизвестной функции получаем следующее нелинейное уравнение в частных производных второго порядка:

$$f_{yy} + f_{zz} = 6f^2. \quad (1.3.10)$$

Введем далее новую неизвестную функцию

$$f(y, z) = f_1(\xi), \quad (1.3.11)$$

где  $\xi = ay + bz$ ,  $a, b$  - произвольные постоянные.

Подставляя (1.3.11) в (1.3.10), относительно функции  $f_1(\xi)$  получаем следующее:

$$f_1''(\xi) = \frac{6}{a^2 + b^2} f_1^2(\xi). \quad (1.3.12)$$

Пусть  $a^2 + b^2 = 1$ , тогда имеем:

$$f_1''(\xi) = 6f_1^2(\xi). \quad (1.3.13)$$

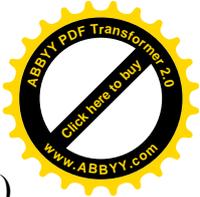
Решением полученного уравнения является двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса, т.е.

$$f_1(\xi) = \wp(\xi, g_2, g_3), \quad (1.3.14)$$

где  $g_2, g_3$  - инварианты эллиптической функции Вейерштрасса. В случае уравнения (1.3.13) инвариант  $g_2 = 0$ , откуда следует, что решением уравнения (1.3.13) служит функция

$$f_1(\xi) = \wp(\xi, 0, g_3). \quad (1.3.14, б)$$

Учитывая формулы (1.3.14, б), (1.3.11) и (1.3.9), определяем точное решение уравнения Кармана:



$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 \wp(ay + \sqrt{1-a^2} z, 0, g_3). \quad (1.3.15)$$

Принимая во внимание формулу сложения для эллиптических функций Вейерштрасса, потенциал скорости нулевого приближения, являющийся основным при исследовании околосвуковых течений газа с плоской звуковой поверхностью перехода в сопле с изломом стенки, можем представить в следующем виде:

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{x^3}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp'(ay) - \wp'(\sqrt{1-a^2} z)}{\wp(ay) - \wp(\sqrt{1-a^2} z)} \right]^2 - \wp(ay) - \wp(\sqrt{1-a^2} z) \right\}.$$

Функция Вейерштрасса принимает вещественные значения при вещественных и при чисто мнимых значениях своего аргумента и имеет особенности в виде нулей и полюсов второго порядка.

Уравнение (1.3.13) имеет эллиптический тип во всей плоскости  $y, z$ , при помощи него могут быть выявлены основные особенности задачи о построении пространственных течений с плоской поверхностью.

Будем искать решение приближенного уравнения Кармана для потенциала возмущений в виде

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{18} x^3 f(y, z). \quad (1.3.16)$$

Подставляя написанную формулу в уравнение, имеем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f^2. \quad (1.3.17)$$

С теорией этого уравнения можно подробно ознакомиться в работах Дж.Б. Келлера [169], Р.Оссермана [172] и С.И. Похожаева [84]. Основной вывод этих авторов сводится к тому, что уравнения (1.3.17), (1.3.13) не могут иметь целых решений, т.е. решений, регулярных во всей плоскости  $y, z$ . Отсюда следует, что в любой ограниченной области существуют такие решения уравнений (1.3.17), (1.3.13), значения которых стремятся к бесконечности при приближении аргумента к любой точке на границе выбранной области. Это следствие представляет большой интерес для газодинамических задач.



Известно, что эллиптическая функция Вейерштрасса удовлетворяет уравнению  $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ . Найденное нами решение вида (1.3.14) также удовлетворяет уравнению  $\wp'^2(\xi) = 4\wp^3(\xi) - g_3$ . Решение уравнения (1.3.17) будем искать в форме

$$f(y, z) = \bar{f}(\xi), \tag{1.3.18}$$

где  $\xi = ay + bz$ ,  $a, b - const$ .

Далее имеем, что 
$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{f}^2.$$

Полагая  $a^2 + b^2 = 1$ , получаем, что

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \xi^2} = \bar{f}^2. \tag{1.3.19}$$

Умножая уравнение (1.3.19) на  $2\frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi}$  и интегрируя далее полученное выражение, получаем:

$$\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{2}{3} \bar{f}^3 - a_1, \tag{1.3.20}$$

где  $a_1$  - произвольная постоянная. Отсюда следует, что искомая функция  $\bar{f}(\xi)$  может быть выражена через двоякопериодическую эллиптическую функцию Вейерштрасса  $\wp(\bar{u}, g_2, g_3)$ .

Введем теперь в рассмотрение нормированную функцию  $\wp(\xi) = \wp(0, 4, \xi)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{d\wp}{d\xi}\right)^2 = 4\wp^3 - 4, \tag{1.3.21}$$

а также условию  $\wp(0) = 1$ .

Сравнивая формулы (1.3.20) и (1.3.21), находим

$$\bar{f}(\xi) = 6N^2\wp[N\xi - c] \quad (a_1 = 144N^6), \tag{1.3.22}$$

где  $c$  - произвольная постоянная.

Первое исследование перехода течения через плоскую звуковую поверхность принадлежит крупному советскому и российскому математику и механику, академику С.А. Христиановичу и его сотрудникам. Наиболее полные



и глубокие исследования течений с прямой звуковой линией даны в работах Л.В.Овсянникова [79, 80], О.С. Рыжова [89, 90]. Метод годографа для решения рассматриваемой задачи был применен Ф.Э. Элерсом [166] и В.А.Скрипкиным [96]. Плоскопараллельные осесимметричные течения газа в сопле указанного вида исследовались на плоскости годографа кыргызскими учеными Ж.Мамбеткуловым и У.М.Туганбаевым и т. д.

В этой работе, следуя работам Л.В. Овсянникова и О.М. Рыжова, будем устанавливать различные типы пространственных течений в сопле с плоской звуковой поверхностью с изломом стенки, в зависимости от распределения особенностей функции

$$\bar{f}(\xi) = \wp(\xi) = 6N^2 \wp \left[ N(ay + \sqrt{1-a^2}z) - c \right]. \quad (1.3.23)$$

**Тип А:** течение, в котором функция Вейерштрасса (1.3.23) не имеет особых плоскостей. Течение такого типа осуществляется только в том случае, если выполняется условие  $\wp \left[ N(ay + \sqrt{1-a^2}z) - c \right] = 0$ , где мы будем иметь дело с равномерным звуковым потоком.

**Тип В:** сверхзвуковое течение с одной особой плоскостью, которое соответствует случаю вырождения функции

$$\bar{f}(\xi) = \frac{6}{\left( (ay + \sqrt{1-a^2}z) - c \right)^2}.$$

На физической плоскости получаем течение расширения Прандтля-Мейера около двугранного угла, которое дается формулами:

$$\begin{aligned} u &= \left( \frac{x}{(ay + \sqrt{1-a^2}z) - c} \right)^2, & g &= -\frac{2a}{3} \left( \frac{x}{(ay + \sqrt{1-a^2}z) - c} \right)^3, \\ w &= -\frac{2\sqrt{1-a^2}}{3} \left( \frac{x}{(ay + \sqrt{1-a^2}z) - c} \right)^3. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Уравнения характеристических  $C_{\pm}^0$ -поверхностей имеют, соответственно, вид

$$x = \bar{c}(ay + \sqrt{1-a^2}z) \quad (c_+^0\text{-характеристика}),$$

$$x = \frac{\bar{c}}{ay + \sqrt{1-a^2}z} \quad (c_-^0\text{-характеристика}),$$



где  $\bar{c}$  - постоянная интегрирования.

**Тип С:** дозвуковое течение, которое соответствует чисто мнимым значениям  $N$ , нулям функции  $\bar{f}(\xi)$ , расположенным в плоскостях

$$ay_0 + \sqrt{1-a^2} z_0 = c \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\omega}{|N|}, \quad (1.3.25)$$

где  $\omega_0$  - половина вещественного периода дwoякопериодической функции  $\wp(ay + \sqrt{1-a^2} z)$ . Здесь для  $\omega$  справедливо выражение  $\omega = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{d\wp}{\sqrt{\wp^3 - 1}}$ .

**Тип D:** смешанное течение с особым замкнутым контуром. Оно также соответствует чисто мнимым значениям  $N$  и содержит внутри себя течение типа С. Течение типа D ограничено значениями  $\xi_*' = c \pm \sqrt{3} \frac{\omega}{|N|}$ , при которых функция  $\bar{f}(\bar{u})$  имеет полюсы второго порядка.

Наличие полюсов у  $f(\xi) = \wp(\xi) = 6N^2 \wp[N(ay + \sqrt{1-a^2} z) - c]$  позволяет ввести в рассматриваемые смешанные течения с изломами образующих.

**Тип E:** сверхзвуковое течение с замкнутым особым контуром, которое соответствует вещественным значениям  $N$  в формуле  $f(\xi) = \wp(\xi) = 6N^2 \wp[N(ay + \sqrt{1-a^2} z) - c]$ .

Особая линия (контур) в потоке определяется полюсами второго порядка функции  $\wp(\xi)$  и имеет координаты

$$\xi_*'' = c + \frac{\omega}{N}. \quad (1.3.26)$$

Окрестности полюсов функции  $\wp(\xi)$  соответствуют потоку вблизи угловых точек контура на физической плоскости, такой поток близок к течению Прандтля-Мейера (1.3.24).

Полученные свойства функции  $\wp(\xi)$  позволяют получить полное представление о характере течения в соплах вблизи плоской поверхности, на которой скорость достигает своей критической величины. Ограничиваясь, как и прежде, соплами с осью симметрии, рассмотрим далее течения типов С и E. В



дозвуковом течении типа С величины составляющих вектора скорости  $u_0, v_0, w_0$

представляются равенствами

$$u_0 = -N_1^2 x^2 \wp \left[ iN_1 (ay + \sqrt{1-a^2} z) \right], \quad N_1 > 0,$$

$$g_0 = \frac{2}{3} N_1^3 ax^3 \sqrt{1 - \wp^3 (iN_1 (ay + \sqrt{1-a^2} z))},$$

$$w_0 = \frac{2}{3} N_1^3 \sqrt{1-a^2} x^3 \sqrt{1 - \wp^3 (iN_1 (ay + \sqrt{1-a^2} z))}.$$

Формулой  $x^2 \wp \left[ iN_1 (ay + \sqrt{1-a^2} z) \right] = const$  определяется поверхность, на которой скорости газовых частиц имеют одинаковые значения.

Значения величин  $u_0, g_0, w_0$  в сверхзвуковом течении вычисляются так:

$$u_0 = -N_2^2 x^2 \wp \left[ N_2 (ay + \sqrt{1-a^2} z) \right], \quad g_0 = \frac{2}{3} N_2^3 ax^3 \sqrt{\wp^3 (N_2 (ay + \sqrt{1-a^2} z)) - 1} \quad (N_2 > 0),$$

$$w_0 = \frac{2}{3} N_2^3 \sqrt{1-a^2} x^3 \sqrt{\wp^3 (N_2 (ay + \sqrt{1-a^2} z)) - 1}.$$

Величина скорости в этом течении постоянна на поверхности, уравнением которой является  $x^2 \wp \left[ N_2 (ay + \sqrt{1-a^2} z) \right] = const$ .

Найдем теперь уравнение  $C_{\pm}$ - характеристик. Для этого в уравнение характеристик (1.2.23) подставляем выражение для составляющей скорости

$$u_0 = \frac{\partial \varphi_0(x, y, z)}{\partial x} \text{ и получаем } \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 = N_2^2 x^2 \wp \left[ N_2 (ay + \sqrt{1-a^2} z) \right].$$

Введем теперь новую переменную  $\xi = ay + \sqrt{1-a^2} z$ , после чего рассматриваемое уравнение приводим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \pm N_2 x \sqrt{\wp(N_2 \xi)}.$$

Общим интегралом полученного уравнения, определяющим  $C_{\pm}^0$ - характеристики течения газа в сопле, является соотношение

$$x = \tilde{c} e^{\pm \int \sqrt{\wp(N_2 \xi)} d(N_2 \xi)}, \quad (1.3.27)$$

где  $\tilde{c}$  - постоянная интегрирования.



Определим теперь вид потенциала скорости возмущения  $\varphi_0(x, y, z)$ . Подставляя решение (1.3.23) в (1.3.16), имеем для решения уравнения Кармана выражение

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 N^2 \wp \left[ N(ay + \sqrt{1-a^2} z) - c \right]. \quad (1.3.28)$$

Решением (1.3.28) описываются пространственно-трехмерные околосзвуковые течения газа в сопле с изломом стенки. Из условия  $u = 0$  следует, что переход потока газа через скорость звука (от дозвуковой к сверхзвуковой скорости) осуществляется на плоской поверхности  $x = 0$ , проходящей через начало координат. Полученное решение (1.3.28) удовлетворяет уравнению Кармана и условию (1.3.8). Потенциал скорости возмущения, соответствующий течению расширения Прандтля-Мейера около двугранного угла, представляется формулой

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{(ay + \sqrt{1-a^2} z)^2}. \quad (1.3.29)$$

В соплах с плоской звуковой поверхностью отклонение  $\delta$  от цилиндрической поверхности в окрестности горловины сопла имеет порядок  $\delta \sim x^4$ , в то время как в сопле Лаваля это отклонение имело порядок  $\delta \sim x^2$ .

Отклонения  $y_1$  и  $z_1$  от цилиндрических поверхностей определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{6} N_2^3 a x^4 \sqrt{\wp^3 (N_2 (ay_0 + \sqrt{1-a^2} z_0)) - 1}, \\ z_1 &= \frac{1}{6} N_2^3 \sqrt{1-a^2} x^4 \sqrt{\wp^3 (N_2 (ay_0 + \sqrt{1-a^2} z_0)) - 1}. \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Стенки сопла имеют излом вдоль замкнутого контура, находящегося в горловине. Сопла с изломами стенок оказываются самыми выгодными на практике, так как их можно сделать более короткими по сравнению с обычными. Недостаток сопел с изломом стенки, где переход через скорость звука осуществляется на плоской поверхности, заключается в медленном ускорении частиц газов в окрестности критического сечения области дозвуковых скоростей.



На звуковой поверхности величина  $\frac{\partial u}{\partial x}$  обращается в нуль. Построение сопел с плоской звуковой поверхностью является примером отдельного расчета течений в дозвуковой и сверхзвуковой областях в смешанной задаче газовой динамики. Решение уравнения (1.3.17) обращается в бесконечность на замкнутой кривой  $L$  в плоскости  $yz$ . С помощью решений типа (1.3.28) моделируются пространственные сопла с изломами стенок. В окрестности изломов, соответствующих контуру  $L$ , имеет место течения типа Прандтля-Мейера, а его расширение совершается с максимальной скоростью.

Рассмотрим теперь плоскопараллельные околосзвуковые и потенциальные течения в сопле с изломом контура стенки. Как известно, плоскопараллельные околосзвуковые и потенциальные течения описываются нелинейным уравнением Кармана относительно нулевого приближения потенциала возмущения:

$$\varphi_{0x}\varphi_{0xx} - \varphi_{0yy} = 0. \tag{1.3.31}$$

Решение указанного уравнения, полученное автором настоящей работы при использовании метода разделения переменных Фурье в виде

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{c_0}{2}\right)^3 \wp(y - y_1, 0, 2N^6) \tag{1.3.32}$$

(где  $c_0, y_1$  - постоянные) описывает плоскопараллельные трансзвуковые течения газа в сопле с прямой звуковой линией перехода.

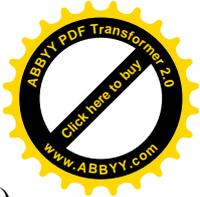
Поиск решения уравнения (1.3.31) в виде

$$\varphi_0(x, y) = \frac{x^3}{18} f(y) \tag{1.3.33}$$

приводит к уравнению второго порядка относительно неизвестной функции  $f(y)$ :

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = f^2. \tag{1.3.34}$$

Умножая уравнение (1.3.34) на  $2\frac{df}{dy}$  и интегрируя далее, имеем:



$$\left(\frac{df}{dy}\right)^2 = \frac{2}{3}f^3 - C, \quad (1.3.35)$$

где  $C$  - произвольная постоянная. Отсюда следует, что величина  $f(y)$  может быть выражена через двоякопериодическую эллиптическую функцию Вейерштрасса  $\wp(g_2, g_3, y)$ , при этом постоянные  $g_2, g_3$  будут инвариантами.

Введем далее в рассмотрение "нормированную" функцию  $\wp(y) = \wp(0, 4, y)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d\wp}{dy}\right)^2 = 4\wp^3 - 4, \quad (1.3.36)$$

а также условию  $\wp(0) = 1$ . Сравнивая формулы (1.3.36) и (1.3.35), находим

$$f = 6N^2\wp[N(y - y_1)], \quad C = 144N^6, \quad (1.3.37)$$

где постоянная  $y_1$  произвольна. Потенциал скорости возмущения имеет следующий вид:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{3}N^2x^3\wp[N(y - y_1)]. \quad (1.3.38)$$

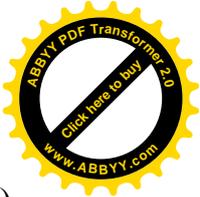
Возможные типы плоскопараллельных течений с прямой звуковой линией, соответствующие различным случаям распределения  $f(y) = 6N^2\wp[N(y - y_1)]$ , были установлены Л.В. Овсянниковым. Представим их ниже.

**Тип А:** течение, в котором эллиптическая функция Вейерштрасса не имеет особых точек на конечном расстоянии. Течения рассматриваемого типа осуществляются, если  $f(y) = 0$ ; здесь мы будем иметь дело с равномерным звуковым потоком.

**Тип В:** сверхзвуковое течение с одной особой точкой, соответствующее случаю вырождения функции  $f(y)$ , которая имеет вид

$$f = \frac{6}{(y - y_1)^2}.$$

Здесь на физической плоскости получаем течение расширения Прандтля-Мейера около угла, описываемое математически следующими формулами:



$$u_0 = \left( \frac{x}{y - y_1} \right)^2, \quad \vartheta_0 = -\frac{2}{3} \left( \frac{x}{y - c} \right)^3. \quad (1.3.39)$$

**Тип С:** дозвуковое течение, которое соответствует чисто мнимым значениям  $N$ .

**Тип D:** смешанное течение с двумя особыми точками, соответствующее чисто мнимым значениям  $N$  и включающее в себя течение типа С.

**Тип E:** сверхзвуковое течение с двумя особыми точками, соответствующее вещественным значениям в формуле (1.3.37).

Изучение свойств функции  $f(y)$  позволяет получить полное представление о характере течения газа в соплах Лавала вблизи прямой, где скорость достигает своей критической величины. Составляющие вектора скорости  $u_0, \vartheta_0$  в плоскопараллельном дозвуковом течении типа С описываются формулами

$$u_0 = -N_1^2 x^2 \wp(iN_1 y), \quad \vartheta_0 = \frac{2}{3} N_1^3 x^3 \sqrt{1 - \wp^3(iN_1 y)}, \quad N_1 > 0.$$

Линии постоянной скорости частиц газа определяются следующей формулой:

$$x^2 \wp(iN_1 y) = const.$$

В сверхзвуковом течении значения физических величин вычисляются при помощи соотношений

$$u_0 = N_2^2 x^2 \wp(N_2 y), \quad \vartheta_0 = \frac{2}{3} N_2^3 x^3 \sqrt{1 - \wp^3(N_2 y) - 1}, \quad N_2 > 0.$$

Величина скорости в этом течении постоянна вдоль кривых

$$x^2 \wp(N_2 y) = const.$$

Для определения  $C_+$  - характеристик справедлива следующая формула:

$$x = \left( \frac{3\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{N_2 \left[ \sqrt[3]{\wp^3(N_2 y)} - \sqrt[3]{\wp^3(N_2 y) - 1} \right]^{\frac{1}{3}}}, \quad (1.3.40)$$

где  $\alpha = const > 0$ .

Для  $C_-$  - характеристик имеет место

$$x = \left( \frac{3\beta}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{N_2 \left[ \sqrt[3]{\wp^3(N_2 y)} - \sqrt[3]{\wp^3(N_2 y) - 1} \right]^{\frac{1}{3}}}, \quad (1.3.41)$$

где  $\beta = const > 0$ . Из формулы видно, что прямая  $y = y_* = \frac{\omega}{N}$  является асимптотой для всех  $C_+$ - характеристик, а из формулы (1.3.41) следует, что все  $C_-$ -характеристики исходят из точки  $T$ .

Уравнения для  $T_{\pm}$ -характеристик можно получить, подставляя выражения для составляющих скорости  $u, v$  в уравнение

$$v_0 = \pm \frac{2}{3} u_0^{3/2} + C.$$

Далее приводятся линии равных скоростей, сопло с прямой звуковой линией.

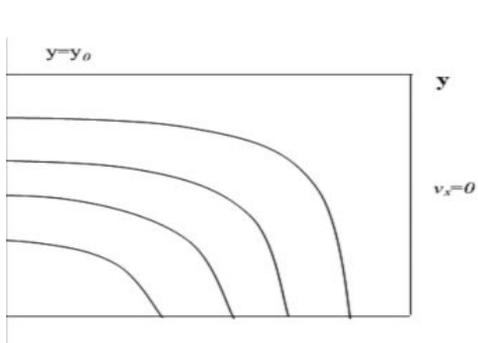


рис.1.3.1, а

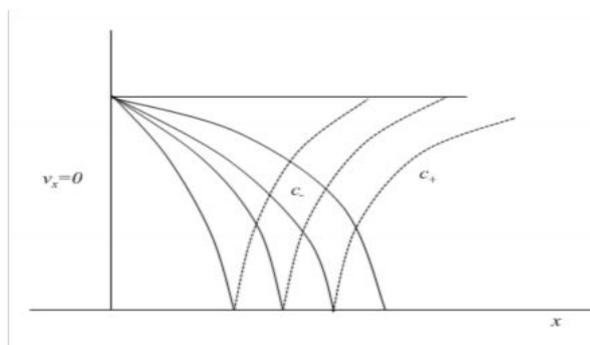


рис.1.3.1, б

*Линии  $u = const$  в течениях типов С и Е.*

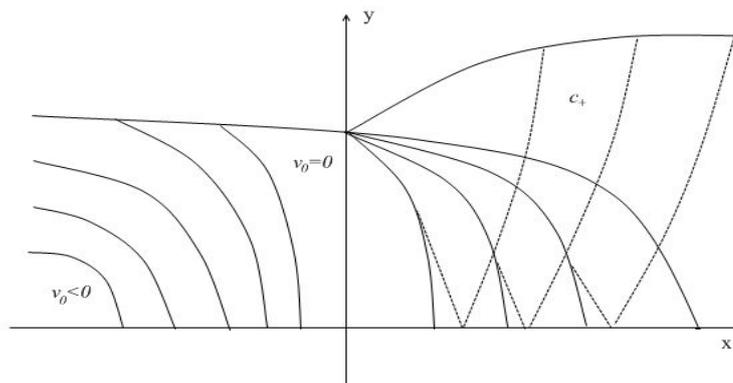


рис.1.3.1, в

*Сопло с прямой звуковой линией и изломом контура стенки.*



#### 1.4. Решение рекуррентной системы дифференциальных уравнений

##### определение последующих приближений потенциала скорости возмущения

Рассмотрим следующее уравнение в частных производных для определения первого приближения потенциала скорости возмущения  $\varphi_1(x, y, z)$ :

$$\varphi_{0xx}\varphi_{1x} + \varphi_{0x}\varphi_{1xx} - \varphi_{1yy} - \varphi_{1zz} = -\left\{ \frac{1}{2}\varphi_{0x}\varphi_{0x}^2 + 2\varphi_{0xy}\varphi_{0y} + 2\varphi_{0xz}\varphi_{0z} + (\aleph - 1) * (\varphi_{0yy} + \varphi_{0zz}) \cdot \varphi_{0x} \right\}. \quad (1.4.1)$$

Далее будем рассматривать пространственное течение мейеровского типа в сопле Лавала.

Подставляя соответствующие частные производные по пространственным переменным от выражения для потенциала скорости возмущения нулевого приближения в уравнение (1.4.1), получаем следующее неоднородное дифференциальное уравнение относительно  $\varphi_1(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{5})d_1\varphi_{1x} + \left[ (1 + \sqrt{5})d_1x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}d_1^2(y^2 + z^2) \right] \varphi_{1xx} - \varphi_{1yy} - \varphi_{1zz} = \\ - \left[ 4(2 + \sqrt{5}) + 8(2 + \sqrt{5})(\aleph - 1) \right] d_1^3x^2 + [3(3 + \sqrt{5})^2 + 4(7 + 3\sqrt{5})(\aleph - 1)] \\ d_1^4x(y^2 + z^2) + \left[ \frac{93 + 43\sqrt{5}}{6} + (11 + 5\sqrt{5})(\aleph - 1) \right] d_1^5(y^4 + z^4) + [(39 + 17\sqrt{5}) + \\ + 2(11 + 5\sqrt{5})(\aleph - 1)] d_1^5y^2z^2 \}. \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что решение линейного неоднородного уравнения состоит из суммы частных решений неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, т.е. в нашем случае имеем:

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_{10}(x, y, z) + \varphi_{11}(x, y, z).$$

$$(1.4.3)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (1.4.2) ищем далее в форме

$$\varphi_{10}(x, y, z) = F(\xi),$$

$$(1.4.4)$$



где  $\xi = dx + \beta(Y^2 + Z^2)$ ,  $\alpha = const, \beta = const$ .

Подставляя предполагаемый вид общего решения в однородное уравнение, получаем:

$$(1 + \sqrt{5})d_1\varphi_{1x} + \left[ (1 + \sqrt{5})d_1x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}d_1^2(y^2 + Z^2) \right] \varphi_{1xx} - \varphi_{1yy} - \varphi_{1zz} = 0. \quad (1.4.5)$$

Теперь относительно новой искомой функции  $F(\xi)$  получаем уравнение

$$\left[ (1 + \sqrt{5})d_1\alpha - 4\beta \right] F'(\xi) + \left[ (1 + \sqrt{5})d_1\alpha^2x + \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2}d_1^2\alpha^2 - 4\beta^2 \right) (y^2 + Z^2) \right] F''(\xi) = 0. \quad (1.4.6)$$

Потребуем выполнения условия для определения величин  $\alpha$  и  $\beta$  в виде

$$(1 + \sqrt{5})d_1\alpha^2 = \alpha, \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}d_1^2\alpha^2 - 4\beta = \beta.$$

(1.4.7)

Отсюда следует, что  $\alpha$  и  $\beta$  принимают следующие значения:  $\alpha = \frac{1}{(1 + \sqrt{5})d_1}$ ,

$\beta_1 = \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{5}), \beta_2 = -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{5})$ . Переменная  $\xi$  определяется здесь так:

$$\xi_1 = \frac{1}{(1 + \sqrt{5})d_1} \cdot X - \frac{1}{8}(1 + \sqrt{5})(y^2 + z^2), \quad \xi_2 = \frac{1}{(1 + \sqrt{5})d_1} \cdot X + \frac{1}{8}(1 + \sqrt{5})(y^2 + z^2).$$

Искомая функция  $F(\xi)$  будет решением линейного дифференциального уравнения

$$(1 - 4\beta)F'(\xi) + \xi F''(\xi) = 0,$$

где постоянная  $\beta$  определяется согласно (1.4.7), а общим решением последнего уравнения является функция

$$F(\xi) = C_2\xi^{4\beta} - \frac{C_1}{4\beta},$$

(1.4.8)

тогда соответствующее общее решение однородного дифференциального уравнения (1.4.5) примет следующий вид:

$$\varphi_{10} = C_2 \left( \frac{1}{(1 + \sqrt{5})d_1} x - \frac{1}{8}(1 + \sqrt{5})(y^2 + z^2) \right)^{\frac{-(1 + \sqrt{5})}{2}} - \frac{C_1}{4\beta},$$



$$\varphi_{10} = C_2 \left( \frac{1}{(1+\sqrt{5}) \cdot d_1} x + \frac{1}{8} (-1+\sqrt{5})(y^2+z^2) \right)^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})} - \frac{C_1}{4\beta}. \quad (1.4.9)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1.4.2) будем искать в следующей форме:

$$\varphi_{11} = B_1(z^6 + y^6) + B_2(z^4 y^2 + y^2 z^4) + B_3 x(y^4 + z^4 + z^2 y^2) + B_4 x^2(y^2 + z^2). \quad (1.4.10)$$

В результате подстановки необходимых частных производных от выражения (1.4.10) по пространственным переменным в уравнение (1.4.2), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \left[ (1+\sqrt{5})d_1 B_3 + (y^4 + z^4 + y^2 z^2) + 2B_4 x(y^2 + z^2) \right] + \left[ (1+\sqrt{5})d_1 x + \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})d_1^2 (y^2 + z^2) \right] \\ & 2B_4 (y^2 + z^2) - 30B_1 y^4 - B_2 (2z^4 + 12z^2 y^2) - B_3 x(12y^2 + 2z^2) - 2B_4 x^2 - 30B_1 z^4 - \\ & - B_2 (12z^2 y^2 + 2y^4) - B_3 x(12z^2 + 2y^2) - 2B_4 x^2 = -[4(2+\sqrt{5}) + 8(2+\sqrt{5})(\aleph-1)]d_1^3 x^2 + [3(3+(1.4.11) \\ & + \sqrt{5})^2 + 4(7+3\sqrt{5})(\aleph-1)]d_1^4 x(y^2 + z^2) + \left[ \frac{93+43\sqrt{5}}{6} + (11+5\sqrt{5})(\aleph-1) \right]d_1^5 (y^4 + z^4) + \\ & + [(39+17\sqrt{5}) + 2(11+5\sqrt{5})(\aleph-1)]d_1^5 y^2 z^2. \end{aligned}$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов к выражению (1.4.11), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $B_1, B_2, B_3, B_4$ :

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{5})d_1 B_3 + (3+\sqrt{5})d_1^2 B_4 - 30B_1 - 2B_2 &= -\left[ \frac{93+43\sqrt{5}}{6} + (11+5\sqrt{5})(\aleph-1) \right]d_1^5, \\ (1+\sqrt{5})d_1 B_3 + 2 \cdot (3+\sqrt{5})d_1^2 B_4 - 24B_1 &= -[(39+17\sqrt{5}) + 2 \cdot (11+5\sqrt{5})(\aleph-1)]d_1^5, \\ 4B_4(1+\sqrt{5})d_1 - 14B_3 &= -[3 \cdot (3+\sqrt{5})^2 + 4 \cdot (7+3\sqrt{5})(\aleph-1)]d_1^4, \\ B_4 &= [(2+\sqrt{5}) + 2 \cdot (2+\sqrt{5})(\aleph-1)]d_1^3 \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Решением полученной системы являются следующие значения для коэффициентов  $B_1, B_2, B_3, B_4$ :

$$\begin{aligned} B_4 &= (2+\sqrt{5})(2\aleph-1)d_1^3, \quad B_3 = \frac{(7+3\sqrt{5})(2\aleph-1)}{2}d_1^4, \\ B_2 &= \left( \frac{(11+5\sqrt{5})\aleph}{2} - \frac{2+\sqrt{5}}{3} \right)d_1^5, \quad B_1 = \left( \frac{(11+5\sqrt{5})(8\aleph-3)}{30} - \frac{101+47\sqrt{5}}{180} \right)d_1^5. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$



Подставляя  $B_1, B_2, B_3, B_4$  в (1.4.10), получаем выражение в виде многочлена для определения частного решения  $\varphi_{11}(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(x, y, z) = & \frac{d_1^5}{30} \left[ (11 + 5\sqrt{5})(8\aleph - 3) + \frac{101 + 47\sqrt{5}}{6} \right] (z^6 + y^6) + \left[ \frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})\aleph - \right. \\ & \left. - \frac{1}{3}(2 + \sqrt{5}) \right] d_1^5 (z^4 y^2 + z^2 y^4) + \frac{(7 + 3\sqrt{5})(6\aleph - 1)}{2} d_1^4 x (y^4 + y^2 z^2 + z^4) + (2 + \sqrt{5}) * \\ & * (2\aleph - 1) d_1^3 x^2 (y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

С учетом двух приближений, решение уравнения Эйлера может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & a_* (x + \varepsilon \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} d_1 x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} x \cdot d_1^2 (y^2 + z^2) + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{24} d_1^3 (y^4 + z^4) + \right. \\ & \left. + \frac{(3 + \sqrt{5})}{4} d_1^3 y^2 z^2 - \frac{c_0 d_1^3}{4} \right) + \varepsilon^2 (c_2 \left( \frac{1}{(1 + \sqrt{5}) d_1} x + \frac{1}{8} (-1 + \sqrt{5}) (y^2 + z^2) \right)^{\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})} - \\ & - \frac{c_1}{4\beta} + \frac{d_1^5}{30} \left[ (11 + 5\sqrt{5})(8\aleph - 3) + \frac{101 + 47\sqrt{5}}{6} \right] \cdot (z^6 + y^6) + \\ & + \left[ \frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})\aleph - \frac{1}{3}(2 + \sqrt{5}) \right] \cdot d_1^5 (z^4 y^2 + z^2 y^4) + \frac{(7 + 3\sqrt{5})(6\aleph - 1)}{2} d_1^4 x (y^4 + y^2 z^2 + \\ & + z^4) + (2 + \sqrt{5})(2\aleph - 1) \cdot d_1^3 \cdot x^2 (y^2 + z^2)). \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Решением (1.4.15) описываются также пространственно-трёхмерные околосвуковые и потенциальные течения газа в сопле Лавая. Следует отметить, что в (1.4.15) величины  $c_1$  и  $c_2$  являются постоянными интегрирования. Если положить, что  $c_2 = 0$ , то из (1.4.15) получается решение уравнения газовой динамики, представляемое в виде полинома.

Решение (1.4.15) является приближением к точному решению уравнения Эйлера, удовлетворяющему начальным данным в задаче Коши вдоль оси симметрии сопла Лавая. Численные расчеты на ЭВМ с использованием двух и последующих приближений потенциала скорости дают геометрические характеристики сопла, хорошо согласующиеся с результатами других авторов.

Перейдем теперь к нахождению общего решения рекуррентной системы дифференциальных уравнений в случае пространственного околосвукового



течения газа с плоской звуковой поверхностью перехода в окрестности сопла.

Потенциал скорости возмущения  $n$ -го приближения будем искать в виде

$$\varphi_n(x, y, z) = x^{2n+3} \cdot F_n(N\xi) \cdot N^2,$$

$$(1.4.16)$$

где  $F_n(N\xi)$  - новая искомая функция.

Подставляя далее предполагаемый вид решения в однородное уравнение  $\varphi_{0xx}\varphi_{nx} + \varphi_{0x}\varphi_{nxx} - \varphi_{nyy} - \varphi_{nzz} = 0$  рассматриваемой нами рекуррентной системы, относительно функции  $F_n(N\xi)$  получаем уравнение Ламе в вейерштрассовой форме:

$$(2n+3)(2n+4)\wp(N\xi)F_n(\wp) - \frac{d^2F_n(\wp)}{d(N\xi)^2} = 0. \quad (1.4.17)$$

Если  $\omega_1, \omega_2$  - периоды двоякопериодической эллиптической функции Вейерштрасса  $\wp(N\xi)$ , то для уравнения (1.4.17) каждая из точек  $N\xi = k\omega_1 + l\omega_2$  является слабоособой с индексами  $r = 2n+4, -2n-3$ .

Решения уравнения (1.4.17) мероморфны во всей комплексной  $\xi$ -плоскости. В окрестности точки  $N\xi = k\omega_1 + l\omega_2$  существуют решения вида  $F_1 = (N\xi - k\omega_1 - l\omega_2)^{2n+4} Y_1(N\xi)$ ,  $F_2 = (N\xi - k\omega_1 - l\omega_2)^{-(2n+3)} Y_2(N\xi)$ , где  $Y_1, Y_2$  - функции, регулярные в указанной точке. Уравнение Ламе можно представить также в якобиевой и алгебраической формах. Решения рассматриваемого уравнения выражаются через функции Ламе 1, 2, 3, 4-го рода и первого разряда.

### 1.5. Пространственные околосвуковые потенциальные течения газа через сопло с двумя сужениями

Плоскопараллельные околосвуковые течения газа в сопле с двумя сужениями на плоскости потенциала скорости и функции тока  $(\varphi, \psi)$  рассмотрены в работах С.Томотики и К.Томады [176, 177]. Данными авторами аналитически проинтегрированы нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, построены линии тока, характеристики и т.д.



Рассмотрим пространственные течения газа, базируясь на уравнении Кармана (1.2.1). Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 f_1(y, z) + x \cdot f_2(y, z), \quad (1.5.1)$$

где  $f_1(y, z), f_2(y, z)$  - неизвестные пока функции. Предполагаемый вид решения (1.5.1) подставляем в нелинейное уравнение в частных производных (1.2.1) и получаем систему уравнений относительно функций  $f_1(y, z), f_2(y, z)$ :

$$f_{1yy} + f_{1zz} = 6f_1^2, \quad (1.5.2)$$

$$f_{2yy} + f_{2zz} = 2f_1 f_2. \quad (1.5.3)$$

Решение уравнения (1.5.2) будем искать в следующем виде:

$$f_1(y, z) = L(\tilde{u}), \quad (1.5.4)$$

где  $\tilde{u} = ay + bz$ ,  $a, b$  - произвольные постоянные. Тогда относительно новой неизвестной  $L(\tilde{u})$  получаем дифференциальное уравнение

$$L''(\tilde{u}) = \frac{6}{a^2 + b^2} L^2(\tilde{u}). \quad (1.5.5)$$

Положим, что  $a^2 + b^2 = 1$ , тогда уравнение (1.5.5) приводится к виду

$$L''(\tilde{u}) = 6L^2(\tilde{u}). \quad (1.5.5,б)$$

Известно, что решение уравнения (1.5.5,б) выражается через двоякопериодическую эллиптическую функцию Вейерштрасса:

$$f_1(y, z) = L(\tilde{u}) = \wp(\tilde{u} + c) = \wp((ay + \sqrt{1 - a^2}z) + c). \quad (1.5.6)$$

Рассмотрим теперь линейное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции  $f_2(y, z)$ , представленное в виде (1.5.3). Подставляя (1.5.6) в уравнение (1.5.3), получаем



$$f_{2yy} + f_{2zz} = 2\wp(ay + \sqrt{1-a^2}z)f_2.$$

(1.5.7)

Решение уравнения (1.5.7) будем искать в форме

$$f_2(y, z) = R(\tilde{u}), \text{ где } \tilde{u} = ay + bz, \quad a, b = \text{const}.$$

(1.5.8)

Относительно новой неизвестной функции  $R(\tilde{u})$  получаем дифференциальное уравнение, коэффициентом в котором служит эллиптическая функция Вейерштрасса:

$$R''(\tilde{u}) = 2\wp(\tilde{u} + c)R(\tilde{u}).$$

(1.5.9)

Решение уравнения (1.5.9) можно представить в виде

$$R(\tilde{u}) = [\sigma(\tilde{u} + \alpha) / \sigma(\tilde{u})] \cdot \exp[\mp \tilde{u} \xi(\alpha)],$$

(1.5.10)

где  $\alpha$  определяется из условия, что  $\wp(\alpha) = 0$ .

Подставляя найденные выражения для  $L(u)$  и  $R(u)$  в (1.5.1) и переходя к прежним переменным  $y, z$ , определяем решение уравнения Кармана (1.2.1), которое можно представить следующим образом:

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 \wp[(ay + \sqrt{1-a^2}z) + c] +$$

(1.5.11)

$$+ x \left\{ \frac{\sigma[(ay + \sqrt{1-a^2}z) + c + \alpha]}{\sigma[(ay + \sqrt{1-a^2}z) + c]} \exp(\mp (ay + \sqrt{1-a^2}z) \xi(\alpha)) \right\}.$$

Здесь  $\sigma[(ay + \sqrt{1-a^2}z) + c + \alpha]$  - функция Вейерштрасса,  $\sigma(z^*) = \sigma(z^* / \omega, \omega')$  удовлетворяет условию  $\sigma'(z^*) / \sigma(z^*) \equiv \xi(z^*)$ ;  $z^*$ -комплексная переменная;  $\sigma(z^*)$ -целая функция, значение которой стремится к нулю при стремлении независимой переменной к нулю;  $\xi$ - функция Вейерштрасса.  $\xi(z^*) = \xi(z^* / \omega, \omega')$  удовлетворяет условию  $\xi'(z^*) = -\wp(z^*)$ ; функция  $\xi(z^*)$  имеет простой полюс при  $z^* = 0$ , а главная ее часть равна  $z^{*-1}$ ; соотношение  $\xi(z^*) - z^{*-1}$  стремится к нулю и является аналитической в окрестности начала координат.



Функции  $\sigma(z^*), \xi(z^*)$  не являются эллиптическими, так как неперiodичны.

Решением уравнения (1.5.9) может служить функция

$$R(\tilde{u}) = d[(1 + \wp'(\tilde{u} + c_2))^{1/3} + (1 - \wp'(\tilde{u} + c_2))^{1/3}], \quad (1.5.12)$$

где  $c_2 = const$ . Искомая функция  $R(u)$  здесь выражается через производную от эллиптической функции Вейерштрасса  $\wp$ .

Подставляя (1.5.6), (1.5.12) в предполагаемый вид (1.5.1) для решения уравнения Кармана в случае нулевого приближения потенциала скорости возмущения и учитывая (1.5.4) (1.5.8), получаем:

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 \wp[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c] +$$

$$(1.5.13)$$

$$+ d \cdot x \left\{ 1 + \sigma'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2]^{1/3} + (1 - \sigma'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2]^{1/3}) \right\}.$$

Здесь постоянная  $c_2$  выбирается равной полупериоду функции  $\wp(ay + \sqrt{1 - a^2} z)$ . Найденным решением описываются пространственные потенциальные трансзвуковые течения газа в сопле с двумя сужениями. Составляющие вектора скорости частиц потока газа, определяемые согласно (1.5.13), имеют следующий вид:

$$u_0 = x^2 \wp[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c] + d \left\{ (1 + \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{1/3} + (1 - \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{1/3} \right\},$$

$$v_0 = \frac{1}{3} ax^3 \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c] + 2dax \wp^2[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2] \cdot \left\{ (1 + \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{-2/3} + (1 - \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{-2/3} \right\}, \quad (1.5.14)$$

$$w_0 = \frac{1}{3} x^3 \sqrt{1 - a^2} \cdot \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c] + 2d\sqrt{1 - a^2} x \wp^2[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2] \cdot \left\{ (1 + \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{-2/3} + (1 - \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{-2/3} \right\}.$$

Уравнение звуковой поверхности, на которой достигается значение местной скорости звука, определяется из условия  $u_0 = 0$  и имеет вид

$$\frac{d \left\{ (1 + \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{1/3} + (1 - \wp'[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c_2])^{1/3} \right\}}{\wp[(ay + \sqrt{1 - a^2} z) + c]} = -x^2. \quad (1.5.15)$$



Отметим, что в соплах с двумя сужениями могут протекать различные течения газа.

Положим, что перед первым сужением стенки сопла поток газа имеет дозвуковую скорость, а при выходе из второй сужающейся части сопла газ, расширяясь, приобретает сверхзвуковую скорость.

В окрестности первого сужения сопла, около выпуклой части стенки, могут быть образованы местные сверхзвуковые зоны, а вдоль оси симметрии сопла скорость потока будет дозвуковой. Однако величина скорости потока газа будет больше при выходе из первого сужения стенки, во входе, оставаясь при этом дозвуковой. Таким образом, в окрестности первого сужения сопла осуществляется течение типа Тейлора. Продолжая поступательное движение, поток газа в окрестности второго сужения стенки переходит через звуковую поверхность, а при выходе будет иметь сверхзвуковую скорость. Таким образом, на втором критическом сечении сопла течение газа имеет мейеровский тип.

Рассмотрим теперь распределение давления вдоль направления движения потока в сопле. Обозначим значение давления перед первым сужением стенки сопла, т.е. давление во входе, через  $p_0$ , давление на выходе из первого сужения - через  $p_1$ , а давление за вторым сужением - через  $p_2$ . Тогда будет выполняться неравенство для давлений  $p_0 > p_1 > p_2$ .

Введем обозначения для разности давлений:  $\Delta p_1 = p_0 - p_1$ ,  $\Delta p_2 = p_1 - p_2$ . При этом для разностей давлений выполняется условие  $\Delta p_1 > \Delta p_2$ . Итак, в результате "работы" разности давлений в сопле  $\Delta p_1, \Delta p_2$ , будут иметь место пространственные околосвуковые течения газа в сопле с двумя сужениями.

Задача построения геометрических характеристик пространственного сопла с двумя сужениями представляет значительные трудности.

Рассмотрим плоскопараллельное трансзвуковое потенциальное течение газа в рассматриваемом нами виде сопла. Решение основного уравнения теории



околозвуковых плоскопараллельных течений газа (1.3.31) будем искать в следующей форме:

$$\varphi_0(x, y) = x \cdot f_1(y) + \frac{1}{3} x^3 f_2(y). \quad (1.5.16)$$

Подставляя предполагаемый вид решения в уравнение Кармана, получаем два дифференциальных уравнения относительно функций  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$ :

$$f_1''(y) - 2 \cdot f_2(y) f_1(y) = 0, \quad (1.5.17)$$

$$f_2''(y) - 6 \cdot f_2^2(y) = 0. \quad (1.5.18)$$

Решением уравнения (1.5.18) является двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса

$$f_2(y) = \wp(y + c_2). \quad (1.5.19)$$

Инварианты функции Вейерштрасса есть  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 0$ , где  $c_2$  - постоянная интегрирования.

С учетом полученного решения (1.5.19), уравнение (1.5.17) приводится к уравнению Ламе в эллиптических функциях Вейерштрасса. Решениями полученного уравнения являются функции

$$f_1(y) = [\sigma(y \pm \alpha) / \sigma(y)] \cdot \exp(\pm y \cdot \xi(\alpha)), \quad (1.5.20)$$

где  $\alpha$  определяется из условия, что  $\wp(\alpha) = 0$ .

Подставляя решения (1.5.20), (1.5.19) в (1.5.16), для искомого потенциала скорости возмущения получаем:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{x^3}{3} \wp(y + c_2) + x \cdot \frac{\sigma(y \pm \alpha)}{\sigma(y)} \cdot \exp(\pm y \cdot \xi(\alpha)). \quad (1.5.21)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решением уравнения (1.5.17) может служить также функция

$$f_1(y) = a \cdot [(1 + \wp'(y + c_2))^{1/3} + (1 - \wp'(y + c_2))^{1/3}]. \quad (1.5.22)$$

Подставляя (1.5.22), (1.5.19) в (1.5.16), для потенциала скорости возмущения имеем:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{x^3}{3} \wp(y + c_2) + x \cdot a \cdot [(1 + \wp'(y + c_2))^{1/3} + (1 - \wp'(y + c_2))^{1/3}] \quad (1.5.23)$$

Постоянная интегрирования в последней формуле выбирается равной полупериоду функции. Решением (1.5.23) можно описать различные типы плоскопараллельных околосзвуковых течений газа в сопле с двумя сужениями, в зависимости от выбора знака для инварианта  $g_3 = C_1$  и постоянной  $a$ .

Графики функций  $f_1$  и  $f_2$ , определяемые согласно соотношениям (1.5.22), (1.5.19), показаны на следующих рисунках и имеют вид аналогичный рисункам, приведенным в работе С. Томотики и К.Томады [155, 156].

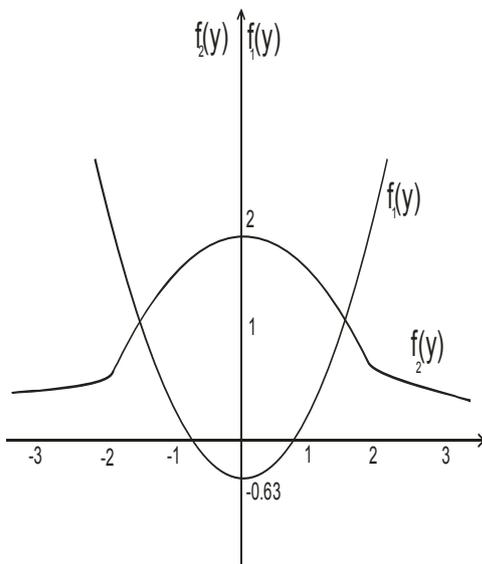


Рис. 1.5.1

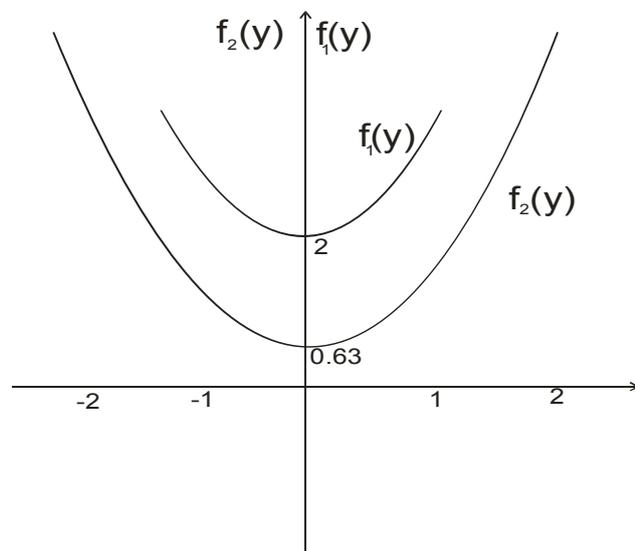


Рис. 1.5.2

Графики функций  $f_1$  и  $f_2$  показаны на рис. 1.5.1 для случая  $g_3 = -1$  и на рис. 1.5.2 - для случая  $g_3 = 1$ .

Уравнением звуковой линии будет выражение в радикалах

$$x = \pm \sqrt{\frac{(1 + \wp'(y + c_2))^{1/3} + (1 - \wp'(y + c_2))^{1/3}}{\wp(y + c_2)}}.$$

Стенки сопла с двумя сужениями имеют следующий вид.

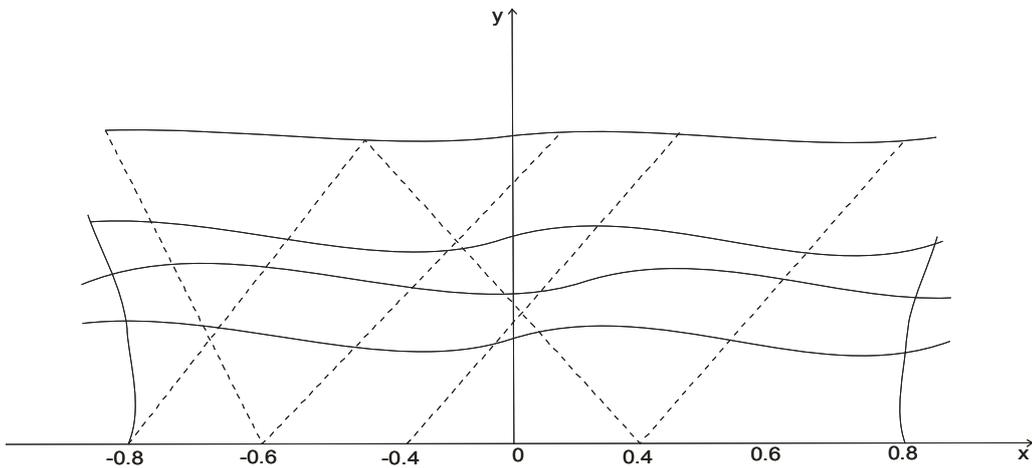


Рис. 1.5.3. Течение газа в сопле с двумя сужениями:

- линии тока,
- линии равных скоростей,
- линии Маха (характеристики).

Проведем сравнение решений (1.5.23) и (1.5.13), которые определяют, соответственно, плоскопараллельные и пространственные околосвуковые течения газа в сопле с двумя сужениями.

Если в решении (1.5.13) положить, что  $a=1$  или  $z=0$ , то получаем изученное нами решение (1.5.23). Отсюда можно сделать вывод о том, что решением (1.5.13) описываются пространственные околосвуковые течения газа в сопле с двумя сужениями. Как видно из рис. 1.5.3, стенки сопла плавно искривляются в местах сужения. В соплах с двумя сужениями путем снижения давления на выходе можно получить непрерывные течения газа.

### 1.6. Смешанное сверхзвуковое течение газа в сопле и слабовогнутой трубе.

Одним из частных решений уравнения (1.5.5) является соотношение

$$L(u) = \frac{C_1}{\tilde{u}^2}. \quad (1.6.1)$$

Уравнение в частных производных относительно  $f_2(y, z)$  (1.5.3) преобразуем к виду



$$R''(\tilde{u}) = 2L(\tilde{u})R(\tilde{u}).$$

$$(1.6.2)$$

Здесь  $f_2(y, z) = R(\tilde{u})$ ,  $\tilde{u} = ay + z\sqrt{1-a^2}$ .

$$(1.6.3)$$

Подставляя решение (1.6.1) в уравнение (1.6.2) и интегрируя, имеем:

$$R(\tilde{u}) = \frac{C_1}{\tilde{u}}, \quad C_1 = \text{const}.$$

$$(1.6.4)$$

После подстановки решений (1.6.4), (1.6.1) в искомый вид решений уравнения Кармана (1.5.1), при учете преобразований (1.5.4) и (1.5.8) получаем выражение

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{x^3}{3(ay + z\sqrt{1-a^2})^2} + x \cdot \left( \frac{C_1}{ay + z\sqrt{1-a^2}} + C_2(ay + z\sqrt{1-a^2})^2 \right). \quad (1.6.5)$$

Полученным решением описываются пространственные сверхзвуковые течения газа в трубе, имеющей искривленный участок, т.е. получаем течение газа в слабоогнутой трубе и в сопле.

Составляющие вектора скорости, определяемые следующими выражениями, соответствуют третьему решению из (1.6.5):

$$u_0 = \frac{x^2}{(ay + z\sqrt{1-a^2})^2} + \frac{C_1}{ay + z\sqrt{1-a^2}}, \quad v_0 = \frac{-2ax^3}{3(ay + z\sqrt{1-a^2})^3} - \frac{C_1ax}{(ay + z\sqrt{1-a^2})^2},$$

$$w_0 = \frac{-2x^3\sqrt{1-a^2}}{3(ay + z\sqrt{1-a^2})^2} - \frac{C_1x\sqrt{1-a^2}}{(ay + z\sqrt{1-a^2})^2}.$$

$$(1.6.6)$$

В окрестности выпуклой в сторону газа стенки трубы образуется дозвуковая зона течения. За исключением дозвуковой зоны, скорость потока газа превышает местную скорость звука. Уравнение звуковой поверхности, через которую осуществляется переход от сверхзвуковой к дозвуковой скорости, имеет следующий вид:

$$x^2 = -C_1 \cdot (ay \pm z\sqrt{1-a^2}).$$

$$(1.6.7)$$



Рассмотрим теперь уравнение характеристических поверхностей

Уравнение характеристических поверхностей для стационарных течений определяется как интеграл нелинейного дифференциального уравнения (1.2.23).

Подставляя выражения для составляющей скорости из (1.6.6) в уравнение (1.2.23), получаем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2}{(ay + z\sqrt{1-a^2})^2} + \frac{C_1}{ay + z\sqrt{1-a^2}}. \quad (1.6.8)$$

Вводя далее независимую переменную  $\tilde{u} = ay + z\sqrt{1-a^2}$ , последнее уравнение приводим к виду

$$\left(\frac{dx}{d\tilde{u}}\right) = \frac{x^2 + C_1\tilde{u}}{\tilde{u}^2}. \quad (1.6.9)$$

Меняя ролями искомую функцию  $x(\tilde{u})$  и переменную  $\tilde{u}$ , получаем соответствующее "перевернутое" уравнение

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{dx}\right) = \frac{\tilde{u}^2}{x^2 + C_1\tilde{u}}, \quad (1.6.10)$$

которое распадается на два уравнения:

$$\tilde{u}' \cdot \sqrt{x^2 + C_1\tilde{u}} - \tilde{u} = 0, \quad (1.6.11)$$

$$\tilde{u}' \cdot \sqrt{x^2 + C_1\tilde{u}} + \tilde{u} = 0. \quad (1.6.12)$$

Для интегрирования уравнения (1.6.11) введем новую функцию, согласно преобразованию

$$\tilde{u}(x) = \frac{x^2}{c^2} \tilde{v}(x) \quad (1.6.13)$$

и относительно искомой  $\tilde{v}(x)$  получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными



$$\frac{\sqrt{1+\tilde{v}} \cdot d\tilde{v}}{\tilde{v}(1-2\sqrt{1+\tilde{v}})} = \frac{dx}{x} . \quad (1.6.14)$$

Если ввести далее новую функцию  $\tilde{w}(x)$  посредством преобразования

$$\tilde{v}(x) = \tilde{w}^2(x) - 1, \quad (1.6.15)$$

то получаем уравнение

$$\frac{2\tilde{w}^2 d\tilde{w}}{(\tilde{w}^2 - 1)(1 - 2\tilde{w})} = \frac{dx}{x} . \quad (1.6.16)$$

Общим интегралом дифференциального уравнения (1.6.16) является выражение

$$\frac{1}{\tilde{w}-1} \sqrt[3]{\frac{1-2\tilde{w}}{\tilde{w}+1}} = \tilde{c}_1 x, \quad (1.6.17)$$

где  $\tilde{c}_1$  - постоянная интегрирования.

Совершая обратный переход к переменной  $\tilde{u}$ , получаем:

$$\frac{x - 2\sqrt{x^2 + c_1 \tilde{u}}}{\tilde{c}_1 \tilde{u} (\sqrt{x^2 + c_1 \tilde{u}} - x)^2} = \tilde{c}_1^3 . \quad (1.6.18)$$

После подстановки  $\tilde{u} = ay + z\sqrt{1-a^2}$  из (1.6.18) определяем уравнение характеристических поверхностей в виде

$$\frac{x - 2\sqrt{x^2 + (ay + z\sqrt{1-a^2})c_1}}{\tilde{c}_1 (ay + z\sqrt{1-a^2}) \cdot (\sqrt{x^2 + c_1 (ay + z\sqrt{1-a^2})} - x)^2} = \tilde{c}_1^3 . \quad (1.6.19)$$

Полученное уравнение (1.6.19) является уравнением  $C$  - характеристических поверхностей.

Аналогичным образом, интегрируя уравнение (1.6.12), получаем формулу, с помощью которой определяются поверхности характеристик второго семейства  $C_+^0$ :



$$\frac{c_1(ay + z\sqrt{1-a^2}) \cdot (x + \sqrt{x^2 + (ay + z\sqrt{1-a^2})c_1})}{x + 2\sqrt{x^2 + c_1(ay + z\sqrt{1-a^2})}} = \tilde{c}_2^3. \quad (1.6.20)$$

Полагая  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ , из соотношений (1.6.19) и (1.6.20) находим, соответственно,  $ay + z\sqrt{1-a^2} = 0$ ,  $\frac{3}{4}(x^2 + (ay + z\sqrt{1-a^2})c_1) \cdot c_2 = 0$ , которые описывают характеристические поверхности  $C_-^0$ ,  $C_+^0$ .

При обтекании дозвуковым потоком газа выпуклой части стенки сопла с двумя сужениями уменьшается давление и имеет место течение Прандтля-Мейера, т.е. течение разрежения. Здесь плоские характеристические поверхности образуют расходящийся пучок. При движении газа около вогнутой стенки трубы, в области движения газа, где еще нет пересечения, получаем непрерывное течение внутри канала, со сжатием газа в волне Прандтля-Мейера. При прохождении скачка переменной интенсивности образуются вихри в потоке, вследствие неодинакового изменения энтропии газа на разных линиях тока. Если пересечение характеристик происходит непосредственно на стенке или стенка искривлена не плавно, а имеет излом, то скачок начинается на стенке.

А.А. Никольский и Г.И. Таганов в работе [78] впервые установили, что небольшое изменение геометрии обтекаемого контура, т.е. появление на контуре прямолинейных участков в области местных сверхзвуковых скоростей ведет к разрушению строго потенциального характера течения, к образованию скачка уплотнения. Задачи о возникновении ударных волн в местных сверхзвуковых зонах были исследованы Ф.И. Франклем [111 и др.], А.Буземанном [156, 157] и К.Г.Гудерлеем [20, 21, 167]. Их выводы сводятся к тому, что задача о нахождении непрерывного обтекания произвольно заданного контура с заданным на бесконечности значением дозвукового потока не имеет решения, если образуются зоны местных сверхзвуковых скоростей. Результаты исследований последних лет приводят к выводу, что в течениях типа Тейлора



должны, вообще говоря, образовываться ударные фронты, соединяющие поверхность перехода со стенками обтекаемого контура.

В одной из своих последних работ Ф.И. Франкль высказал предположение о том, что трансзвуковые течения, содержащие скачки, являются слабоустойчивыми, т.е. они не разрушаются только при достаточно малых возмущениях. Течение здесь становится неустойчивым в предельном случае, когда скачок уплотнения превращается в характеристику.

Из вышеизложенного следует, что если даже для некоторого сопла или трубы окажется возможным непрерывное течение с областями местных сверхзвуковых скоростей, то при малом изменении его формы и, вероятно, расхода, должен появиться скачок уплотнения.

### **1.7. Сверхзвуковое течение газа в сопле и слабоогнутой трубе.**

Рассмотрим теперь плоскопараллельное околозвуковое течение газа в сопле.

По-прежнему, обращаясь к уравнению Кармана (1.3.31), решение его будем искать в следующем виде

$$\varphi_0(x, y) = \frac{x^3}{3} f_2(y) + x \cdot f_1(y)$$

и относительно неизвестных функций  $f_1(y), f_2(y)$  получаем систему дифференциальных уравнений (1.5.17), (1.5.18). Используя частное решение уравнения (1.5.18) в виде  $f_2(y) = \frac{1}{y^2}$ , из второго уравнения системы находим,

$$\text{что } f_1(y) = \frac{c_2}{y} + c_1 y^2.$$

Тогда искомый потенциал скорости возмущения может быть представлен так:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{x^3}{3y^2} + x \cdot \left( c_1 y^2 + \frac{c_2}{y} \right).$$

$$(1.7.1)$$



Будем теперь исследовать поле течения газового потока соответствующего более простому случаю потенциала возмущения. Положим, что в решении (1.7.1)  $c_2 = 0$ . Тогда получаем, что

$$\varphi_0(x, y) = \frac{x^3}{3y^2} + c_1xy^2. \quad (1.7.2)$$

Уравнение звуковой линии, на которой осуществляется переход через скорость звука, имеет вид

$$x = \pm y^2 \sqrt{-c_1}, \quad (1.7.3)$$

где  $c_1$  - постоянная интегрирования и будем полагать, что  $c_1 < 0$ .

Для определения линии семейства характеристик  $c_{\pm}^0$  необходимо проинтегрировать следующее уравнение

$$(x'(y))^2 = \frac{x^2}{y^2} + c_1y^2. \quad (1.7.4)$$

Введем далее подстановку  $x = y \cdot \tilde{u}(y)$  Тогда уравнение (1.7.4) преобразуется к виду

$$y \cdot \tilde{u}'^2(y) + 2 \cdot \tilde{u} \cdot \tilde{u}' - c_1y = 0. \quad (1.7.5)$$

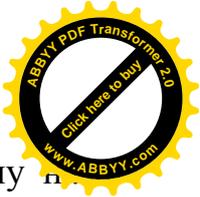
Найденное уравнение (1.7.5) имеет решение в параметрической форме

$$y = c_0 \cdot t \cdot |3t^2 - c_1|^{-2/3}, \quad \tilde{u} = \frac{y}{t}(t^2 - c_1) \quad (1.7.6)$$

Основываясь на формуле (1.7.6), определим уравнение характеристик, которое представляется как

$$x(t) = -\frac{c_0^2}{2} \cdot t \cdot |3t^2 - c_1|^{-4/3} (t^2 - c_1), \quad y(t) = |3t^2 - c_1|^{-2/3} c_0 t, \quad (1.7.7)$$

где  $t$  - параметр.



Построим теперь линии тока, соответствующие рассматриваемому течению идеального газа. Известно, что функция тока сохраняет постоянные значения вдоль линий тока, которые в плоских и осесимметричных течениях определяются соотношением  $\frac{dx}{u_0} = \frac{dy}{v_0}$ .

Согласно решению (1.7.1), в случае  $\tilde{n}_2 = 0$  определяем дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого изображают линии тока:

$$y(x^2 + c_1 \cdot y^4) \cdot y' - 2 \cdot c_1 \cdot x y^4 + \frac{2}{3} x^3 = 0.$$

(1.7.8)

После нескольких преобразований уравнение (1.7.8) приводим к нелинейному уравнению Абеля. Однако, полученное уравнение Абеля II рода не интегрируется в квадратурах, поэтому для построения линии тока уравнение (1.7.8) решалось численно на ЭВМ, с использованием метода Рунге-Кутты [70, 91 и др.].

По результатам вычислений были построены линии тока, которые показаны на рис. 1.7.1.

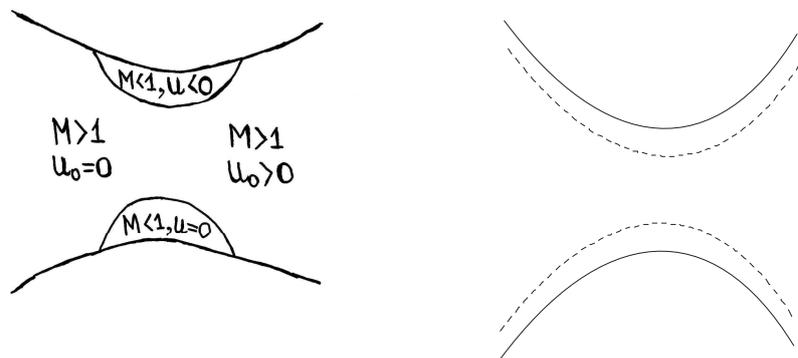


Рис 1.7.1

Отметим здесь, что линии тока являются стенками сопла Лаваля.

Исследования потенциала скорости (1.7.2) показывают, что истечение газа через сопло является всюду сверхзвуковым, за исключением области наименьшего критического сечения, где появляется зона смешанных течений, т.е. на выпуклой в сторону газа области образуются дозвуковые зоны, ограничивающиеся уравнением звуковой линии (1.7.3). Уместно здесь



напомнить, что число Маха больше единицы  $M > 1$  для сверхзвуковых течения, меньше единицы  $M < 1$  для дозвуковых течений. Если скорость газового потока равна значению местной скорости распространения звука, имеет место равенство  $M = 1$ .

Механизм возникновения дозвуковых зон можно объяснить следующим образом. При истечении газа через каналы переменного поперечного сечения, поток, если во входе имеет дозвуковую скорость, то при прохождении сужающейся части сопла будет ускоряться и приобретать сверхзвуковую скорость (мейеровский тип течения газа в сопле Лаваля, течение Тейлора). При истечении сверхзвукового потока через сопло, в сужающейся части, снижается скорость потока в окрестности критического сечения, и тем самым образуются зоны дозвуковых скоростей у выпуклой части стенки. Формы и положения ударной волны определяются из уравнения околосзвуковой поляры

$$\varphi_{0y}^2 = \frac{1}{2}(\varphi_{0x} + M - 1) \cdot (\varphi_{0x} - M + 1)^2,$$

(1.7.9)

где  $\varphi_0(x, y)$  - потенциал скорости возмущения  $\varphi_0(x, y)$ .

Потенциал скорости поступательного движения газа определяется согласно соотношению (1.1.5). Тогда скорость потока можно представить в виде

$$u = a_*(1 + \varepsilon \cdot u_0), \tag{1.7.10}$$

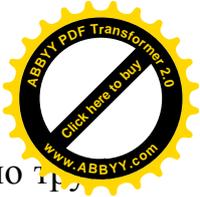
где  $\varepsilon = 1 - M_\infty^2$ ,  $u_0$  - скорость возмущенного потока газа, соответствующая потенциалу (1.7.2). Используя далее формулу (1.7.2), получаем

$$u = a_*(1 + \varepsilon(\frac{C_2 \cdot x^2}{y^2} + c_1 y^2)),$$

(1.7.11)

где  $c_1 < 0$ .

Пусть первоначально вверх по течению поток газа имеет околосзвуковую (сверхзвуковую) скорость, т.е. число Маха  $M_\infty \geq 1$ , а  $\varepsilon \ll 1$ .



В результате влияния потенциала скорости возмущения, двигаясь по трубе с переменным поперечным сечением в окрестности минимального сечения и ускоряясь, газ имеет сверхзвуковую скорость. Простые алгебраические вычисления показывают, что около выпуклой в сторону газа стенки слабоогнутой трубы имеет место  $u_0 < 0$ , в то время как во входе и на выходе выполняется условие  $u_0 > 0$ .

Как видно из (1.7.10), в случае скорости газового потока большего, чем значение критической скорости, т.е.  $u > a_*$  и условия  $M = \frac{u}{a_*} > 1$ , получаем сверхзвуковые течения газа. В минимальном поперечном сечении у стенок сопла значение скорости возмущения отрицательно  $u_0 < 0$ , в результате имеем, что  $u < a_*$  и  $M < 1$ . При этом здесь образуется область дозвуковых течений. Отметим, что в потенциале скорости возмущения (1.7.2) линия  $y = 0$  является особой линией.

Если в решении (1.7.1) полагать  $C_1 = 0$ , то получающимся решением

$$\varphi_0(x, y) = \frac{x^3}{3y^2} + \frac{C_2}{y}x \quad (1.7.12)$$

описывается сверхзвуковое течение газа в слабоогнутой трубе.

Уравнением звуковой линии является  $y = -\frac{1}{C_2}x^2$ , определяющее параболу.

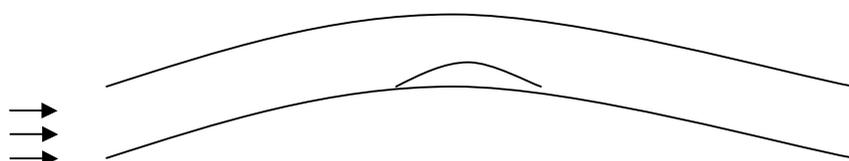
Здесь  $C_2$  – постоянная интегрирования.

Численно решая уравнение линии тока

$y(x^2 + C_2 \cdot y) \cdot y' + \frac{2}{3}x^3 + C_2 y = 0$  методом Рунге-Кутты на ЭВМ, построены линии

тока, представляющие стенки слабоогнутой трубы. Картина течения имеет следующий вид:

Рис. 1.7.2.





## Выводы

1. Применяя метод малых возмущений к основному уравнению газовой динамики - к уравнению Эйлера, написанному относительно потенциала скорости, выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Полученная рекуррентная система предоставляет возможность исследовать установившиеся стационарные потенциальные течения газа в трансзвуковом режиме скоростей.

2. Определены точные аналитические решения нелинейного уравнения Кармана, описывающие пространственно-трехмерные потенциальные течения совершенного газа в соплах: течения типа Мейера в сопле Лаваля, околосзвуковые течения газа с плоской звуковой поверхностью перехода при переходе от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям в окрестности горловины сопла с изломом стенки и течения газа в сопле с двумя сужениями. Определены соответствующие уравнения звуковых и характеристических поверхностей.

3. Получены точные решения основного уравнения трансзвуковой аэродинамики, описывающие пространственные сверхзвуковые течения газа в слабоогнутой трубе и в сопле. В окрестности выпуклой в сторону газового потока стенки трубы и сопла образуются дозвуковые зоны, а скорость поступательного движения потока газа превышает скорость звука и, тем самым, получается смешанное течение. Определены уравнения звуковой и характеристических поверхностей.

4. Интегрируя полученную рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, определены последующие приближения потенциала скорости возмущения. Для определения первого приближения потенциала скорости возмущения в случае сопла Лаваля, однородная часть рекуррентной системы приводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами и определено общее решение. Частное решение выражается в форме многочлена. Для нахождения общего решения



рекуррентной системы в случае пространственно-трехмерных околосзвуковых течений газа с плоской звуковой поверхностью перехода в окрестности центра сопла, однородное уравнение относительно первого приближения потенциала скорости приводится к уравнению Ламе. Решение полученного уравнения выражается через двоякопериодическую эллиптическую функцию Вейерштрасса.



## ГЛАВА II.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОКОЛОЗВУКОВЫХ И СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА.

#### 2.1 Вывод рекуррентной системы уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственных неустановившихся течений газа.

Рассмотрим пространственно-трехмерные неустановившиеся трансзвуковые течения газа, базируясь на нелинейном уравнении относительно потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + 2(u\varphi_{tx} + \vartheta\varphi_{ty} + w\varphi_{tz}) + 2(u\vartheta\varphi_{xy} + uw\varphi_{xz} + \vartheta w\varphi_{yz}) - \\ - (a^2 - u^2)\varphi_{xx} - (a^2 - \vartheta^2)\varphi_{yy} - (a^2 - w^2)\varphi_{zz} = 0, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где  $u = \varphi_x$ ,  $\vartheta = \varphi_y$ ,  $w = \varphi_z$  - составляющие вектора скорости потока.

Напомним, что изоэнтропические безвихревые течения имеют первый интеграл в форме интеграла Лагранжа-Коши:

$$\varphi_t + \frac{v^2}{2} + \bar{w} = const, \quad (2.1.2)$$

где через  $w$  обозначена удельная энтальпия газа, вычисляемая по формуле

$$\bar{w} = \frac{a^2}{\chi - 1}. \quad (2.1.3)$$

Здесь  $\chi = \frac{C_p}{C_v}$  - отношение удельных теплоемкостей газа при постоянных значениях давления и объема,  $a^2$  - квадрат скорости звуковых волн. Подставляя (2.1.3) в интеграл Лагранжа-Коши, получаем выражение для  $a^2$ :

$$a^2 = \frac{\chi + 1}{2} a_*^2 - \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) - (\chi - 1)\varphi_t, \quad (2.1.4)$$

где  $a_*$  - критическая скорость, равная скорости звука. Подставляя выражение (2.1.4) для квадрата скорости в уравнение Эйлера (2.1.1) и проводя алгебраические преобразования, получаем:



$$\begin{aligned}
& (a_*^2 - h^2(\varphi_y^2 + \varphi_z^2) - \varphi_x^2 - 2h^2\varphi_t)\varphi_{xx} + (a_*^2 - h^2(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) - \varphi_y^2 - 2h^2\varphi_t)\varphi_{yy} + \\
& + (a_*^2 - h^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - \varphi_z^2 - 2h^2\varphi_t)\varphi_{zz} - \frac{4}{\chi+1}(\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_y\varphi_{yy} + \varphi_z\varphi_{zz}) - \\
& - \frac{4}{\chi+1}(\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + \varphi_x\varphi_z\varphi_{xz} + \varphi_y\varphi_z\varphi_{yz}) - \frac{2}{\chi+1}\varphi_{tt} = 0.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Здесь  $h^2 = \frac{\chi-1}{\chi+1}$ .

Таким образом, наличие интеграла Лагранжа-Коши позволяет свести задачу расчета об изоэнтропических безвихревых течениях газа к задаче изучения уравнения в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости (2.1.5). Интегрирование полученного квазилинейного уравнения в частных производных относительно  $\varphi(x, y, z, t)$  представляет значительные математические трудности, связанные с нелинейностью и нестационарностью уравнения, а также трехмерностью течений.

Перейдем теперь к выводу приближенных уравнений, описывающих течения в трансзвуковом диапазоне скоростей.

Будем полагать, что скорости частиц близки по величине к критической скорости  $a_*$ , а углы между направлением вектора скорости и горизонтальной осью малы. Предположим также, что на бесконечности вверх по течению поток является поступательным, тогда решение уравнения (2.1.5), удовлетворяющее начальным и краевым условиям

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z, 0) = \psi_0(x, y, z), \varphi(x, 0, z, t) = \psi_1(x, z, t), \\
\varphi(x, y, 0, t) = \psi_2(x, y, t), \varphi_x(x, y, 0, t) = \psi_3(x, y, t)
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

с достаточно гладкими функциями  $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ , можно представить в следующем виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = a_*(x + \tilde{\varphi}(x, y, z, t)). \tag{2.1.7}$$

Потенциал скорости возмущения  $\tilde{\varphi}(x, y, z, t)$  будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k+1} \varphi_k(x, y, z, t), \tag{2.1.8}$$



где  $\varepsilon$  - малый параметр, в качестве которого можно взять величину

$$\varepsilon = 1 - M_\infty^2.$$

Здесь  $M_\infty$  - число Маха на бесконечности вверх по течению. Применим далее преобразование переменных  $x, y, z, t$  согласно формулам

$$x = \tilde{x}, \quad y = \varepsilon^{-1/2} \tilde{y}, \quad z = \varepsilon^{-1/2} \tilde{z}, \quad t = \varepsilon^{-1} a_*^{-1} \tilde{t}.$$

Подставляя потенциалы скорости (2.1.8), (2.1.7) в уравнение Эйлера (2.1.5) и группируя члены при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ , приравнявая далее их нулю, получаем  $n+1$  дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Приведем здесь лишь четыре приближения уравнения Эйлера (2.1.5), решениями которых являются приближения потенциала скорости возмущения  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и т.д.:

$$-(\chi + 1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{0x\tilde{t}} = 0. \quad (2.1.9)$$

$$\begin{aligned} &-(\chi + 1)(\varphi_{0x}\varphi_{1xx} + \varphi_{0xx}\varphi_{1x}) + \varphi_{1\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{1\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{1x\tilde{t}} = \frac{\chi + 1}{2}\varphi_{0x}^2\varphi_{0xx} + 2(\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \\ &+ \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}}) + (\chi - 1)(\varphi_{0\tilde{t}}\varphi_{0xx} + \varphi_{0x}(\varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}})) + 2\varphi_{0x}\varphi_{1\tilde{x}} + \varphi_{0\tilde{t}\tilde{t}}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

$$\begin{aligned} &-(\chi + 1)(\varphi_{0xx}\varphi_{2x} + \varphi_{0x}\varphi_{2xx}) + \varphi_{2\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{2\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{2x\tilde{t}} = (\chi + 1)(\varphi_{0x}\varphi_{1x}\varphi_{0xx} + (\varphi_{1x} + \\ &+ \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2)\varphi_{1xx}) + (\chi + 1)\left[\left(\frac{1}{2}\varphi_{0\tilde{y}}^2 + \frac{1}{2}\varphi_{0\tilde{z}}^2\right)\varphi_{0xx} + \varphi_{1\tilde{t}}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\tilde{t}}\varphi_{1xx}\right] + \\ &+ (\chi + 1)\left[\left(\frac{1}{2}\varphi_{0x}^2 + \varphi_{1x} + \varphi_{0\tilde{t}}\right)\varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0x}\varphi_{1\tilde{y}\tilde{y}}\right] + (\chi - 1)\left[\left(\frac{\varphi_{0x}^2}{2} + \varphi_{1x} + \varphi_{0\tilde{t}}\right)\varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} + \right. \\ &+ \varphi_{0x}\varphi_{1\tilde{z}\tilde{z}}] + 2\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{1\tilde{y}} + \varphi_{1x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{1\tilde{z}} + \varphi_{1x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}} + \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned} &+ \varphi_{0x}(\varphi_{0x\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}}) + 2(\varphi_{0x}\varphi_{1\tilde{x}} + \varphi_{1x}\varphi_{0\tilde{t}} + \varphi_{0\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{t}} + \varphi_{0\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{t}}) + \varphi_{1\tilde{t}\tilde{t}} \\ &-(\chi + 1)(\varphi_{0xx}\varphi_{3x} + \varphi_{0x}\varphi_{3xx}) + \varphi_{3\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{3\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{3x\tilde{t}} = (\chi + 1)[(\varphi_{0x}\varphi_{2x} + \frac{1}{2}\varphi_{1x}^2)\varphi_{0xx} + \\ &+ \varphi_{0x}\varphi_{1x}\varphi_{1xx} + \frac{1}{2}\varphi_{0x}^2\varphi_{2xx}] + (\chi + 1)[\varphi_{2x}\varphi_{1xx} + \varphi_{1x}\varphi_{2xx}] + (\chi + 1)[(\varphi_{1\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{1\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}} + \varphi_{2\tilde{t}})\varphi_{0xx} + \\ &+ (\chi + 1)[\varphi_{2x}\varphi_{1xx} + \varphi_{1x}\varphi_{2xx}] + (\chi + 1)[(\varphi_{1\tilde{y}}\varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{1\tilde{z}}\varphi_{0\tilde{z}} + \varphi_{2\tilde{t}})\varphi_{0xx} + \\ &+ \left(\frac{1}{2}(\varphi_{0\tilde{y}}^2 + \varphi_{0\tilde{z}}^2) + \varphi_{1\tilde{t}}\right)\varphi_{1xx} + \varphi_{0\tilde{t}}\varphi_{2xx}] + (\chi - 1)* \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$$\begin{aligned}
 & * \left[ \left( \varphi_{2x} + \varphi_{0x} \varphi_{1x} + \frac{1}{2} \varphi_{0z}^2 + \varphi_{1\tilde{r}} \right) \varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \left( \varphi_{1x} + \frac{1}{2} \varphi_{0x}^2 + \varphi_{0\tilde{r}} \right) \varphi_{1\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0x} \varphi_{2\tilde{y}\tilde{y}} \right] + \\
 & + (\chi - 1) \left[ \left( \varphi_{2x} + \varphi_{0x} \varphi_{1x} + \frac{1}{2} \varphi_{0y}^2 + \varphi_{1\tilde{r}} \right) \varphi_{0z\tilde{z}} + \left( \varphi_{1x} + \frac{1}{2} \varphi_{0x}^2 + \varphi_{0\tilde{r}} \right) \varphi_{1z\tilde{z}} + \varphi_{0x} \varphi_{2z\tilde{z}} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} (\chi + 1) \varphi_{0y}^2 \varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} + \frac{1}{2} (\chi + 1) \varphi_{0z}^2 \varphi_{0z\tilde{z}} + 2(\varphi_{0x\tilde{y}} \varphi_{2\tilde{y}} + \varphi_{1x\tilde{y}} \varphi_{1\tilde{y}} + \varphi_{2x\tilde{y}} \varphi_{0\tilde{y}}) + \\
 & + 2(\varphi_{0x\tilde{z}} \varphi_{2\tilde{z}} + \varphi_{1x\tilde{z}} \varphi_{1\tilde{z}} + \varphi_{2x\tilde{z}} \varphi_{0\tilde{z}}) + 2[\varphi_{1x} (\varphi_{0x\tilde{y}} \varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}} \varphi_{0\tilde{z}}) + \varphi_{0x} (\varphi_{0x\tilde{y}} \varphi_{1\tilde{y}} + \\
 & + \varphi_{1x\tilde{y}} \varphi_{0\tilde{y}} + \varphi_{0x\tilde{z}} \varphi_{1\tilde{z}} + \varphi_{1x\tilde{z}} \varphi_{0\tilde{z}})] + 2\varphi_{0y\tilde{z}} \varphi_{0\tilde{y}} \varphi_{0z} + 2[\varphi_{0x} \varphi_{2\tilde{r}x} + \varphi_{1x} \varphi_{1\tilde{r}x} + \varphi_{2x} \varphi_{0\tilde{r}x} + \\
 & + \varphi_{0y} \varphi_{1\tilde{r}y} + \varphi_{0z} \varphi_{1\tilde{r}z} + \varphi_{1y} \varphi_{0\tilde{r}y} + \varphi_{1z} \varphi_{0\tilde{r}z}] + \varphi_{2\tilde{r}\tilde{r}}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом, приравнявая нулю выражения при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$  и преобразуя их далее, получим уравнения в частных производных второго порядка, позволяющие определить последующие приближения потенциала возмущения в формальном ряду (2.1.8) -  $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \dots, \varphi_n$ . Полученные линейные дифференциальные уравнения (2.1.10) - (2.1.12) и последующие приближения к основному уравнению газовой динамики (2.1.5) можно представить в виде рекуррентно составляемых и интегрируемых систем дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & -(\chi + 1)(\varphi_{0xx} \varphi_{nx} + \varphi_{0x} \varphi_{nxx}) + \varphi_{n\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{n\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{n\tilde{r}\tilde{r}} = \\
 & = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \frac{\chi + 1}{2} \varphi_{ixx} \varphi_{n-1-i} + 2\varphi_{ix\tilde{y}} \varphi_{(n-1-i)\tilde{y}} + 2\varphi_{ix\tilde{z}} \varphi_{(n-1-i)\tilde{z}} + (\chi - 1)(\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}}) \varphi_{(n-1-i)x} \right] + \\
 & + (\chi - 1) \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{i\tilde{r}} \varphi_{(n-1-i)xx} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{ix} \varphi_{(n-1-i)\tilde{r}x} + \sum_{i=0}^{n-2} \left[ \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_{ixx} (G_{n-2-i} + D_{n-2-i}) + \varphi_{n-2-i} (\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}})) \right] + \\
 & + \sum_{i=0}^{n-2} (\chi + 1) \varphi_{(n-1-i)x} \varphi_{(i+1)xx} + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{(n-2-i)x} (\Phi_i + \Psi_i) + \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{i\tilde{y}} \varphi_{(n-2-i)\tilde{r}y} + \varphi_{i\tilde{z}} \varphi_{(n-2-i)\tilde{r}z} + \quad (2.1.13) \\
 & + (\chi - 1) \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{i\tilde{r}} (\varphi_{(n-2-i)\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{(n-2-i)\tilde{z}\tilde{z}}) + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi + 1}{2} (\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}} G_{n-3-i} + \varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}} D_{n-3-i}) + \\
 & + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}} D_{N-3-i} + \varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}} G_{n-3-i}) + 2 \sum_{i=0}^{n-3} (\varphi_{i\tilde{y}\tilde{z}} R_{n-3-i} + \varphi_{(n-1)\tilde{r}\tilde{r}}).
 \end{aligned}$$

В рекуррентной системе (2.1.13) введены следующие обозначения для функций  $\Phi_i, \Psi_i, D_i, R_i, G_i \varphi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), которые также выражаются последовательно через частные производные потенциала скорости возмущения



и используются при составлении выражений, содержащихся в правой части системы (2.1.13):

$$\Phi_i = \Phi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{y}} \varphi_{(m-k)\bar{y}}, \quad \Psi_i = \Psi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{z}} \varphi_{(m-k)\bar{z}}, \quad \varphi_m = \frac{1}{m\varphi_{0x}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{kx} \varphi_{m-k},$$

$$D_{n-2-i} = D_m = \frac{1}{m\varphi_{0\bar{z}}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{k\bar{z}} D_{m-k}, \quad G_{n-2-i} = G_m = \frac{1}{m\varphi_{0\bar{z}}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{k\bar{y}} G_{m-k}, \quad (2.1.14)$$

$$R_{n-2-i} = R_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\bar{y}} \varphi_{(m-k)\bar{z}}, \quad \varphi_0 = \varphi_{0x}^2, \quad G_0 = \varphi_{0\bar{y}}^2, \quad D_0 = \varphi_{0\bar{z}}^2.$$

Полученное уравнение (2.1.9) является фундаментальным для описания нестационарных течений газа с околосвуковыми скоростями и называется уравнением Линя-Рейснера-Тзяня. Уравнение (2.1.9) нелинейно, принцип суперпозиции решений к нему неприменим, но тем не менее, оно значительно проще полного уравнения (2.1.5), определяющего потенциал скорости  $\varphi(x, y, z, t)$ .

Для решения задач внешней и внутренней трансзвуковой аэродинамики необходимо определить точные решения уравнения Линя-Рейснера-Тзяня в форме (2.1.9) и найти необходимые приближения из полученной выше рекуррентной системы дифференциальных уравнений.

## 2.2. Пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в сопле Лаваля.

Будем предполагать, что рассматриваемые пространственные течения обладают взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Прямую, по которой пересекаются плоскости симметрии, будем называть осью сопла, а точку пересечения оси сопла с перпендикулярной к ней поверхностью перехода через скорость звука - центром течения.

Уравнение Линя-Рейснера-Тзяня (2.1.9) преобразуем к следующему виду:

$$-\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} - 2\varphi_{0xt} = 0. \quad (2.2.1)$$



Отметим, что уравнение (2.2.1) принадлежит к смешанному типу уравнения частных производных. Оно эллиплично в области, соответствующей дозвуковому течению, т.е. при  $\varphi_{0x} < 0$  и гиперболично в области сверхзвукового течения, т.е. при  $\varphi_{0x} > 0$ .

Будем искать решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня (2.2.1) в следующем виде:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = f(\tilde{u}) + dx^2 + my^4 + nz^4 + sxe^{-\lambda t} + \gamma(y^2 + z^2)e^{-\lambda t}, \quad (2.2.2)$$

где  $\tilde{u} = ax + by^2 + cz^2 + ke^{-\lambda t}$  - новая переменная. Здесь  $d, m, n, s, \gamma, a, b, c, k, \lambda$  - постоянные величины,  $f(u)$  - неизвестная функция.

Если существует связь между указанными величинами в виде

$$a = d^2, \quad b = c = -\frac{1}{2}d^3, \quad m = n = \frac{1}{6}d^3, \quad s = \frac{2k(1+n_1)}{d}, \quad \gamma = -n_1^2k, \quad \lambda = n_1d,$$

где  $n_1, d, k$  - произвольные постоянные, то потенциал скорости приводится к следующему виду:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = f(\tilde{u}) + dx^2 + \frac{1}{6}d^3(y^4 + z^4) + \frac{2k(1+n_1)}{d}xe^{-n_1dt} - n_1^2k(y^2 + z^2)e^{-n_1dt}, \quad (2.2.3)$$

$$\tilde{u} = d^2x - \frac{1}{2}d^3(y^2 + z^2) + ke^{-n_1dt}. \quad (2.2.4)$$

Подставляя соответствующие частные производные потенциала скорости  $\varphi_0(x, y, z, t)$  (2.2.3) в (2.2.1), относительно неизвестной функции  $f(\tilde{u})$  получаем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$d^6 f'(\tilde{u})f''(\tilde{u}) + 2d^3 \tilde{u}f'''(\tilde{u}) + 4d^3 f'(\tilde{u}) + 4\tilde{u} = 0. \quad (2.2.5)$$

Далее, интегрируя полученное дифференциальное уравнение (2.2.5), находим решение:

$$f(\tilde{u}) = \frac{d^3 C_0}{4} - \frac{3 + \sqrt{5}}{2d^3} \tilde{u}^2, \quad (2.2.6)$$

где  $C_0$  - постоянная интегрирования.

В общем случае дифференциальное уравнение (2.2.5) интегрируется в неявном виде, здесь рассматриваем частный случай, когда вторая постоянная интегрирования равна нулю:  $\tilde{c} = 0$ .



Подставляя найденное решение (2.2.6) в (2.2.3) и учитывая (2.2.5) определяем потенциал скорости  $\varphi_0(x, y, z, t)$  течения газа, удовлетворяющий уравнению Линя-Рейснера-Тзяня:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z, t) = & -\frac{(1+\sqrt{5})}{2}dx^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^2x(y^2+z^2) - \frac{(5+3\sqrt{5})}{24}d^3(y^4+z^4) - \\ & -\frac{3+\sqrt{5}}{4}d^2y^2z^2 - \frac{C_0d^3}{4} - \frac{(3+\sqrt{5})}{d^3}k(dx^2 - \frac{1}{2}d^3(y^2+z^2))e^{-n_1dt} - \frac{(3+\sqrt{5})}{2d^3}k^2e^{-2n_1dt} + \\ & + \frac{2k(1+n_1)}{d}xe^{-n_1dt} - n_1^2k(y^2+z^2)e^{-n_1dt}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Найденным решением описываются пространственные нестационарные потенциальные течения мейеровского типа в сопле Лаваля.

Составляющие вектора скорости движения частиц газа в сопле определяются по формулам

$$\begin{aligned} u = & -(1+\sqrt{5})dx + \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^2(y^2+z^2) + (2n_1-1-\sqrt{5})\frac{k}{d}e^{-n_1dt}, \\ g = & (3+\sqrt{5})d^2xy - \frac{5+3\sqrt{5}}{6}d^3y^3 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^3yz^2 + (3+\sqrt{5}-2n_1^2)kye^{-n_1dt}, \\ w = & (3+\sqrt{5})d^2xz - \frac{5+3\sqrt{5}}{6}d^3z^3 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}d^3y^2z + (3+\sqrt{5}-2n_1^2)kze^{-n_1dt}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Уравнение звуковой поверхности, через которую осуществляется переход течения от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым, определяется из условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = 0. \quad (2.2.9)$$

Приравнивая к нулю горизонтальную составляющую скорости, находим уравнение звуковой поверхности:

$$x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})}d_1(y^2+z^2) + \frac{2n_1-1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})d_1^2}e^{n_1dt}. \quad (2.2.10)$$

Полагаем, что направление потока газа совпадает с положительным направлением оси абсцисс  $Ox$ , тогда имеем, что  $d = d_1$ ,  $d_1 < 0$  и  $n_1 < 0$ . Из формулы (2.2.10) видно, что поверхностью перехода через скорость звука является параболоид вращения, который является выпуклым в сторону сверхзвуковой области и изменяется во времени, при  $t \rightarrow \infty$  из (2.2.7)



получается решение, описывающее пространственное стационарное околосвуковое течение газа в окрестности горловины сопла Лавала.

Решение уравнения (2.2.1) будем искать теперь в автомодельном виде

$$\varphi_0(x, y, z, t) = \theta^{3n-2} f(\xi, \eta), \quad (2.2.11)$$

где переменные  $\xi, \eta, \theta$  выражаются через  $x, y, z, t$  следующим образом:

$$\xi = x\theta^{-n}, \quad \eta = t\theta^{n-2}, \quad \theta = ay + bz \quad (2.2.12)$$

Здесь  $n$  - показатель автомодельности,  $a, b$  - произвольные постоянные.

Подставляя предполагаемый вид решения (2.2.11) в рассматриваемое уравнение (2.2.1), приводим его к нелинейному дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции  $f(\xi, \eta)$  двух переменных:

$$\begin{aligned} & [n^2(a^2 + b^2)\xi^2 - f_\xi]f_{\xi\xi} - 5n(n-1)(a^2 + b^2)\xi f_\xi + 7(n-2)(n-1)(a^2 + b^2)\eta f_\eta - \\ & - 2[1 + n(n-2)(a^2 + b^2)\xi\eta]f_{\xi\eta} + (n-2)^2(a^2 + b^2)\eta^2 f_{\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Предполагая выполнение условия  $a^2 + b^2 = 1$ , перепишем так последнее уравнение:

$$\begin{aligned} & (n^2\xi^2 - f_\xi)f_{\xi\xi} - 5n(n-1)\xi f_\xi + 7(n-2)(n-1)\eta f_\eta - \\ & - 2[1 + n(n-2)\xi\eta]f_{\xi\eta} + (n-2)^2\eta^2 f_{\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Нахождение точного аналитического решения уравнения (2.2.14) для любых значений показателя автомодельности " $n$ " представляет значительные математические трудности, связанные с нелинейностью этого уравнения. Однако при некоторых значениях показателя автомодельности  $n$  удается определить решения, удовлетворяющие уравнению (2.2.14).

Пусть теперь показатель автомодельности будет равен двум, тогда согласно дифференциальному уравнению (2.2.14), имеем:

$$(4\xi^2 - f_\xi)f_{\xi\xi} - 10\xi f_\xi - 2f_{\xi\eta} = 0 \quad (2.2.15)$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах и решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня имеет следующий вид:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = (x^2 + 2x\theta^2 + \frac{1}{3}\theta^4) \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} \quad (2.2.16)$$



Осуществляя далее переход к прежним физическим переменным  $x, y$  получаем:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = \{x^2 + 2x(a^2y^2 + 2abyz + b^2z^2) + \frac{1}{3}(a^4y^4 + 4a^3by^3z + 6a^2b^2y^2z^2 + 4ab^3z^3y + b^4z^4)\} \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} \quad (2.2.17)$$

Полученное решение описывает пространственные нестационарные течения мейеровского типа в сопле Лавая. Поток газа во входе, до горловины сопла, имеет дозвуковую скорость и при выходе, расширяясь, приобретает сверхзвуковую скорость. Как видно из полученного решения (2.2.17), в предельном случае, при  $t \rightarrow \infty$ , имеем установившееся пространственное течение газа, поверхность через которое осуществляется переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым потокам, определяемое из условия  $\varphi_{0x} = 0$  и имеет следующий вид:

$$x = -(ay + bz)^2. \quad (2.2.18)$$

Полученное решение (2.2.17) содержит параметры  $a, b$  и постоянную интегрирования  $C_1$ , которые определяют размеры и формы горловины сопла.

Течение через круглое сопло можно получить, положив в найденном решении  $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Из формулы (2.2.18) видно, что поверхностью перехода через скорость звука является параболоид вращения, который как и в плоских соплах, является выпуклым в сторону сверхзвуковых скоростей и стационарным.

Составляющие вектора скорости газа, согласно потенциалу скорости (2.2.17), определяются таким образом:

$$u = (x + (ay + bz)^2) \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}},$$

$$v = \{4x(8a^2y + abz) + \frac{4}{3}(a^4y^3 + 3a^3by^2z + 3a^2b^2z^2y + ab^3z^3)\} \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}}, \quad (2.2.19)$$

$$w = \{4x(8aby + b^2z) + \frac{4}{3}(a^3by^3 + 3a^3b^2y^2z + 3ab^3z^2y + b^4z^3)\} \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}}.$$



Квадрат скорости звуковых волн определяется из интеграла Лагранжа Коши (2.1.4). Используя выражения (2.2.19) и воспользуясь известными формулами, можно исследовать далее распределения давления и плотности частиц газа в сопле Лаваля.

Итак, отыскивая решения уравнения Линя-Рейснера-Тзяня в специальном виде (2.2.2) и в автомодельном виде (2.2.11) и (2.2.12), найдены решения, описывающие пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в сопле Лаваля. В предельном случае, при  $t \rightarrow \infty$ , получается установившееся пространственное течение мейеровского типа в сопле Лаваля, рассмотренное в главе I.

### 2.3. Трансзвуковое истечение газа из сосуда с критической скоростью.

Струйные течения газа на плоскости годографа исследованы Чаплыгиным.

Основное преимущество уравнения Чаплыгина

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{1-M^2}{\rho \cdot v} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

(где  $v$  - модуль вектора скорости,  $\theta$  - угол наклона вектора скорости к оси  $Ox$ ,  $M$  - число Маха,  $\psi$  - функция тока) состоит в том, что оно является линейным, по отношению к нему применим принцип суперпозиции частных решений. Бесконечные ряды частных решений, в случае их сходимости, могут быть использованы либо для построения течений с заданными свойствами, либо для удовлетворения предписанным наперед граничным условиям. Последние на плоскости годографа имеют весьма сложный вид, вследствие чего нелинейный характер исходной задачи, как правило, сохраняется. Точное решение прямой задачи с помощью годографа возможно лишь в том случае, когда имеем дело со струйными течениями. Проведенные исследования показали, что предельное решение уравнения Чаплыгина принадлежит к одному из типов трансзвуковых течений газа с прямой звуковой линией



перехода. Здесь показано, что  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \neq 0$  при  $v = a_*$ , где  $a_*$  - критическая скорость звука.

Среди всех течений с прямой звуковой линией перехода в предельном течении Чаплыгина, сжатие потока в окрестности линии перехода совершается наиболее быстрым образом. Это свойство позволяет использовать найденные решения в инженерных приложениях, для чего достаточно принять за стенки подводящей части сопла две линии тока, расположенные симметрично относительно оси  $Ox$ .

В данной работе, интегрированием уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, найдено решение, описывающее истечение из сосуда газа с критической скоростью. Интегрированием системы дифференциальных уравнений в симметрической форме, определены уравнения искривленной части поверхности сосуда, который выражается через экспоненциальную функцию. Переход частиц газа от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым осуществляется через плоскую поверхность, перпендикулярную к оси  $Ox$  и зависящую от временного параметра  $t$ .

Будем искать теперь решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня методом разделения переменных в форме

$$\varphi(x, y, z, t) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (2.3.1)$$

где  $\xi = ax + bt$ ,  $\eta = cy + d_1z$ ,  $\xi, \eta$  - новые переменные,  $f_1(\xi), f_2(\eta)$  - неизвестные функции,  $a, b, c, d_1$  - постоянные величины.

Подставляя искомый вид решения (2.3.1) в уравнение (2.2.1), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения. В этом случае решением уравнения (2.2.1) является следующий потенциал скорости:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = & -\frac{2b}{a^2}(ax + bt) + \frac{1}{3a^3\lambda} [4b^2 + 2aC_3 + 2a(ax + bt)]^{3/2} + \\ & + \frac{\lambda}{2(c^2 + d_1^2)}(c^2y^2 + 2cd_1yz + d_1^2z^2) + C_1(cy + d_1z) + C_2. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Здесь  $C_1, C_2$  - постоянные интегрирования,  $\lambda$  - постоянная разделения переменных.



Составляющие вектора скорости газового потока в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2b}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{(4b^2 + 2aC_3 + 2a(ax + bt))}, \\ g &= \frac{c\lambda}{c_1 + d_1^2} (cy + d_1z) + cC_1, \\ w &= \frac{\lambda d_1^2}{c_1 + d_1^2} (cy + d_1z) + cC_1. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Уравнением плоской звуковой поверхности, через которую осуществляется переход скоростей от дозвукового режима к сверхзвуковому, является следующее выражение:

$$x = -\frac{C_3}{a\lambda} - \frac{b}{a}t \quad (2.3.4)$$

Известно, что линии тока для нестационарных пространственных течений сжимаемой жидкости определяются уравнением

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{g} = \frac{dz}{w} = dt. \quad (2.3.5)$$

Подставляя выражения для составляющих скорости  $u, g, w$  из (2.3.3) в (2.3.5), интегрируя далее, получаем уравнение линий тока:

$$cy + d_1z = C_4 \left( \sqrt{(4b^2 + 2aC_3 + 2a(ax + bt))} \right)^{\frac{b}{a}} e^{\pm \frac{1}{a} \sqrt{(4b^2 + 2aC_3 + 2a(ax + bt))}}. \quad (2.3.6)$$

Полученным решением (2.3.2) описывается истечение газа с критической скоростью из сосуда.

Так как поток газа имеет дозвуковую скорость, с уменьшением площади сечения трубки тока, в сужающейся части сосуда число Маха будет постепенно увеличиваться, а при выходе из сосуда скорость течения газа достигнет скорость звука.

Искривленная часть стенки сосуда выражается через формулу (2.3.6), в виде экспоненциальной функции.

Задавая конкретные числа для постоянной интегрирования  $C_4$  и значения вида  $\psi = \pm C_4$ , получаем стенки сосуда, которые симметричны относительно оси  $Ox$ .



Переход через плоскую звуковую поверхность осуществляется, согласно выражению (2.3.4). Найденное решение (2.3.2) позволяет также сконструировать сопла Лавалья конечной ширины. Такие сопла получаются, как обычно, выбором любых двух относительно оси  $Ox$  симметрично расположенных линий тока в качестве стенок. Переход через скорость звука в них совершается на поверхности, перпендикулярной вектору скорости потока. За линией перехода течение может быть продолжено разными способами, наиболее быстрое расширение потока достигается в соплах с изломами стенок в точках их пересечения со звуковой поверхностью.

Истечение параллельного звукового потока из сосуда и истечение газа через конструированное сопло детально рассмотрено в работе автора [129].

#### **2.4. Обтекание искривленной поверхности. Обтекание газа в пространство с пониженным давлением.**

Предположим, что газ движется вдоль плоской поверхности  $XOY$ , которая, начиная с некоторой точки  $O$ , плавно искривляется так, что выпуклостью она обращена в сторону, занятую газом.

Предположим далее, что в области, примыкающей к прямолинейному участку стенки, поток однороден и имеет сверхзвуковую скорость  $V_1$ . Вверх от стенки поток газа принимается безграничным. Требуется найти течение, возникающее при обтекании искривленной стенки.

Будем искать решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня в следующем виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = f(\xi) + \alpha y^2 + \beta z^2, \quad (2.4.1)$$

где новая переменная  $\xi$  линейно зависит от исходных переменных  $x, y, z, t$ :

$$\xi = ax + by + cz + dt, \quad (2.4.2)$$

$\alpha, \beta, a, b, c, d$  - постоянные величины.

Определяя частные производные  $\varphi_x, \varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{zz}, \varphi_{xt}$  из (2.4.1) с учетом преобразования (2.4.2), подставляя далее полученные соотношения в исходное



уравнение (2.2.1), относительно неизвестной  $f(\xi)$  получаем следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$a^3 f'(\xi) f''(\xi) - (b^2 + c^2) f''(\xi) + 2adf''(\xi) 2[\alpha + \beta] = 0 \quad (2.4.3)$$

Однократное интегрирование приводит к уравнению

$$a^3 f'^2(\xi) - 2(b^2 - 2ad + c^2) f'(\xi) - 4(\alpha + \beta)\xi + 2C_1 = 0. \quad (2.4.4)$$

Общий интеграл уравнения (2.4.3) записывается в следующем виде:

$$f(\xi) = \frac{b^2 - 2ad + c^2}{a^3} \xi + \frac{1}{6a^6(\alpha + \beta)} \left\{ (b^2 - 2ad + c^2)^2 - 2a^3 C_1 + 4a^3(\alpha + \beta)\xi \right\}^{3/2} + C_2 \quad (2.4.5)$$

Подставляя полученное решение (2.4.5) в (2.4.1) и учитывая соотношение (2.4.2), находим решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня (2.2.1):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = & \frac{b^2 - 2ad + c^2}{a^3} (ax + by + cz + dt) + \\ & + \frac{1}{6a^6(\alpha + \beta)} \left\{ (b^2 - 2ad + c^2)^2 - 2a^3 C_1 + 4a^3(\alpha + \beta)(ax + by + cz + dt) \right\}^{3/2} + \alpha y^2 + \beta z^2 + C_2, \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

где  $C_1, C_2$  - постоянные интегрирования.

Определим теперь составляющие вектора скорости для нестационарного пространственного околосвукового течения газа, потенциал скорости которого представляется формулой (2.4.6):

$$\begin{aligned} u = & \frac{b^2 - 2ad + c^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \left\{ (b^2 - 2ad + c^2)^2 - 2a^3 C_1 + 4a^3(\alpha + \beta)(ax + by + cz + dt) \right\}^{1/2}, \quad (2.4.7) \\ g = & \frac{(b^2 - 2ad + c^2)b}{a^3} + \frac{b}{a^3} \left\{ (b^2 - 2ad + c^2)^2 - 2a^3 C_1 + 4a^3(\alpha + \beta)(ax + by + cz + dt) \right\}^{1/2} + 2\alpha y, \\ w = & \frac{(b^2 - 2ad + c^2)c}{a^3} + \frac{c}{a^3} \left\{ (b^2 - 2ad + c^2)^2 - 2a^3 C_1 + 4a^3(\alpha + \beta)(ax + by + cz + dt) \right\}^{1/2} + 2\beta z. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю горизонтальную составляющую скорости, получаем уравнение плоской звуковой поверхности, через которую осуществляется переход потока от дозвуковой к сверхзвуковой скорости:

$$z = \frac{C_1}{2c(\alpha + \beta)} - \frac{1}{c}(ax + by + dt) \quad (2.4.8)$$

Напишем уравнение характеристических поверхностей  $x = x(t, y, z)$  для нестационарных течений в виде



$$2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.4.9)$$

где выражение в правой части зависит от решения уравнения.

Подставляя выражение для  $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  из (2.4.1) в уравнение (2.4.9), имеем:

$$2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{b^2 - 2d + c^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \{(b^2 - 2ad + c^2)^2 - 2aC_1 + 4a^3(\alpha + \beta)(ax + by + cz + dt)\}^{1/2}. \quad (2.4.10)$$

Решение вида (2.4.6) описывает, по-видимому, пространственные нестационарные течения Прандтля-Мейера в декартовой системе координат при обтекании выпуклой поверхности околосзвуковым потоком газа. Если в решении (2.4.6) положить  $d = 0$ , то получаем пространственное стационарное течение Прандтля-Мейера.

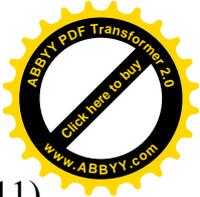
В случае, если  $b = 0$  или  $c = 0$ , решением (2.4.6) описывается нестационарное двумерное околосзвуковое течение Прандтля-Мейера. Интегрируя уравнение (2.4.10), можно определить характеристики двух семейств. Характеристиками первого семейства являются поверхности, которые ограничивают невозмущенный поток слева от начала координат. К однородному потоку примыкает течение Прандтля-Мейера с характеристиками первого семейства. Давление газа здесь уменьшается вдоль стенки и течение Прандтля-Мейера будет течением разрежения, в котором характеристические поверхности образуют расходящийся пучок.

Скорость течения газа превышает местную скорость звука, следовательно, поток газа является сверхзвуковым и однородным после поворота вдоль выпуклой стенки.

В работе [117] показано что в случае потенциальных плоскопараллельных течений газа решением уравнения Кармана

$$-\varphi_x \cdot \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

является потенциал скорости возмущения определяемый в следующем виде



$$\varphi(x, y) = \frac{b^2}{a^3}(ax + by) \pm \frac{1}{6a^6c} [b^4 + 4a^3C \cdot (ax + by) - 2a^3C_4]^{3/2} + Cy^2 + C_2 \quad (2.4.11)$$

В этом случае уравнение звуковой линии определяемой из условия  $\varphi_x = u = 0$  представляется в следующем виде

$$y = \frac{C_1}{2bc} - \frac{a}{b} \cdot x,$$

т.е. является прямой линией. Здесь  $a, b, c$  - постоянные,  $C_1$  - постоянная интегрирования. Из точек обтекаемого контура исходят характеристики первого семейства, которые являются прямыми линиями:

$$y = \frac{a}{b} \cdot x + \frac{a}{b} \cdot C_2.$$

Из этих же точек выходят характеристики второго семейства которые будут кривыми линиями удовлетворяющими уравнению параметрического вида

$$x = \frac{1}{C} \cdot \left( \frac{s^4}{4} - \frac{b}{a} \cdot s^3 \right) + \tilde{C}_1,$$

$$y = \frac{1}{C} \cdot \left( \frac{s^3}{3} - \frac{b}{2a} \cdot s^2 \right) + \tilde{N}_2.$$

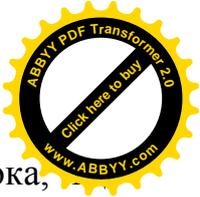
## 2.5. Исследование задачи обтекания крыла пространственно-трехмерным нестационарным сверхзвуковым газовым потоком.

Будем исследовать пространственно-трехмерные нестационарные до- и сверхзвуковые течения газа, опираясь на квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, записанное относительно потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  в следующем виде:

$$\varphi_{tt} + 2(u\varphi_{tx} + \vartheta\varphi_{ty} + w\varphi_{tz}) + 2(u\vartheta\varphi_{xy} + uw\varphi_{xz} + \vartheta w\varphi_{yz}) - (a^2 - u^2)\varphi_{xx} - (a^2 - \vartheta^2)\varphi_{yy} - (a^2 - w^2)\varphi_{zz} = 0, \quad (2.5.1)$$

где  $u = \varphi_x, \vartheta = \varphi_y, w = \varphi_z$  - составляющие вектора скорости,  $a^2$  - квадрат скорости звуковых волн, определяемый из интеграла Лагранжа-Коши так:

$$a^2 = \frac{\chi + 1}{2} a_*^2 - \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 + 2w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\varphi_t), \quad (2.5.2)$$



здесь  $a_*$  - критическая скорость, имеющая место в тех точках потока, скорость частиц газа равна скорости звука;  $\chi = C_p/C_v$  - отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Для линеаризации уравнения Эйлера (2.5.1) будем использовать метод малых возмущений.

Потенциал скорости газового потока для этого представим в следующей форме:

$$\varphi(x, y, z) = w_1 x + \tilde{\varphi}(x, y, z, t), \quad (2.5.3)$$

где  $\tilde{\varphi}(x, y, z, t)$  - потенциал скорости возмущения,  $w_1$  - скорость газа.

Выразим потенциал скорости возмущения в виде формального ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \tilde{\varphi}_n \quad (2.5.4)$$

Подставляя соотношения (2.5.4), (2.5.3) и (2.5.2) в исходное уравнение (2.5.1), группируя далее по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , получаем рекуррентную систему уравнений в частных производных второго порядка. Данная рекуррентная дифференциальная система обладает свойствами дифференциальных уравнений смешанного типа и выглядит так:

$$(w_1^2 - a_*^2) \tilde{\varphi}_{0xx} - a_*^2 \tilde{\varphi}_{0yy} - a_*^2 \tilde{\varphi}_{0zz} + \tilde{\varphi}_{0tt} + 2w_1 \tilde{\varphi}_{0xt} = 0, \quad (2.5.5)$$

$$\begin{aligned} (w_1^2 - a_*^2) \tilde{\varphi}_{nxx} - a_*^2 \tilde{\varphi}_{nyy} - a_*^2 \tilde{\varphi}_{nzz} + \tilde{\varphi}_{nnt} + 2w_1 \tilde{\varphi}_{nxt} = & - \left\{ 2w_1 \sum_i^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-1} T_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} \right\} + \\ & + \frac{(\chi - 1)}{(\chi + 1)} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ii} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xx} + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{ii} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ii} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zz} + w_1 \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yy} + \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zz}) + \right. \\ & + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} P_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \\ & \left. + \sum_{i=0}^{n-2} P_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} + \sum_{i=0}^{n-2} P_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} \right\} - \\ & - 2 \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xt} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yt} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zt} \right\} - \end{aligned} \quad (2.5.6)$$



$$-2 \left\{ w_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xy} + \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xy} \right\} - 2 \left\{ w_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xz} + \sum_{i=0}^{n-1} M_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xz} \right\} - 2 \sum_{i=0}^{n-2} L_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yz} ,$$

где  $n = 12, \dots$ ,  $T_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)x}$ ,  $R_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)x}$ ,  $S_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)y}$ ,

$$P_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}, \quad Q = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)y}, \quad M_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}, \quad L_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z} .$$

Нулевое приближение потенциала скорости возмущения  $\varphi_0$  удовлетворяет уравнению (2.5.5) - основному уравнению при исследовании сверхзвуковых течений газа, а потенциал  $\varphi_1$  является решением следующего неоднородного уравнения в частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned} (a_*^2 - w_1^2) \varphi_{1xx} + a_*^2 \varphi_{1yy} + a_*^2 \varphi_{1zz} - \varphi_{1tt} - 2w_1 \varphi_{1xt} = 2w_1 \varphi_{0x} \varphi_{0xx} + (w_1 \varphi_{0x} + \\ + \varphi_{0t}) \varphi_{0xx} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (w_1 \varphi_{0x} + \varphi_{0t}) \varphi_{0yy} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} (w_1 \varphi_{0x} + \varphi_{0t}) \varphi_{0zz} + 2(\varphi_{0x} \varphi_{0xt} + \varphi_{0y} \varphi_{0yt} + \\ + \varphi_{0z} \varphi_{0zt}) + 2w_1 (\varphi_{0y} \varphi_{0xy} + \varphi_{0z} \varphi_{0xz}), \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

где потенциал  $\varphi_0(x, y, z, t)$  соответствует основному неустановившемуся движению крыла, а потенциал  $\varphi_1(x, y, z, t)$  - добавочным неустановившимся движениям крыла, а  $x, y, z$  - координаты относительно подвижных осей, движущихся поступательно с крылом.

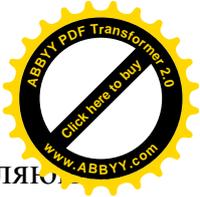
Рассмотрим граничные условия, которым удовлетворяют функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ .

Будем считать нормальную составляющую скорости  $\mathcal{G}_n$  на обеих сторонах поверхности крыла заданной по закону

$$\mathcal{G}_n = A_0 + A_1 f(t + \alpha) \quad (2.5.8)$$

Первое слагаемое здесь определяет поверхность крыла:  $A_0 = -w_1 \beta_0$  ( $\beta_0$  - угол атаки элементов крыла), а второе слагаемое - добавочные неустановившиеся движения крыла.

Будем полагать функции  $A_0, A_1, \alpha$  заданными в каждой точке поверхности крыла. Произвольную функцию  $f$  будем считать дважды непрерывно дифференцируемой функцией.



На основании заданной формы (2.5.8), для нормальной составляющей скорости точек на поверхности крыла, получаем условия обтекания

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = A_0(x, y), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = A_1(x, y)f[t + \alpha(x, y)], \quad (2.5.9)$$

которые должны выполняться как на верхней, так и на нижней сторонах крыла.

Кинематическое условие на вихревой пелене, выражающее непрерывность нормальной составляющей скорости частицы, выглядит так:

$$\left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=+0} = \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right]_{z=-0}, \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=+0} = \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{z=-0} \quad (2.5.10)$$

Кроме этого, на вихревой пелене должно выполняться динамическое условие о непрерывности распределения давления при переходе через вихревую пелену.

Воспользуемся интегралом Лагранжа в подвижной системе координат в виде

$$P = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} + \Gamma(t), \quad (2.5.11)$$

где  $\Gamma(t)$  - произвольная функция времени.

Отбрасывая в этом выражении малые величины второго порядка для потенциала скорости, получаем соотношения

$$\left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right]_{z=+0} = \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right]_{z=-0}, \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{z=+0} = \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + w_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right]_{z=-0}, \quad (2.5.12)$$

которые также должны выполняться на вихревой пелене.

Функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  являются нечетными относительно координаты  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x, y, -z, t) &= -\varphi_0(x, y, z, t) \\ \varphi_1(x, y, -z, t) &= -\varphi_1(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.13)$$

Сопоставляя соотношения (2.5.12) и (2.5.13), заключаем, что функции  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  должны удовлетворять условиям на вихревой пелене:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = w_1, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0. \quad (2.5.14)$$



Построим решение уравнения (2.5.5) относительно функции  $\varphi_0(x, y, z, t)$  в виде запаздывающего потенциала скорости от источника, движущегося прямолинейно с постоянной скоростью  $w_1$  и с изменяющейся во времени интенсивностью по произвольному закону  $f_1(t)$ . Запаздывающий потенциал скорости в точке  $M(x', y', z')$ , доставляемый системой источников, можно представить в неподвижных осях координат в следующем виде:

$$\varphi_1^*(x', y', z', t) = A \int_{t_1}^{t_2} \frac{f_0 \left[ t - t_1 - \frac{r}{c} \right] f_1 \left[ t - \frac{r}{c} \right]}{r} dt_1, \quad (2.5.15)$$

где  $r = \sqrt{(x' + ut_1)^2 + y'^2 + z'^2}$  - расстояние между точками.

Решение Прандтля для запаздывающего потенциала скорости, движущегося источника с постоянной интенсивностью имеет следующий вид:

$$\varphi_0^* = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 - \left( \frac{w_1^2}{a_*^2} - 1 \right) (y^2 + z^2)}} \quad (2.5.16)$$

Решение уравнения (2.5.5) можно представить в виде

$$\varphi^* = \frac{f_1^* \{ (w_1^2 - a_*^2)t - w_1x - r^* \} + f_2^* \{ (w_1^2 - a_*^2)t - w_1x + r^* \}}{r^*}, \quad (2.5.17)$$

где  $r^* = \sqrt{a_*^2 x^2 - (w_1^2 - a_*^2)(y^2 + z^2)}$ ;  $f_1^*$  и  $f_2^*$  - произвольные функции своих аргументов. Полагая в этом решении скорость движения источника  $w_1$  равной нулю, приходим к известному решению волнового уравнения для сферических волн.

Аналогичным способом можно определить потенциал скорости источника временной интенсивности  $f_1(t)$ , движущегося по любому закону. Например, для случая прямолинейного движения источника, при задании закона движения в виде  $X = F_1(t)$ ,  $Y = 0$  и  $Z = 0$  ( $F_1(t)$  - произвольная функция времени и  $|dF_1(t)/dt| > a_*$ ) скорость движения источника больше скорости звука), потенциал скорости источника, помещенного в начало координат, в координатах системы, перемещающейся вместе с источником, выражается следующей формулой:



$$\begin{aligned} \varphi^{**}(x, y, z, t) = & \frac{Cf_1(t_1)}{\sqrt{[x + F_1(t) - F_1(t_1)]^2 + y^2 + z^2} - [x + F_1(t) - F_1(t_1)] \frac{dF_1(t_1)}{dt_1}} + \\ & + \frac{Cf_1(t_1^*)}{\sqrt{[x + F_1(t) - F_1(t_1^*)]^2 + y^2 + z^2} - [x + F_1(t) - F_1(t_1^*)] \frac{dF_1(t_1^*)}{dt_1^*}}, \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

где параметры  $t_1 = t_1(x, y, z, t)$  и  $t_1^* = t_1^*(x, y, z, t)$  являются действительными корнями уравнения, которое в общем случае является трансцендентным.

## Выводы

1. Применяя метод малых возмущений и представляя потенциал скорости в виде формального ряда, из уравнения Эйлера получена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, используемая для исследования пространственно-трехмерных нестационарных течений газа в трансзвуковом режиме скоростей. Относительно нулевого приближения потенциала скорости возмущения получается нелинейное уравнения Линя-Рейснера-Тзяня.

2. Найдены точные решения уравнения Линя-Рейснера-Тзяня в двух видах, описывающие пространственно-трехмерные нестационарные течения мейеровского типа сопле Лавая. В первом случае решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня определено при использовании специальных видов решений, а во втором случае использованы способы построения автомодельных решений.

3. Применяя метод разделения переменных, определены решения уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, описывающее истечение газа из сосуда с критической скоростью. Определено решение основного уравнения трансзвуковой аэродинамики, соответствующее обтеканию искривленной поверхности и описывающее пространственные течения Прандтля-Мейера.

4. Выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственно-трехмерных нестационарных течений газа при до- и сверхзвуковых скоростях.



Относительно нулевого приближения потенциала скорости возмущения получается линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, являющееся основным при исследовании сверхзвуковых течений газа. Решена задача обтекания крыла пространственно-трехмерным сверхзвуковым потоком газа.



## ГЛАВА III

# ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ СМЕСИ ГАЗА И ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

### 3.1. Упрощение системы дифференциальных уравнений трансзвуковых течений смеси газа и твердых частиц.

Газовая динамика многофазных сред отличается от классической механики "чистого" газа присутствием в газовом потоке мелких жидких или твердых частиц различных размеров и форм, которые обмениваются с газом кинетической и тепловой энергией, а также могут переходить из одного агрегатного состояния в другое. Поскольку механизм движения многофазных сред заключается в увлечении инертных частиц вязкими силами газа и сопровождается теплообменом между частицами и газом, образованием новых частиц, их ростом, коагуляцией и т.д., то решение общей задачи о движении многофазных сред весьма актуально. В последние годы уделяется значительное внимание изучению движения в соплах смеси газа и частиц, в основном, в связи с необходимостью определения характеристик двигателей, работающих на твердых топливах. Наличие в газе твердых или жидких частиц различных размеров приводит к значительному усложнению физической картины течения по сравнению с течением чистого газа и, вследствие этого, к усложнению математических моделей явлений и методов решения. Основными работами, посвященными общим вопросам механики аэрозолей, являются работы Н.А. Фукса и Л.Левина.

Х.А. Рахматулиным [86] было введено понятие многоскоростной и многотемпературной среды, т.е. среды, в каждой точке которой имеется столько скоростей и температур, из скольких фаз состоит среда. В настоящее время такая схематизация многофазного потока лежит в основе подавляющего большинства моделей многофазных сред.



Одной из первых работ, посвященных исследованию течений газа конденсированными частицами в соплах, были работы Альтмана, Картера, Гильберта, Девиса, в которых были рассмотрены предельные случаи - равновесное и полностью неравновесное (замороженное) течения, установлено большее влияние на тягу отставания частиц по скорости, чем отставание по температуре, установлена зависимость потерь от размера частиц. Однако, в этих работах не учитывалось влияние частиц на параметры газа, а потери импульса определялись лишь в зависимости от отставания.

Дж. Клигелль [58, 59 и др.], задавшись отставанием по скорости и учитывая влияние частиц на газ, показал, что скорости частиц и газа меняются вдоль сопла по линейному закону. При этом уравнения энергии и теплообмена между газом и частицами удовлетворяются одновременно, если отставание по температуре связать с отставанием по скорости. Температура газа и частиц меняется при этом вдоль сопла по квадратическому закону. Идея использования постоянства отставания при решении задач двухфазных течений использовалась многими авторами. Так, Рудингер, изучая одномерные двухфазные потоки с учетом объёма частиц и условия постоянства отставания и большого количества частиц свел решение задачи к системе алгебраических уравнений. Эта идея использовалась также и другими авторами при расчётах трансзвуковых течений. Первой работой, в которой были исследованы двухфазные течения в соплах заданной формы с учетом отставания по скорости и температуре, а также влияния частиц на газ, была работа Бейли, Нильсона, Серра и Цупкина [10], выполненная при основных допущениях, сформулированных ещё Дж. Клигелем: частицы представляют собой сферы одинакового радиуса и не взаимодействуют между собой, пренебрегают их относительным объёмом, фазовые переходы отсутствуют, отсутствуют потери массы и энергии, вязкость учитывается только при взаимодействии частиц с газом, учитывается только конвективный теплообмен между частицами и газом, отсутствует давление вследствие броуновского движения частиц и т.д.



Бейли и др. рассчитали траектории частиц в различных типах осесимметричных сопел (без учета влияния отставания частиц на газ). Расчеты показали, что в сужающейся части сопла происходит сепарация к оси, причем увеличивается сепарация с ростом размера частиц. Рост размера частиц или уменьшение диаметра минимального сечения ведет к сдвигу точек встречи частиц со стенкой вниз по потоку.

Расчет трансзвукового потока даже для одномерных течений газа с частицами в заданном контуре сопла является весьма трудоёмким процессом, особенно при большом содержании частиц. Это объясняется тем, что скорость звука достигается в расширяющейся части сопла в точке, положение которой заранее не известно. Наиболее простым, надёжным и удобным методом расчета трансзвуковых течений является обратный метод, нашедший широкое распространение и позволяющий при заданном распределении параметров вдоль оси сопла построить его контур. Поскольку в большинстве практических случаев задается форма контура, то в этих случаях применение обратного метода требует проведения нескольких итераций. Определённый теоретический интерес представляет статья Хассана [104], в которой получено решение в аналитической форме обратной одномерной задачи о движении в сопле газа с частицами. Отметим, что представляют некоторый практический интерес работы, посвящённые линеаризованным течениям. Дополнительно к допущениям, применяемым для одномерных течений, предполагают о малости отставания частиц по скорости и температуре. В этом случае удается записать в квадратурах формулы для расчёта параметров течения в заданном канале. Одним из первых анализ линеаризованных течений двухфазных сред провел У. Ренни [86]. В этой работе для параметров потока были получены следующие результаты: удельный импульс не зависит от параметров в докритической части сопла, запаздывание частиц обратно пропорционально к квадратному корню из отношения радиуса кривизны контура сопла в минимальном сечении к радиусу этого сечения. В работах Марбла и Л.Е.Стернина [97] метод линеаризации



использовался для постановки и решения вариационных задач об оптимальных контурах сопел.

При исследовании двухфазных потоков, наряду с линеаризацией по отставанию, получил широкое распространение и традиционный подход, при котором малым параметром служит толщина обтекаемого тела. В качестве ещё одного малого параметра можно использовать относительную массовую концентрацию частиц. В этом случае нулевое приближение соответствует течению газа без частиц. В указанной работе исследуются нестационарные трансзвуковые двумерные течения газа и твердых частиц в различных видах сопел, а также задачи обтекания тел двухфазным трансзвуковым потоком. При этом здесь используется метод малых возмущений.

Прежде чем составить уравнение движения среды, состоящей из газа и частиц одинаковых размеров, остановимся на допущениях, позволяющих решить рассматриваемую задачу вышеизложенными методами (отметим, что почти все допущения были введены Дж. Клингелем):

- среда является двухскоростной и двухтемпературной, т.е. в каждой точке потока имеется два вектора скорости (скорость газа и скорость частиц), две температуры, при этом частицы считаются непрерывно распределёнными по всему объёму среды;
- газ считается совершенным, а удельные теплоёмкости газа и частиц постоянны;
- частицы не взаимодействуют друг с другом, а их объём пренебрежительно мал;
- давление создаётся только газом, а тепловое (броуновское) движение частиц не влияет на давление системы;
- единственными силами, которые действуют на частицы, являются силы сопротивления, обусловленные вязкостью; ускорение частиц происходит под действием этих сил;
- течение нестационарное;
- массовые расходы газа и частиц вдоль течения постоянны;



- потери массы и энергии в среде отсутствуют, а обмен энергией между газом и частицами осуществляется только путём конвекции;
- частицы имеют достаточно высокую теплопроводность по сравнению с газом, поэтому распределение температуры по всему объёму частиц можно считать постоянной;
- гравитационными и электрическими силами можно пренебречь.

На основании вышеуказанных предположений, рассмотрим систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений неразрывности, движения и энергии, которые соответствуют обеим фазам.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla w = 0, \quad \rho \frac{dw}{dt} + \nabla P + \rho_s f = 0, \quad \rho \frac{d}{dt} \left( h + \frac{1}{2} w^2 \right) + \rho_s \cdot \quad (3.1.1)$$

$$\cdot \frac{d}{dt} \left( e_s + \frac{1}{2} w_s^2 \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{d\rho_s}{dt} + \rho_s \nabla w_s = 0, \quad \frac{dw_s}{dt} = f, \quad \frac{de_s}{dt} = q,$$

где  $f$  - сила межфазного взаимодействия, отнесённая к единице массы соответствующей фазы,  $q$  - тепловой поток между фазами,  $w$  - вектор скорости,  $P$  - давление,  $\rho$  - плотность, а параметрам частиц придан нижний индекс  $s$ . Система замыкается уравнениями состояния для газа и частиц, которые имеют вид:

$$h = h(t, P), \quad p = \rho RT / \mu, \quad e_s = e_s(T), \quad (3.1.2)$$

где  $e_s$  - удельная внутренняя энергия частиц,  $h$  - удельное теплосодержание совершенного газа.

Система уравнений в частных производных для двухфазного течения смеси газа и твердых частиц без фазовых превращений приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho_s}{\rho} \varphi^f (U - U_s) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\rho_s}{\rho} \varphi^f (V - V_s) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V}{y} = 0,$$



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{\rho_s}{\rho} [\varphi^f (U - U_s)^2 + \varphi^f (V - V_s)^2 + \\
& + \varphi^q (T - T_s)] = 0, \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s U_s)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_s V_s)}{\partial y} + \lambda \frac{\rho_s V_s}{y} = 0, \frac{\partial U_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \\
& + V_s \frac{\partial U_s}{\partial y} = \varphi^f (U - U_s), \frac{\partial V_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial V_s}{\partial x} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial y} = \varphi^f (V - V_s), \frac{\partial e_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial e_s}{\partial x} + \\
& + V_s \frac{\partial e_s}{\partial y} = \varphi^q (T - T_s), P = \rho R T, h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} T, e_s = \delta T_s.
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Здесь коэффициенты  $\varphi^f$  и  $\varphi^q$  соответствуют стоксовскому режиму динамического и теплового взаимодействия газа с частицами. При  $\lambda = 0$  система (3.1.3) моделирует плоскопараллельные нестационарные течения двухфазной среды, а при  $\lambda = 1$  - осесимметричные течения. Тепловой поток  $q$  определяется формулой

$$q = \frac{NU C_p (T - T_s)}{3 Pr St} = \varphi^q (T - T_s), \tag{3.1.4}$$

где  $\varphi^q = \frac{NU C_p}{3 Pr St}$ ,  $NU$  - число Нуссельта,  $Pr$  - число Прандтля,  $C_p$  - удельная теплоёмкость газа при постоянном давлении,  $T$  и  $T_s$  - температуры газа и частицы соответственно. Напомним определения чисел Нуссельта и Прандтля:

$$NU = \frac{2r\alpha}{\lambda_T}, Pr = \frac{C_p \eta}{\lambda_T}, \tag{3.1.5}$$

где  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи от частиц к газу,  $\lambda_T$  - коэффициент теплопроводности газа.

Отметим, что при постоянных значениях  $\varphi^f$ ,  $\varphi^q$ ,  $w$  и  $T$  имеет место соотношение

$$\Delta = \Delta_o \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right), \tag{3.1.6}$$

где под  $\Delta$  понимается скоростное ( $w - w_s$ ) или температурное ( $T_s - T$ ) отставание, под  $t_1$  - соответственно  $(\varphi^f)^{-1}$  или  $(\varphi^q)^{-1}$ ,  $\Delta_o$  соответствует  $\Delta$



при  $t = 0$ . Отсюда становится ясным физический смысл параметров  $\varphi^f$  и  $\varphi^g$

$\varphi^g$   $\varphi_2$ : величины  $\frac{1}{\varphi^f}$  и  $\frac{1}{\varphi^g}$  численно равны времени, в течение которого

отставание  $\Delta$  уменьшается в  $e$  раз. Некоторые авторы называют параметры

$\varphi^f$  и  $\varphi^g$  временем релаксации. Проекция силы  $\bar{f}$ , действующей на частицы,

определяются из соотношений:

$$f_x = St^{-1} \bar{C}_x (U - U_s) = \varphi^f (U - U_s), f_y = St^{-1} \bar{C}_x (V - V_s) = \varphi^g (V - V_s). \quad (3.1.7-3.1.8)$$

Здесь  $St = \frac{2\rho_s r_s^2 a_*}{9\eta r_*}$  - число Стокса.

Для расчета движения двухфазной среды, описываемой системой (3.1.3), ставятся следующие начальные и граничные условия:

$$U(x, 0, t) = f_0(x, t), U_s(x, 0, t) = f_1(x, t), V(x, 0, t) = 0, V_s(x, 0, t) = 0 \quad (3.1.9)$$

$$U(x, y, 0) = f_2(x, y), U_s(x, y, 0) = f_3(x, y), V(x, y, 0) = f_4(x, y), V_s(x, y, 0) = f_5(x, y) \quad (3.1.10)$$

Вверх по течению, т.е. при  $x \rightarrow -\infty$  выполняются условия

$U_e = U_{es}, V_e = V_{es}, T_e = T_{es}$ . Здесь  $U_e, V_e, T_e$  - составляющие вектора скорости и

температура двухфазной среды, соответствующие равновесному течению.

Кроме условий (3.1.9) и (3.1.10), должны быть заданы параметры торможения, а

также отношения плотности частиц и газа  $\frac{\rho_s}{\rho_2}$  при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\frac{\kappa_e P}{(\kappa_e - 1)\rho_\Sigma} + \frac{q_e^2}{2} = \frac{\kappa_e + 1}{2(\kappa_e - 1)}, \frac{P}{(\rho_\Sigma)^{\kappa_e}} = \frac{1}{\kappa_e}, \frac{\rho_s}{\rho} = \frac{1 - m}{m}, \rho_\Sigma = \rho_s + \rho, q_e = \sqrt{U_e^2 + V_e^2} \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (3.1.11)$$

Здесь  $\rho_\Sigma$  - суммарная плотность смеси,  $m$  - относительная массовая

концентрация или расход газа,  $\kappa_e$  - показатель адиабаты равновесной

двухфазной смеси:  $\kappa_e = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \alpha = \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1 - m}{m} \delta$ ,  $\delta$  - константа, равная удельной

теплоёмкости частиц,  $\kappa$  - показатель адиабаты газа. Для случая равномерного

поступательного потока смеси вверх по течению задача расчета течения

сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3.1.3).



Разлагая в ряд все основные физические величины рассматриваемой системы

по малому параметру  $\varepsilon = \frac{1}{\varphi^f} = \frac{1}{\varphi^q}$ , получаем:

$$\begin{aligned} U &= q_0 + \varepsilon U_e + \varepsilon^3 U_1 + \dots, U_S = q_0 + \varepsilon U_{eS} + \varepsilon^3 U_{1S} + \dots, V = \varepsilon^{3/2} V_e + \varepsilon^{5/2} V_1 + \dots, \\ V_S &= \varepsilon^{3/2} V_{eS} + \varepsilon^{5/2} V_{1S} + \dots, \rho = \rho_e (1 + \varepsilon^3 \rho_1 + \dots), \rho_S = \rho_{eS} (1 + \varepsilon^3 \rho_{1S} + \dots) \\ T &= T_e + \varepsilon^3 T_1 + \dots, T_S = T_{eS} + \varepsilon^3 T_{1S} + \dots, P = P_e + \varepsilon^3 P_1 + \dots, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

где  $U_e, V_e, T_e, \rho_e, P_e, U_{eS}, V_{eS}, T_{eS}, \rho_{eS}, P_{eS}$  - параметры равновесного течения смеси газа и твердых частиц,  $\varepsilon$  - параметр, характеризующий отставание. В разложении (3.1.12) величина  $q_0$  является скоростью звука при торможении потока, т.е. критической скоростью звука, здесь будем считать, что  $q_0 = 1$ , это возможно при подборе соответствующих масштабов измерения. Переменные здесь подвергаются растяжению по следующим формулам:

$$\tilde{t} = 2t\varepsilon, \tilde{y} = \varepsilon^{1/2} y, \tilde{x} = x.$$

Далее для удобства опустим знак тильды над переменными. Подставляем теперь разложения (3.1.12) и все производные от составляющих скорости, плотности, давления, удельной внутренней энергии, удельного теплосодержания в систему (3.1.3). Группируя члены уравнения (3.1.3) по степеням малого параметра  $\varepsilon^2$ , относительно составляющих скорости  $U_e, V_e$  двухфазного равновесного течения в трансзвуковом приближении получаем первое уравнение системы Линя-Рейснера-Тзяня:

$$\begin{cases} U_e U_{ex} - V_{ey} + 2U_{et} = 0, \\ U_{ey} - V_{ex} = 0 \end{cases} \quad (3.1.13)$$

Второе уравнение системы (3.1.13) есть условие безвихренности двухфазного потока.

Для определения последующих членов ряда (3.1.12) получаем систему линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1-m}{m}(U_1 - U_{1S}) + \frac{1}{m\rho_e} \frac{\partial P_1}{\partial x} + V_e \frac{\partial U_e}{\partial y} = 0 \quad (a), \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial V_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + \\ + \frac{1-m}{m}(V_1 - V_{1S}) = 0 \quad (б), \quad \frac{\partial V_{1S}}{\partial x} + V_{eS} \frac{\partial U_{eS}}{\partial y} - (U_1 - U_{1S}) = 0 \quad (в), \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \end{aligned}$$

$$= 2V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + \kappa_e U_e^2 \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (z), \quad \frac{\partial U_{1S}}{\partial x} + \frac{\partial V_{1S}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{1S}}{\partial x} = 2V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} + \kappa_e U_e^2 \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (d), \quad (3.1.14)$$

$$B_o \frac{\partial T_1}{\partial x} + (T_1 - T_{1S}) = \frac{1}{m\rho_e} \frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (e), \quad \frac{\partial U_{1S}}{\partial x} - (U_1 - U_{1S}) + \frac{\delta}{A_o} \frac{\partial T_{1S}}{\partial x} - \frac{1}{A_o} (T_1 - T_{1S}) =$$

$$= \frac{\partial V_e}{\partial x} \quad (ж), \quad \frac{\partial V_{1S}}{\partial x} + 2 \frac{\partial V_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial V_e}{\partial x} - (V_1 - V_{1S}) = 0 \quad (з), \quad \frac{m\kappa_e - 1}{m\kappa_e} \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{1}{m\kappa_e} \frac{\partial V_1}{\partial y} +$$

$$+ \frac{1-m}{m} \frac{\partial U_{1S}}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{\kappa_e + 1}{2m\kappa_e} U_e^2 \frac{\partial U_e}{\partial x} - \frac{(m-1)\kappa_e + 2}{m\kappa_e} V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} - \frac{m\kappa_e - 1}{m\kappa_e} V_e \frac{\partial V_e}{\partial y} \quad (к),$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho_e T_1 + \frac{1}{2} \rho_e T_e \rho_1, \quad B_o = \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1}, \quad A_o = \frac{\delta(\kappa_e - 1)}{(1-m)\kappa_e},$$

где  $U_1, U_{1S}, V_1, V_{1S}, \rho_1, \rho_{1S}, T_1, T_{1S}, P_1$  - первые приближения физических параметров двухфазного потока в асимптотическом ряду (3.1.12). Здесь у газодинамических величин индекс  $S$  соответствует твердой фазе.

Уравнение (3.1.13) описывает нестационарные трансзвуковые, потенциальные течения двухфазной среды. При этом здесь равновесное течение наступает в области трансзвуковых скоростей.

Определив решения  $U_e, V_e$  из уравнения Линя-Рейснера-Тзяня (3.1.13), можно найти параметры двухфазного равновесного течения, которые выражаются через  $U_e, V_e$  так:

$$\rho_{\Sigma e} = \left( \frac{\kappa_e + 1}{2} - \frac{\kappa_e - 1}{2} q_e^2 \right)^{\frac{1}{\kappa_e - 1}}, \quad q_e^2 = (q_o + U_e)^2 + V_e^2, \quad \rho_e = m\rho_{\Sigma e}, \quad \rho_{eS} = (1-m)\rho_{\Sigma e}, \quad (3.1.15)$$

$$P_e = \frac{(\rho_{\Sigma e})^{\kappa_e}}{\kappa_e}, \quad T_e = \frac{P_e}{\rho_e}, \quad h_e = \frac{\kappa_e}{\kappa_e - 1} T_e, \quad e_{eS} = \delta T_e,$$

где  $\kappa_e$  - показатель адиабаты двухфазного равновесного потока, когда составляющие скорости и температуры обеих фаз равны и определяются следующей формулой:

$$\kappa_e = \frac{\kappa + (\kappa - 1) \frac{1-m}{m}}{1 + (\kappa - 1) \frac{1-m}{m} \delta}.$$

Здесь  $m$  - заданная не превышающая единицу величина, характеризующая относительную массовую концентрацию смеси.



Определив точное решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, находящееся в (3.1.15), найдем составляющие скорости равновесного трансзвукового течения смеси газа и твердых частиц  $U_e, V_e$ . Подставляя выражение для  $U_e, V_e$  в (3.1.15), получаем возможность для вычисления плотности, давления, температуры и внутренней энергии среды в состоянии равновесия фаз.

Система линейных уравнений в частных производных первого порядка (3.1.14) позволяет определить поправки к газодинамическим величинам, соответствующим смеси газа и твердых частиц.

Приведем несколько примеров исследования трансзвуковых течений двухфазных сред в соплах Лавалья и пример обтекания потоком смеси и газа различных тел.

### 3.2. Расчет трансзвуковых течений двухфазной смеси в сопле Лавалья.

Рассмотрим двумерное нестационарное трансзвуковое течение смеси газа и твердых частиц в сопле Лавалья.

Ранее нами было найдено точное решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, описывающее нестационарное потенциальное трансзвуковое течение мейеровского типа в сопле, представленное в виде (2.2.16), (2.2.17). Составляющие вектора скорости  $U, V$  определяются, согласно решению (2.2.17), по формуле (2.2.19). В двухфазном равновесном течении скорость несущей фазы, т.е. газа и скорость твердых частиц одинаковы. Поэтому, используя выражения для составляющих скорости потока газа (2.2.19), в случае двумерных нестационарных течений можем написать:

$$U = U_e = U_{eS}, V = V_e = V_{eS}, U_e = U_{eS} = 2(x + y^2) \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}},$$
$$V_e = V_{eS} = \left(4xy + \frac{4}{3}y^3\right) \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} \quad (3.2.1)$$



Подставляя далее (3.2.1) в (3.1.15), определим вначале квадрат скорости двухфазного потока:

$$q_e^2 = \left( q_0 + 2(x + y^2) \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} \right)^2 + 16 \left( xy + \frac{1}{3} y^3 \right)^2 \left( \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} \right)^2 \quad (3.2.2)$$

Газодинамические величины  $\rho_{\Sigma e}, \rho_e, \rho_{eS}, P_e, T_e, h_e, h_{eS}$  при двухфазном равновесном течении определяются согласно (3.1.15). Перейдем теперь к нахождению первых приближений вышеуказанных газодинамических величин.

Вычитая почленно из (3.1.14, а) уравнение (3.1.14, в), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_1 - U_{1S}) + (U_1 - U_{1S}) = - \frac{1}{m \rho_e} \frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad (3.2.3)$$

которое позволяет определить скоростное отставание  $(U_1 - U_{1S})$  горизонтальной составляющей скорости вдоль оси симметрии сопла Лаваля. Подставляя выражение для скоростного отставания  $(U_1 - U_{1S})$  в уравнения (3.1.14, а) и (3.1.14, в) и интегрируя их, находим скорости  $U_1, U_{1S}$ , соответствующие обеим фазам.

Аналогичным образом, из уравнения (3.1.14, б) вычитая почленно (3.1.14, з), получаем линейное уравнение в частных производных первого порядка относительно скоростного отставания  $(V_1 - V_{1S})$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} (V_1 - V_{1S}) + \frac{V_1 - V_{1S}}{m} = 0. \quad (3.2.4)$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем:

$$V_1 - V_{1S} = B e^{-\frac{x}{m}}, \quad (3.2.5)$$

где  $B$  - постоянная интегрирования.

Отсюда видно, что отставание вертикальной составляющей скорости твердых частиц от скорости частиц газа изменяется согласно экспоненциальному закону.

Подстановка полученных выражений для  $(V_1 - V_{1S})$ , а также решений уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, соответствующих равновесным течениям двухфазной среды  $(U_e, V_e)$ , в дифференциальное уравнение (3.1.14, б), предоставляет



возможность определить составляющую вектора скорости газа  $V_1$ . Согласно (3.2.5) определяем первое приближение скорости  $V_{1S}$  твердых частиц.

Рассмотрим далее температурное отставание - величину  $T_1 - T_{1S}$  двухфазной среды, смеси газа и твердых частиц. Из уравнения (3.1.14, е) почленно вычитаем уравнение (3.1.14, ж) и для определения температурного отставания  $T_1 - T_{1S}$  получаем уравнение:

$$\frac{\partial(T_1 - T_{1S})}{\partial x} + \left( \frac{1}{B_o} + \frac{1}{\delta} \right) (T_1 - T_{1S}) - \frac{1}{B_o m \rho_e} \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{A_o}{\delta} \frac{\partial U_{1S}}{\partial x} + \frac{A_o}{\delta} (U_1 - U_{1S}) + \frac{A_o}{\delta} V_e \frac{\partial V_e}{\partial x} = 0 \quad (3.2.6)$$

Если в уравнение (3.2.6) подставить скоростное отставание  $(U_1 - U_{1S})$ , составляющую скорости  $V_e$ , а её производную  $\frac{\partial V_e}{\partial x}$  задать через распределение величины  $\frac{1}{m \rho_e} \frac{\partial P}{\partial x}$ , то мы можем аналитически определить решение полученного уравнения для температурного отставания  $(T_1 - T_{1S})$ .

Далее из уравнения (3.1.14, е), с учетом найденного выражения для  $(T_1 - T_{1S})$ , находим температуру газа  $T_1$ , а затем из соотношения  $T_{1S} = T_1 - (T_1 - T_{1S})$  определяем температуру твердых частиц  $T_{1S}$  в двухфазном потоке.

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о нахождении плотностей газа  $\rho_1$  и твердых частиц  $\rho_{1S}$  в потоке. Аналогично вышеизложенному, из уравнения в частных производных первого порядка (3.1.14, г) почленно отнимаем уравнение (3.1.14, д) и получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 - \rho_{1S}) = - \frac{\partial}{\partial x} (U_1 - U_{1S}) - \frac{\partial}{\partial y} (V_1 - V_{1S}). \quad (3.2.7)$$

Подставляя в уравнение (3.2.7) частные производные от скоростного отставания  $(U_1 - U_{1S})$ ,  $(V_1 - V_{1S})$ , получаем уравнение, интеграл которого позволяет определить изменение разности плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_{1S}$ , соответствующих обеим фазам сплошной среды.

Изменение плотности газа  $\rho_1$  в двухфазном потоке определяется интегрированием уравнения (3.1.14, г), куда подставляются уже найденные



выражения для величин  $U_1, V_1, U_e, V_e$  и их производные. Плотность твердых частиц  $\rho_{1S}$  характеризуется решением уравнения (3.1.14, д) или выражением, определяемым из соотношения

$$\rho_{1S} = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_{1S}). \quad (3.2.8)$$

Давление газа в двухфазном течении при первом приближении может быть определено следующим образом:

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho_e T_1 + \frac{1}{2} \rho_e T_e \rho_1. \quad (3.2.9)$$

Все газодинамические величины  $(\rho_e, T_e, T_1, \rho_1)$ , входящие в (3.2.9), уже определены соответствующими выражениями.

Рассмотрим некоторые примеры исследования двухфазного течения смеси газа и твердых частиц в соплах Лавала.

Предположим, что справедливо равенство  $\frac{1}{m\rho_e} \frac{\partial P_1}{\partial x} = Ax$ , где  $A$  - постоянная.

Тогда, проинтегрировав уравнение (3.2.3), определяем скоростное отставание  $(U_1 - U_{1S})$ :

$$U_1 - U_{1S} = Ce^{-\frac{x}{m}} + m^2 A - mA x \quad (3.2.10)$$

Учитывая решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня в виде (3.2.1), из системы дифференциальных уравнений (3.1.14) для первых приближений параметров, характеризующих состояние двухфазной среды, имеем следующие выражения:

$$U_1 = (1-m)Ce^{-\frac{x}{m}} + \left( mA - 2A - \frac{16C_1^2 y^2}{(C_1 - e^{-t})^2} \right) \frac{x^2}{2} + \left[ mA(1-m) - \frac{16C_1^2}{3(C_1 - e^{-t})^2} y^2 \right] x + C, \quad (3.2.11)$$

$$U_{1S} = -mce^{-\frac{x}{m}} - x \left( Am^2 + \frac{16C_1^2 y^4}{3(C_1 - e^{-t})^2} \right) + \left( mA - 2A - \frac{16C_1^2 y^2}{(C_1 - e^{-t})^2} \right) \frac{x^2}{2} + m^2 A + C, \quad (3.2.12)$$

$$V_1 = B(1-m)e^{-\frac{x}{m}} + \frac{4C_1 y (e^{-t} - C_1)}{(C_1 - e^{-t})^2} x^2 + \frac{8C_1 y^3 (e^{-t} - 3C_1)}{3(C_1 - e^{-t})^2} x + B_3, \quad (3.2.13)$$

$$V_{1S} = -Bme^{-\frac{x}{m}} + \frac{4C_1 (e^{-t} y - C_1 y)}{(C_1 - e^{-t})^2} x^2 + \frac{8C_1 y^3 (e^{-t} - 3C_1)}{3(C_1 - e^{-t})^2} x + B_3, \quad (3.2.14)$$



$$T_1 = \frac{(A - K_1(t))}{2B_0} x^2 - \frac{K_2(t)}{B_0} x + \frac{B_5}{NB_0} e^{-Nx} + B_6, \quad (3.2.15)$$

$$\text{где } K_1(t) = \frac{A\delta(C_1 - e^{-t})^2 - 2AA_0B_0(C_1 - e^{-t})^2 - 32C_1^2y^2A_0B_0}{(C_1 - e^{-t})^2},$$

$$T_{1S} = e^{-Nx} \left( -B_5 + \frac{B_5}{NB_0} \right) + \left( \frac{A - K_1(t)}{2B_0} \right) x^2 + x \left( -K_1(t) - \frac{K_2(t)}{B_0} \right) - K_2(t) + B_6, \quad (3.2.16)$$

$$\text{где } K_2(t) = -\frac{A}{B_0} + \frac{2AA_0}{\delta} + \frac{32C_1^2A_0}{\delta(C_1 - e^{-t})^2} y^2 - \frac{\delta + B_0}{B_0\delta},$$

$$\begin{aligned} \rho_1 = & -(1-m)Ce^{-\frac{1}{m}x} + \frac{4C_1(C_1 - e^{-t} + 2\kappa_e C_1^2)}{3(C_1 - e^{-t})^2} x^3 + \\ & + \frac{16\kappa_e C_1^3 y^2 + 56C_1^2 y^2 - C_1^2 y^2 e^{-t} - R_1}{2(C_1 - e^{-t})^2} x^2 + \left( R_2 + \frac{8\kappa_e C_1^3 y^4}{(C_1 - e^{-t})^2} \right) x + B_8, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$$\begin{aligned} \rho_{1S} = & mAx + mCe^{-\frac{1}{m}x} + \frac{4C_1(C_1 - e^{-t} + 2\kappa_e C_1^2)}{3(C_1 - e^{-t})^2} x^3 + \\ & + \frac{16\kappa_e C_1^3 y^2 + 56C_1^2 y^2 - 8C_1^2 y^2 e^{-t} - R_1}{2(C_1 - e^{-t})^2} x^2 + \left( R_2 + \frac{8\kappa_e C_1^3 y^4}{(C_1 - e^{-t})^2} \right) x + B_8, \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned} P_1 = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\kappa_e + 1}{2} - \frac{\kappa_e - 1}{2} \left( q_0 + \frac{2C_1(x + y^2)^2}{C_1 - e^{-t}} \right)^2 + \left[ \left( 4xy + \frac{4}{3}y^3 \right) \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{\kappa_e - 1}} * \\ & * \left[ \frac{A - K_1}{2B_0} x - \frac{K_2}{B_0} x + \frac{B_5}{NB_0} e^{-Nx} + B_6 + \frac{(\kappa_e - 1)}{\kappa_e} \left( (m - 1)Ce^{-\frac{1}{m}x} \right) + \right. \\ & * \left. \frac{4C_1(C_1 - e^{-t} + 2\kappa_e C_1^2)}{3(C_1 - e^{-t})^2} x^3 + \frac{16\kappa_e C_1^3 y^2 + 56C_1^2 y^2 - 8C_1^2 y^2 - R_1}{2(C_1 - e^{-t})^2} + \right. \\ & \left. + \left( R_2 + \frac{8\kappa_e C_1^3 y^4}{(C_1 - e^{-t})^2} \right) x + B_8 \right] \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Здесь  $C_1, R_1, R_2, A, B, B_0, B_3, B_6, B_8, C, A_0$  - постоянные. Если соответствующие выражения для газодинамических величин (3.2.11)-(3.2.19) и (3.1.15) подставить в асимптотический ряд (3.1.12), то можно определить искомые величины, характеризующие двухфазные течения в соплах Лавала. Давление в двухфазном потоке, вследствие взаимодействия частиц с газом, выше, чем в



потоке "чистого" идеального газа. Повышение давления, обусловленное наличием частиц в газе, увеличивается с ростом содержания частиц и уменьшением их отставания.

Как следует из формул (3.2.10) и (3.2.5), скоростное отставание твердых частиц от газа изменяются вдоль оси сопла, в соответствии с экспоненциальным и линейным законами. Согласно полученным выражениям (3.2.11)-(3.2.19), первые приближения газодинамических величин  $U_1, U_{1S}, V_1, V_{1S}, T_1, T_{1S}, P_1, \rho_1, \rho_{1S}$  зависят от времени и являются многочленами относительно переменных  $x, y$ . Равенство в любой точке потока величин скорости и температуры частиц с соответствующими параметрами газа реализуется при  $\varphi^f \rightarrow \infty$  и  $\varphi^g \rightarrow \infty$ , т.е. например, при очень мелких частицах, при очень малой плотности вещества частиц  $\rho_s$  и т.д. По аналогии с химическими равновесными течениями, такое двухфазное течение называется равновесным. Другим предельным случаем является двухфазное течение при отсутствии взаимодействия между частицами и газом  $\varphi^f = \varphi^g = 0$ . При этом скорость и температура сохраняются во всей области течения такими же, какими они были при входе в сопло. По аналогии с течениями химически не реагирующих газов, такие двухфазные течения называются замороженными. При замороженных течениях газ сохраняет свои параметры такими же, какими они были бы при отсутствии частиц. Очевидно, что в зависимости от величины числа Стокса имеют место различные режимы течения. При  $St_{is} = 0$  течение является равновесным, поскольку здесь инерционный пробег равен нулю, частица мгновенно приобретает скорость и температуру газа. При  $St_{is} = \infty$  течение является замороженным, а при промежуточных значениях числа Стокса - неравновесным, с диссипацией и ростом энтропии в процессе, обменом импульса и энергии между фазами по времени.

Рассмотрим первоначально продольные режимы течения без учёта объёма, занимаемого частицами. При равновесном течении ( $St_{is} = 0$ ) скорости и температуры газа и частиц равны, здесь реализуется максимальный импульс,



характерный для равновесных течений. Путём простых преобразований,  $\gamma$ , плотность, удельную теплоёмкость, показатель адиабаты некоторого фиктивного газа (3.1.11) и полагая, что давление, температура и скорость фиктивного газа равны соответствующим параметрам смеси, можно представить равновесное течение смеси как течение фиктивного газа с показателем  $\kappa_e$ .

В другом предельном случае замороженного течения ( $St_{is} = \infty$ ) параметры газа и твердых частиц определяются независимо. Течение газа описывается газодинамическими функциями идеального газа с показателем адиабаты  $\kappa$ , а для частиц имеет место  $T_s = 0$ ,  $W_s = 0$ .

Наименьшим удельным импульсом обладает замороженное течение, в котором скорости частиц близки к нулю, а температура частиц равна температуре торможения газа. При движении смеси газа с частицами двумерные эффекты играют существенную роль из-за неравномерного распределения частиц в различных сечениях сопла, а также из-за возможного выноса их на стенки в дозвуковой и сверхзвуковой областях, что является следствием различного по величине и знаку воздействия газа на частицы в различных точках сопла. В результате этого, траектории частиц отличаются от линий тока газа, при этом распределения скорости и температуры частиц в транс- и сверхзвуковой областях существенно зависят от параметров течения в дозвуковой области.

При больших размерах частиц ( $d_s > 10$  мкм) и малых размерах минимального сечения сопел ( $d_* < 25$  мм) траектории частиц в сверхзвуковой части сопла близки к прямолинейным. Траектории частиц малых размеров искривлены и при больших диаметрах сопел близки по форме к линиям тока газа. Такой характер поведения частиц различных размеров связан с тем, что при увеличении размера частиц и градиента газодинамических параметров, уменьшении плотности газа растет запаздывание частиц по скорости и температуре. В дозвуковой области линии тока газа довольно близки между собой, а в трансзвуковой и сверхзвуковой областях заметно увеличивается



расхождение, проявляется это особенно при больших диаметрах частиц и малых значениях минимального сечения сопла.

Естественно, что с увеличением размера частиц и уменьшением диаметра сопла количество частиц, выпавших в дозвуковой части сопла, увеличивается.

### 3.3. Приближенно-аналитический метод для исследования нестационарных трансзвуковых двухфазных течений в соплах

Уравнение Линя-Рейснера-Цзяна эквивалентно уравнению относительно потенциала скорости  $\varphi_\ell(x, y, t)$ , которое можно записать в следующем виде:

$$\varphi_{\ell x} \varphi_{\ell xx} - \varphi_{0yy} + 2\varphi_{\ell xt} - \frac{\lambda \varphi_{\ell y}}{y} = 0 \tag{3.3.1}$$

Решение этого уравнения будем искать в следующем виде

$$\varphi_\ell(x, y, t) = \varphi_1(x, y) + (\alpha y + \beta) \cdot e^{-\gamma t}, \tag{3.3.2}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - постоянные. Тогда относительно неизвестной функции  $\varphi_1(x, y)$  получаем уравнение Кармана, которое также является базовым уравнением при исследовании стационарных околосвуковых течений двухфазной среды в равновесном состоянии фаз по скорости и температуре.

Если решение уравнения Кармана искать методом разделения переменных в форме

$$\varphi_1(x, y) = \Gamma_0(x)\Gamma_1(y), \tag{3.3.3}$$

то относительно искомых функций получаем два уравнения второго порядка

$$\Gamma_0'(x)\Gamma_0''(x) - \nu \cdot \Gamma_0(x) = 0, \tag{3.3.4}$$

$$\Gamma_1''(y) - \nu \cdot \Gamma_1^2(y) + \lambda \frac{\Gamma_1'(y)}{y} = 0, \tag{3.3.5}$$

где  $\nu$  - постоянная разделения переменных.

Введем далее новую функцию в виде  $r(\Gamma_0) = \Gamma_0'(x)$ ,  $r^2 \frac{dr}{d\Gamma_0} = \nu \cdot \Gamma_0$ . После

интегрирования полученного уравнения получаем, что



$\Gamma_0(x) = \sqrt{\frac{2(r^3 - 3C_1)}{3\nu}} = \sqrt{\frac{2(\Gamma_0'^3 - 3C_1)}{3\nu}}$ . Дифференцируя последнее соотношение,

имеем  $\Gamma_0'(x) = \sqrt{\frac{3}{2\nu}} \Gamma_0'^2(x) \Gamma_0''(x) (\Gamma_0'(x) - 3C_1)^{\frac{1}{2}}$ . Обозначая  $\Gamma_0'(x) = P(x)$ , считая  $C_1 = 0$  и

интегрируя далее, получаем  $P_0(x) = \Gamma_0'(x) = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{2\nu}{3}} x + C_0 \right)^2$  или

$$\Gamma_0(x) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{2\nu}} \left( \sqrt{\frac{2\nu}{3}} x + C_0 \right)^3 + C_3.$$

Решение уравнения (3.3.5) можно определить в виде  $\Gamma_1(y) = \frac{2(3-\lambda)}{\nu \cdot y^2}$ . Тогда

решением уравнения Кармана является следующее выражение:

$$\varphi_1(x, y) = \frac{3-\lambda}{12} \sqrt{\frac{3}{2\nu}} \frac{\left( \sqrt{\frac{2\nu}{3}} x + C_0 \right)^3}{\nu \cdot y^2}. \quad (3.3.6)$$

Подставляя (3.3.6) в (3.3.1), определяем решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня. Найденное нами решение

$$\varphi_t(x, y, t) = \frac{3-\lambda}{12} \sqrt{\frac{3}{2\nu}} \frac{\left( \sqrt{\frac{2\nu}{3}} x + C_0 \right)^3}{\nu y^2} + (\alpha y + \beta) e^{-\gamma t} \quad (3.3.7)$$

моделирует нестационарные осесимметричные течения Прандтля-Мейера. Далее, считая  $\lambda = 0$ , что соответствует плоскопараллельным течениям, из уравнения (3.3.5) при  $\nu = 6$  получаем двоякопериодическую эллиптическую функцию Вейерштрасса

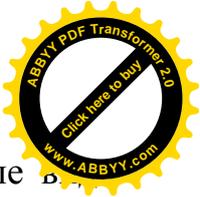
$$\Gamma_1(y) = \wp(y - y_1, 0, 2N^6). \quad (3.3.8)$$

Здесь для инвариантов эллиптической функции имеет место  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 2N^6$

Таким образом, решением уравнения Линя-Рейснера-Цзяня является функция

$$\varphi_t(x, y, t) = \frac{1}{3} (x + C_0)^3 \wp(y - y_1, 0, 2N^6) + (\alpha y + \beta) e^{-\gamma t}. \quad (3.3.9)$$

Отметим, что полученное решение описывает плоскопараллельные трансзвуковые нестационарные течения двухфазной среды в сопле с прямой звуковой линией перехода.



Здесь, согласно свойствам функции Вейерштрасса, имеются различные течения:

- при  $\Gamma_1(y) = \wp(y) = 0$  имеем равномерный поток;
- при  $N = 0$  получается расширенное течение Прандтля-Мейера, начинающийся со скорости звука;
- при чисто мнимом значении  $N$  имеет место дозвуковой поток;
- при вещественных значениях  $N$  моделируется сверхзвуковое течение с двумя особыми точками и др.

Будем определять теперь первые приближения газодинамических величин, т.е.  $u_1, u_{1s}, \vartheta_1, \vartheta_{1s}, \rho_1, \rho_{1s}, T_1, T_{1s}, P_1$  в асимптотическом разложении.

Составляющие вектора скорости двухфазной среды в равновесном состоянии имеют следующий вид:

$$u_\ell = \varphi_{\ell x} = x^2 \wp(y), \quad \vartheta_\ell = \varphi_{\ell y} = \frac{x^3}{3} \wp'(y) + \alpha e^{-\eta}. \quad (3.3.10)$$

Вспоминая, что вверх по течению, т.е. при  $x \rightarrow -\infty$ , выполняются условия  $u_\ell = u = u_s, \quad \vartheta_\ell = \vartheta = \vartheta_s, T_\ell = T = T_s$  и учитывая формулу (3.3.10), из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_{1s}) + \frac{1}{m}(u_1 - u_{1s}) = -\frac{1}{m\rho_\ell} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (3.3.11)$$

получаемого в результате вычитания уравнений (3.1.14, а) и (3.1.14, в), определяем разность горизонтальных составляющих скорости газа и твердой частицы:

$$u_1 - u_{1s} = Ce^{-\frac{x}{m}} + m^2 A - mAx \quad (3.3.12)$$

Здесь наперед задано, что  $\frac{1}{m\rho_\ell} \frac{\partial P}{\partial x} = Ax$ , где  $A$  - постоянная.

Подставляя далее (3.3.12) в (3.1.14,а) и интегрируя получаемое неоднородное уравнение, определяем первое приближение скорости несущей фазы  $u_1$ :

$$u_1 = (1-m)Ce^{-\frac{x}{m}} + m(m-1)Ax - \frac{m}{2}Ax^2 - \frac{1}{18}\wp'^2(y)x^6 - \frac{\alpha}{3}e^{-\eta}x^3\wp'(y) + C_1 \quad (3.3.13)$$

Составляющая скорости  $u_{1s}$  для потока твердых частиц имеет следующий вид:



$$u_{1s} = -mCe^{-\frac{x}{m}} + m^2 Ax - \frac{1}{18}x^6 \wp'^2(y) - \frac{\alpha x^3}{3} e^{-\eta} \wp'(y) + C_1 - m^2 A - \frac{m}{2} Ax^2. \quad (3.3.14)$$

Далее, рассматривая уравнения (3.1.14,б) и (3.1.14,з) системы (3.1.14), можно

определить разность  $\vartheta_1 - \vartheta_{1s}$  как  $\vartheta_1 - \vartheta_{1s} = Be^{-\frac{x}{m}}$ , где  $B - const$ .

Подставим теперь найденное выражение для  $(\vartheta_1 - \vartheta_{1s})$  в уравнение (3.1.14,б) и определим составляющую вектора скорости  $\vartheta_1$  газа (несущей фазы):

$$\vartheta_1 = 2\alpha\gamma e^{-\eta} x - \frac{x^5}{5} \wp(y)\wp'(y) + (1-m)Be^{-\frac{x}{m}} + B_1, \quad B_1 - const. \quad (3.3.15)$$

$$\vartheta_{1s} = 2\alpha\gamma e^{-\eta} x - \frac{x^5}{5} \wp(y)\wp'(y) - mBe^{-\frac{x}{m}} + B_1. \quad (3.3.16)$$

Разность температур  $T_1 - T_{1s}$ , т.е. температурное отставание определяется из уравнения, получаемого из (3.1.14, е) и (3.1.14, ж) системы (3.1.14):

$$\frac{\partial(T_1 - T_{1s})}{\partial x} + \left(\frac{1}{B_0} + \frac{1}{\delta}\right)(T_1 - T_{1s}) = \frac{1}{B_0 m \rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{A_0}{\delta} \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} - \frac{A_{-0}}{\delta} (u_1 - u_{1s}) - \frac{A_0}{\delta} \vartheta_\ell \frac{\partial \vartheta_\ell}{\partial x} \quad (3.3.17)$$

Общим решением полученного уравнения будет

$$T_1 - T_{1s} = \frac{A}{B_0 N} \left(x - \frac{1}{N}\right) - \frac{2A_0 \alpha e^{-\eta} \wp'(y)}{\delta} \left(\frac{x^2}{N} - \frac{2x}{N^2} + \frac{2}{N^3}\right) - \frac{2A_0 \wp'^2(y)}{3\delta} \left(\frac{x^5}{N} - \frac{5x^4}{N^2} + \frac{20x^3}{N^3} - \frac{60x^2}{N^4} + \frac{120x}{N^5} - \frac{120}{N^6}\right) + B_1 e^{-Nx}. \quad (3.3.18)$$

$$\text{Здесь } N = \frac{1}{B_0} + \frac{1}{\delta}.$$

Температура несущей фазы  $T_1$  определяется путем подстановки (3.3.18) в уравнение (3.1.14, е) и последующего его интегрирования:

$$T_1(x, y, t) = -\frac{A}{B_0 BN} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{N}\right) + \frac{2A_0 \alpha e^{-\eta} \wp'(y)}{B_0 \delta} \left(\frac{x^3}{3N} - \frac{x^2}{N^2} + \frac{2x}{N^3}\right) + \quad (3.3.19)$$

$$+ \frac{2A_0 \wp'^2(y)}{3B_0 \delta} \left(\frac{x^6}{6N} - \frac{x^5}{N^2} + \frac{5x^4}{N^3} - \frac{20x^3}{N^4} + \frac{60x^2}{N^5} - \frac{120x}{N^6}\right) + \frac{B_1}{B_0 N} e^{-Nx} + \frac{Ax^2}{2B_0}.$$

Температура потока твердых частиц определяется формулой

$$T_{1s} = -\frac{A}{B_0 BN} \left(\frac{x^2}{2} + (B_0 - \frac{1}{N})x - \frac{B_0}{N}\right) + \frac{2A_0 \alpha e^{-\eta} \wp'(y)}{B_0 \delta} \left(\frac{x^3}{3N} + \frac{1}{N} (B_0 - \frac{1}{N})x^2 - \right.$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{2x}{N^2} \left( B_0 - \frac{1}{N} \right) + \frac{2B}{N^3} + \frac{2A_0 \wp'(y)}{3B_0 \delta} \left( \frac{x^6}{6N} + \frac{1}{N} \left( B_0 - \frac{1}{N} \right) x^5 - \frac{5}{N^2} \left( B_0 - \frac{1}{N} \right) x^4 + \right. \\
& \left. + \frac{20}{N^3} \left( B_0 - \frac{1}{N} \right) x^3 - \frac{60}{N^4} \left( B_0 - \frac{1}{N} \right) x^2 + \frac{120}{N^5} \left( B_0 - \frac{1}{N} \right) x - \frac{120B_0}{N^6} + B_1 e^{-Nx} \left( \frac{1}{B_0 N} + 1 \right) \right). \quad (3.3.20)
\end{aligned}$$

Вычитая из (3.1.14, г) уравнение (3.1.14, д), для определения разности плотностей двух фаз получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_{1s}) + \frac{\partial}{\partial y} (\vartheta_1 - \vartheta_{1s}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_1 - \rho_{1s}) = 0 \quad (3.3.21)$$

Интегрируя последнее уравнение, находим общее решение:

$$\rho_1 - \rho_{1s} = -C e^{-\frac{x}{m}} + mAx + B_5, \quad (3.3.22)$$

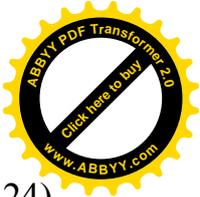
где  $B_5$  - постоянная интегрирования.

Первые приближения плотностей  $\rho_1, \rho_{1s}$  двухфазного потока определяются из уравнений (3.1.14, г) и (3.1.14, д) и могут быть представлены так:

$$\begin{aligned}
\rho_1(x, y, t) &= \frac{8}{45} x^6 \wp'^2(y) + \alpha x^3 e^{-\eta} \wp'(y) + \frac{5\chi_\ell + 3}{15} x^3 \wp^3(y) - (1-m) C e^{-\frac{x}{m}} - m(m-1)Ax + \\
& + \frac{m}{2} Ax^2, \quad \rho_{1s}(x, y, t) = \frac{8}{45} x^6 \wp'^2(y) + \alpha x^3 e^{-\eta} \wp'(y) + \frac{5\chi_\ell + 3}{15} x^6 \wp^3 + C m e^{-\frac{x}{m}} - \\
& - m^2 Ax + \frac{m}{2} Ax^2.
\end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Рассмотрим теперь решение уравнения Линя-Рейснера-Цзяна, которое описывает двумерные нестационарные течения двухфазной среды в сопле с двумя сужениями в трансзвуковом режиме скоростей. Трансзвуковые смешанные течения образуются в минимальном поперечном сечении, т.е. в горловине сопла.

Поток газа с твердыми частицами во входе сопла имеет дозвуковую скорость течения. В области минимального сечения сопла скорость потока двухфазной среды постепенно увеличивается и достигает скорости звука, а на выходе сопла, расширяясь, приобретает сверхзвуковую скорость. Потенциал скорости возмущения в этом случае представляется следующим образом:



$$\varphi_\ell(x, y, t) = \frac{x^3}{3} \wp(y + C_2) + ax[(1 + \wp'(y + C_2))^{\frac{1}{3}} + (1 - \wp'(y + C_2))^{\frac{1}{3}}] + (\alpha y + \beta)e^{-\eta}, \quad (3.3.24)$$

где  $\wp(y + C_2)$  - двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса.

Согласно формуле (3.3.24), находим величины составляющих вектора скорости двухфазной среды в транззвуковом приближении:

$$u_\ell = u_s = x^2 \wp(y + C_2) + a[(1 + \wp'(y + C_2))^{\frac{1}{3}} + (1 - \wp'(y + C_2))^{\frac{1}{3}}] \quad (3.3.25)$$

$$\mathcal{G}_\ell = \mathcal{G}_s = \frac{x^3}{3} \wp'(y + C_2) - 2ax \wp^2[(1 + \wp'(y + C_2))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y + C_2))^{\frac{2}{3}}] + \alpha e^{-\eta}$$

Используя (3.3.25), по известным значениям  $u_\ell, \mathcal{G}_\ell$  можно определить значения газодинамических параметров в случае равновесных течений двухфазной среды. Первые приближения составляющих вектора скоростей  $u_1, u_{1s}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_{1s}$ , плотностей  $\rho_1, \rho_{1s}$ , температур  $T_1, T_{1s}$  давления  $P_1$  и разности газодинамических величин, вносящих поправки в состояние двухфазной среды в сопле с двумя сужениями, определяются аналогично вышеуказанному случаю сопла с прямой линией перехода.

Приведем ниже результаты интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.1.14) с учетом (3.3.25) для газовой фазы:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) = & (1 - m)C e^{-\frac{x}{m}} - m(m - 1)Ax - \frac{m}{2} Ax^2 - \frac{x^6}{18} \wp'^2(y) - \frac{2}{3} ax^4 \wp'(y) \wp^2(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - \\ & - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}] - 2a^2 x^2 \wp^4(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - \frac{x^3}{3} \wp'(y) \alpha e^{-\eta} - 2a \alpha e^{-\eta} x \wp^2(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}], \\ \mathcal{G}_1(x, y, t) = & 2\alpha y e^{-\eta} x - \frac{x^5}{5} \wp(y) \wp'(y) - \frac{ax^3}{3} \wp'(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{1}{3}} + (1 - \wp'(y))^{\frac{1}{3}}] + (1 - m)B e^{-\frac{x}{m}}, \\ T_1(x, y, t) = & -\frac{400A_0 \wp'^2(y)}{NB_0 \delta} \left( \frac{x}{N^5} - \frac{x^2}{2N^4} + \frac{x^3}{6N^3} - \frac{x^4}{24N^2} + \frac{x^5}{120N} - \frac{x^6}{720} \right) + \\ & + \frac{16A_0 a \wp'(y) \wp^2(y)}{NB_0 \delta} [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}] \left( \frac{2x}{N^3} - \frac{x^2}{N^2} + \frac{x^3}{3N} - \frac{x^4}{12} \right) - \\ & - \frac{2A_0 \wp'(y) e^{-\eta}}{NB_0 \delta} \left( \frac{x}{N^2} - \frac{x^2}{N} + \frac{x^3}{3} \right) + \frac{8A_0}{NB_0 \delta} a^2 \wp^4(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}]^2 \cdot \left( \frac{x}{N} - \frac{x^2}{2} \right) + \\ & + \frac{A}{NB_0^2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{N} \right) - \frac{4}{NB_0} a \alpha e^{-\eta} \wp^2(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}] x - \frac{B_1}{NB_0} e^{-Nx} + B_2, \end{aligned} \quad (3.3.26)$$



здесь  $A_0, A, B_0, B_1, B_2$  - постоянные.

Составляющие вектора скорости и температура твердых частиц, уносящихся потоком газа, определяются из следующих выражений:

$$u_{1s} = -mCe^{-\frac{x}{m}} + m^2 Ax - \frac{m}{2} Ax^2 - m^2 A - \frac{x^6}{18} \wp'^2(y) - \frac{2}{3} ax^4 \wp'(y) \wp^2(y) \cdot [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}] - 2a^2 x^2 \wp^4(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}]^2 - \frac{x^3}{3} \wp'(y) a e^{-\eta} - 2a a e^{-\eta} x \wp^2(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}],$$

(3.3.27)

$$g_{1s}(x, y, t) = 2\alpha \eta e^{-\eta} x - \frac{x^5}{5} \wp(y) \wp'(y) - \frac{ax^3}{3} \wp'(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{1}{3}} + (1 - \wp'(y))^{\frac{1}{3}}] - mBe^{-\frac{x}{m}},$$

$$T_{1s}(x, y, t) = -\frac{400A_0 \wp'^2(y)}{NB_0 \delta} \left\{ \left( \frac{1}{N} - 1 \right) \left( \frac{x}{N^4} - \frac{x^2}{2N^3} + \frac{x^3}{6N^2} - \frac{x^4}{24N} + \frac{x^5}{120} \right) - \frac{x^6}{720} + \frac{1}{N^5} \right\} +$$

$$+ \frac{16A_0 a \wp'(y) \wp^2(y)}{NB_0 \delta} [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}] \left\{ \left( \frac{1}{N} + 1 \right) \left( \frac{2x}{N^2} - \frac{x^2}{N} + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{2}{N^3} \right\} -$$

$$- \frac{2A_0 \wp'(y) e^{-\eta}}{N\delta} \left\{ \left( \frac{1}{N} + 1 \right) \left( \frac{2x}{N} - x^2 \right) + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{N^2} \right\} + \frac{A}{NB_0^2} \left( \frac{B_0}{N} - \left( \frac{1}{N} + B_0 \right) x + \frac{x^2}{2} \right) -$$

$$- \frac{4}{NB_0} a a e^{-\eta} \wp^2(y) [(1 + \wp'(y))^{\frac{2}{3}} - (1 - \wp'(y))^{\frac{2}{3}}] (x - 1) - B_1 \left( \frac{1}{B_0 N} + 1 \right) e^{-Nx} + B_2.$$

В заключение отметим, что при подстановке в формальный ряд разложения (3.1.12) соответствующих выражений для газодинамических величин равновесного течения двухфазной среды и их первых приближений можно получить аналитическое решение обратных задач теории сопел в транзвуковом режиме скоростей.

### 3.4. Расчет двухфазных течений Прандтля-Мейера около угла.

Будем искать решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня

$$\varphi_{tx} \varphi_{txx} - \varphi_{\wp yy} + 2\varphi_{txt} - \frac{\lambda \varphi_{ty}}{y} = 0 \tag{3.4.1}$$

в автомодельной форме



$$\varphi_e(x, y, t) = y^{3n-2} f(\xi, \eta), \quad \xi = xy^{-n}, \eta = ty^{n-2}, \quad \varphi_e(x, y, t) = \varphi_l(x, y, t), \quad (3.4.2)$$

где  $n$  - показатель автомодельности, а  $\xi, \eta$  - автомодельные переменные .

Подставляя предполагаемый вид решения (3.4.2) в уравнение Линя-Рейснера-Тзяня (3.4.1), относительно неизвестной  $f(\xi, \eta)$  функции получаем нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, представляемое в следующем виде:

$$(n^2 \xi^2 - f_\xi) f_{\xi\eta} - 2[1 + n(n-2)\xi\eta] f_{\xi\eta} + (n-2)^2 \eta^2 f_{\eta\eta} + 7(n-1)(n-2)\eta f_\eta + 6f = 0 \quad (3.4.3)$$

В общем случае, полученное уравнение для любого значения показателя автомодельности  $n$  не интегрируется. Однако в частных случаях, при некоторых конкретных значениях  $n$ , можно найти частные решения уравнения (3.4.3). Пусть  $n = 0$ , тогда, согласно уравнению (3.4.3), имеем:

$$-f_\xi f_{\xi\xi} - 2\xi\eta + 4\eta^2 f_{\eta\eta} + 14\eta f_\eta + 6f = 0. \quad (3.4.4)$$

При заданных значениях показателя автомодельности  $n$  можно построить класс точных решений уравнения (3.4.3), представляя искомое решение уравнения (3.4.3), (3.4.5) в виде многочлена от  $\xi$  с коэффициентами, зависящими только от  $\eta$ . Таким способом было найдено решение уравнения (3.4.5) и определен соответствующий потенциал скорости возмущения, согласно (3.4.2), в следующем виде:

$$\varphi_e(x, y, t) = \frac{x^3}{3y^2} + c_1 \frac{y}{(t+a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{c_2}{t+a}, \quad (3.4.5)$$

где  $a = const$ ,  $C_1, C_2$  - постоянные интегрирования.

Пусть  $n = 1$ , тогда для определения функции  $f(\xi, \eta)$  из (3.4.3) также получаем нелинейное уравнение:

$$(\xi^2 - f_\xi) f_{\xi\xi} - 2(1 - \xi\eta) f_{\xi\eta} + \eta^2 f_{\eta\eta} = 0. \quad (3.4.6)$$

Проинтегрировав уравнение (3.4.6) и подставив далее найденное решение для  $f(\xi, \eta)$  в (3.4.2), определяем потенциал скорости возмущения в виде



$$\varphi_e(x, y, t) = c_1 t + \frac{x^3}{3y^2} + c_2 y. \quad (3.4.7)$$

Здесь  $C_1, C_2$  - постоянные интегрирования. Полученные решения вида (3.4.5), (3.4.7) описывают двумерные нестационарные сверхзвуковые течения двухфазной среды. В этом случае реализуются течения расширения Прандтля-Мейера, которые являются автомодельными.

В предельном случае, при  $t \rightarrow -\infty$  из формулы (3.4.5) потенциал возмущения для установившихся двухфазных плоскопараллельных течений определяется в следующем виде:

$$\varphi_e(x, y) = \frac{x^3}{3y^2}.$$

Рассмотрим решение в виде (3.4.7). Составляющие вектора скорости равновесного потока в этом случае имеют вид:

$$u_e = u = u_s = \frac{x^2}{y^2}, \quad \vartheta_e = \vartheta = \vartheta_s = \frac{-2x^3}{3y^3}, \quad C_2 = 0. \quad (3.4.8)$$

Будем определять теперь первые приближения газодинамических величин в асимптотическом разложении (3.1.12).

Из первого уравнения системы (3.1.1) вычитаем третье уравнение той же системы и для определения разности горизонтальных составляющих скоростей получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_{1s}) + \frac{1}{m\rho_e} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{m}(u_1 - u_{1s}) = 0. \quad (3.4.9)$$

Будем считать, что задано значение функции  $\frac{1}{m\rho_e} \frac{\partial p_1}{\partial x} = Ax$ , где  $A = const$ , тогда,

интегрирование уравнения (3.4.9) дает

$$u_1 - u_{1s} = ce^{-\frac{x}{m}} + m^2 A - mAx. \quad (3.4.10)$$

Подставляя далее (3.4.10) в первое уравнение системы (3.1.14) и интегрируя получаемое линейное неоднородное уравнение, определяем первое приближение скорости несущей фазы  $u_1$ :



$$u_1 = (m-1) \left( mA x - c e^{-\frac{x}{m}} \right) - \frac{mA}{2} x^2 + \frac{2}{9} \frac{x^3}{y^3} \left( 3c_2 - \frac{x^3}{y^3} \right) + \tilde{c}_1 \quad (3.4.11)$$

Первое приближение горизонтальной составляющей скорости  $u_{1S}$  для твердых частиц в потоке имеет следующий вид:

$$u_{1S} = -m c e^{-\frac{x}{m}} - \frac{m}{2} A x^2 + m^2 A (x-1) + \frac{2}{9} \frac{x^3}{y^3} \left( 3c_2 - \frac{x^3}{y^3} \right) + \tilde{c}_1. \quad (3.4.12)$$

Скоростное отставание твердых частиц от газа определяется согласно решению (3.4.10). Так как в соотношении (3.4.10)  $C$  есть постоянная интегрирования, а  $A$  - произвольная постоянная, то можно выбрать их такими, чтобы удовлетворялось условие  $u_1 - u_{1S} > 0$ .

Далее, для определения разности первого приближения вертикальной составляющей скорости получаем уравнение

$$\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{1S} = B e^{-\frac{x}{m}}, \quad B = const. \quad (3.4.13)$$

Подставляя выражение для  $(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{1S})$  во второе уравнение системы (3.1.14), определяем первое приближение скорости  $\mathcal{G}_1$  для несущей фазы (газа):

$$\mathcal{G}_1 = \frac{2}{15} \frac{x^5}{y^5} + (1-m) B e^{-\frac{x}{m}} + B_1 \quad (3.4.14)$$

$$\mathcal{G}_{1S} = \frac{2}{15} \frac{x^5}{y^5} - m B e^{-\frac{x}{m}} \quad (3.4.15)$$

Как видно из (3.4.13), если постоянная интегрирования положительна, т.е.  $B > 0$ , то для разности составляющей скорости имеет место  $\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{1S} > 0$ , откуда следует, что  $\mathcal{G}_1 > \mathcal{G}_{1S}$ .

Разность температур  $T_1 - T_{1S}$ , т.е. температурное отставание твердой фазы определяется из седьмого и шестого уравнений системы (3.1.14):

$$\frac{\partial(T_1 - T_{1S})}{\partial x} + \left( \frac{1}{B_0} + \frac{1}{\delta} \right) (T_1 - T_{1S}) = \frac{1}{B_0 m \rho_e} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{A_0}{\delta} \frac{\partial u_{1S}}{\partial x} - \frac{A_0}{\delta} (u_1 - u_{1S}) - \frac{A_0}{\delta} \mathcal{G}_e \frac{\partial \mathcal{G}_e}{\partial x} \quad (3.4.16)$$

В уравнение (3.4.16) подставляем соответствующие выражения (3.4.10), (3.4.8) и производные по переменной  $x$  от соотношений (3.4.12), (3.4.8). После



интегрирования полученного дифференциального уравнения находим

распределение температурного отставания  $T_1 - T_{1S}$ :

$$T_1 - T_{1S} = B_1 e^{-Nx} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5. \quad (3.4.17)$$

Здесь  $\alpha_5 = -\frac{8A_0}{3N\delta y^6}$ ,  $\alpha_4 = -\frac{40A_0}{3N^2\delta y^6}$ ,  $\alpha_3 = -\frac{160A_0}{3N^3\delta y^6}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{N} \left( \frac{4c_2 A_0}{\delta y^3} + \frac{480A_0}{N^3\delta y^6} \right)$ ,

$$\alpha_1 = \frac{1}{N} \left[ \frac{A}{B_0} - \frac{2}{N} \left( \frac{4c_2 A_0}{\delta y^3} + \frac{480A_0}{N^3\delta y^6} \right) \right], \quad \alpha_0 = \frac{1}{N} \left\{ \frac{A_0}{\delta} mA(1-m) - \frac{1}{N} \left[ \frac{A}{B_0} - \frac{2}{N} \left( \frac{4c_2 A_0}{\delta y^3} + \frac{480A_0}{N^3\delta y^6} \right) \right] \right\},$$

$$N = \frac{1}{B_0} + \frac{1}{\delta}.$$

Температуру несущей фазы (газа) определяем, подставляя (3.4.17) в шестое уравнение системы (3.1.14). Интегралом полученного уравнения является выражение

$$T_1 = -\alpha_0 x + \frac{(A - \alpha_1)}{2} x^2 + \frac{B_1}{N} e^{-Nx} - \frac{\alpha_2}{3} x^3 - \frac{\alpha_3}{4} x^4 - \frac{\alpha_4}{5} x^5 - \frac{\alpha_5}{6} x^6 + B_2, \quad (3.4.18)$$

где  $B_2$  - постоянная интегрирования.

Температура потока твердых частиц определяется формулой:

$$T_{1S} = \left( \frac{1}{N} - 1 \right) B_1 e^{-Nx} - \alpha_0 - (\alpha_0 + \alpha_1)x + \left( \frac{A - \alpha_1}{2} - \alpha_2 \right) x^2 - \left( \frac{\alpha_2}{3} + \alpha_3 \right) x^3 - \left( \frac{\alpha_3}{4} + \alpha_4 \right) x^4 - \left( \frac{\alpha_4}{5} + \alpha_5 \right) x^5 - \frac{\alpha_5}{6} x^6 + B_2. \quad (3.4.19)$$

Вычитая из четвертого уравнения системы (3.1.14) пятое уравнение той же системы, для определения разности плотностей фаз получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_{1S}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vartheta_1 - \vartheta_{1S}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 - \rho_{1S}) = 0. \quad (3.4.20)$$

Подставляя в (3.4.20) решения для разности скоростей (3.4.10), (3.4.13) и интегрируя, имеем выражение для разности плотностей:

$$\rho_1 - \rho_{1S} = -ce^{-\frac{x}{m}} + mAx.$$

Для определения плотности газа  $\rho_1$  необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение



$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 2\vartheta_e \frac{\partial \vartheta_e}{\partial x} + \chi_e u_e^2 \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (3.4.21)$$

Общим интегралом уравнения (3.4.21) служит функция

$$\rho_1 = (1-m) \left( mA x - c e^{-\frac{x}{m}} \right) + \frac{mA}{2} x^2 - 2c_2 \frac{x^3}{y^3} + \frac{7}{9} \left( 1 + \frac{3}{7} \right) \frac{x^6}{y^6}.$$

Тогда первое приближение плотности твердых частиц имеет вид

$$\rho_{1S} = -m^2 Ax + m c e^{-\frac{x}{m}} + \frac{mA}{2} x^2 - 2c_2 \frac{x^3}{y^3} + \frac{7}{9} \left( 1 + \frac{3}{7} \chi_e \right) \frac{x^6}{y^6}.$$

Далее можно определить остальные параметры равновесного двухфазного течения, используя полученные результаты в этом параграфе.

В этой главе разработан приближенно-аналитический метод решения обратных задач двухфазных течений газа и твердых частиц в трансзвуковом режиме скоростей.

Применяя метод малых возмущений к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка динамики двухфазных сред, получена упрощенная система уравнений позволяющая исследовать внутренние и внешние течения двухфазных сред.

В качестве примера рассмотрены двухфазные нестационарные течения смеси газа и твердых частиц в соплах Лавая, в сопле с прямой звуковой линией перехода, в сопле с двумя сужениями и течение Прандтля-Мейера около угла и т.д.

## Выводы

1. Рассматривая систему дифференциальных уравнений в частных производных для описания двухфазных потоков (газ и твердые частицы) и разлагая в ряд все основные физические величины по малому параметру для двухфазного равновесного течения в трансзвуковом приближении относительно составляющих скорости, получена система уравнений Линя-Рейсснера-Тзяня. Для определения первых приближений физических величин двухфазной среды



получена система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

2. Решены задачи двухфазных нестационарных течений смеси газа и твердых частиц в соплах Лаваля, течений в сопле с прямой звуковой линией перехода, течений в сопле с двумя сужениями и течения Прандтля-Мейера около угла. Определены распределения составляющих скорости, плотности и температуры, соответствующие обеим фазам.



## ГЛАВА IV

### МЕТОД ДАВЫДОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕФТЕГАЗОВОЙ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ.

#### 4.1. Метод Давыдова для моделирования двумерных безынерционных течений.

Рассмотрим безынерционное изотермическое фильтрационное движение однородной жидкости в пласте с эффективной толщиной  $h(x, y)$ . Вывод справедливого для такого режима фильтрационных течений линейного закона А.Дарси можно найти в работах Н.Е.Жуковского [52] и др.

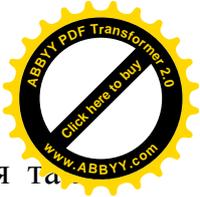
Математическая модель движения однородной жидкости в пористой среде при использовании закона А.Дарси [1, 5, 6, 8, 9, 52, 53, 54, 62, 68, 74, 75 и др.] выглядит следующим образом:

$$h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{W} h) = 0, \quad (4.1.1)$$

$$\vec{W} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (4.1.2)$$

где  $m$  - пористость среды,  $h$  - толщина пласта,  $\rho$  - плотность жидкости,  $\vec{W}$  - вектор скорости фильтрации,  $k$  - коэффициент проницаемости пласта,  $\mu$  - вязкость жидкости. Система (4.1.1), (4.1.2) замыкается баротропными уравнениями состояния для жидкости и пористой среды течения, явный вид которых несущественен при изложении алгоритма метода Давыдова.

Для решения системы (4.1.1), (4.1.2) методом Давыдова приведем ее к безразмерному виду. Для удобства и наглядности дальнейшего изложения выберем характерные параметры фильтрационного процесса так, чтобы вид исходной системы был одинаков как в размерной, так и в безразмерной форме. Для этого плотность  $\rho$ , пластовое давление  $p$ , вязкость среды  $\mu$ , коэффициент проницаемости  $k$ , линейный размер  $L$  отнесем к соответствующим характерным значениям задачи  $\rho_0, p_0, \mu_0, k_0, L_0$ .



Тогда остальные параметры фильтрационного потока запишутся та  
 образом. Скорость фильтрации будет относиться в соответствии с законом

$$\text{А. Дарси к } w_0 = \frac{k_0}{\mu_0} \frac{p_0}{L_0}, \text{ время } t_0 \text{ - к } t_0 = \frac{L_0}{w_0}.$$

Обозначим через  $D$  область интегрирования системы (4.1.1), (4.1.2).  
 Покроем область  $D$  неподвижной в пространстве расчетной (эйлеровой) сеткой  
 с прямоугольными ячейками. В данной неподвижной прямоугольной  
 декартовой системе координат размеры сторон эйлеровых ячеек равны  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .  
 В указанной системе координат целым числам  $i$  (вдоль оси  $Ox$ ) и  $j$  (вдоль оси  
 $Oy$ ) будет соответствовать центр ячейки  $(i, j)$  (см. рис. 4.1.1).

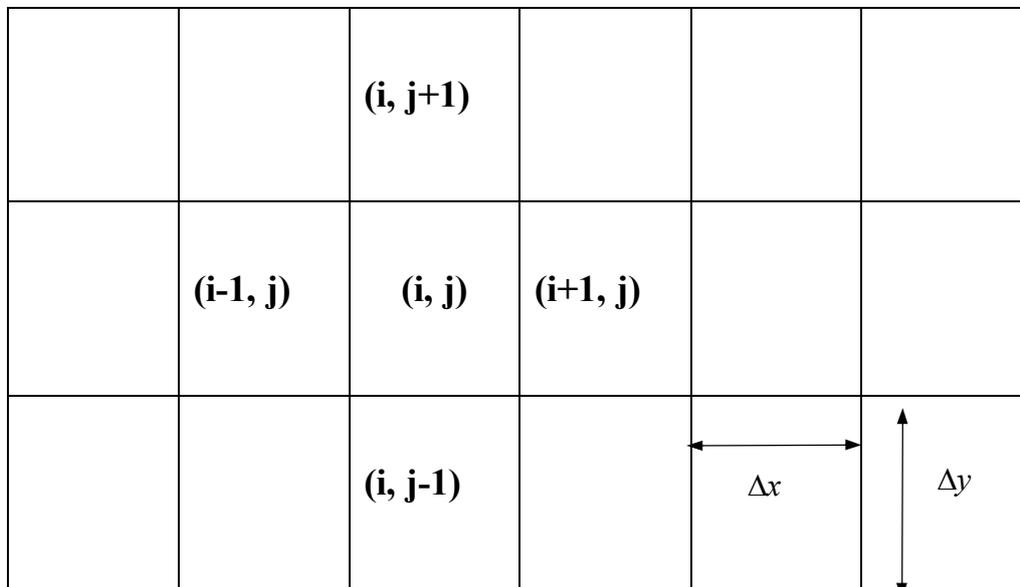


Рис. 4.1.1.

Следуя работам [11, 23, 33, 38, 42 и др.], дадим формальное описание  
 метода Давыдова. Основная его идея состоит в расщеплении по физическим  
 процессам исходной нестационарной системы уравнений подземной  
 гидромеханики, которая в случае двумерной однофазной изотермической  
 фильтрации состоит из уравнения неразрывности, уравнения движения и  
 баротропных уравнений состояния. Среда здесь моделируется системой из  
 жидких (крупных) частиц, совпадающих в данный момент времени с частицей  
 эйлеровой сетки. Стационарное решение задачи, если оно существует,  
 получается в результате установления, поэтому весь процесс вычислений  
 состоит из многократного повторения шагов по времени. Расчет каждого



временного шага (вычислительного цикла) в свою очередь, разбивается на этапы.

I - эйлеров этап, когда пренебрегаем всеми эффектами, связанными с перемещением элементарной ячейки (потока массы через границы элементарной ячейки нет), и учитываем эффекты ускорения жидкости лишь за счет давления; здесь для крупной частицы определяются промежуточные значения искомых параметров потока  $\varphi = (\tilde{u}, \tilde{v})$ ;

II - лагранжев этап, когда при движении жидкости вычисляются потоки массы через границы эйлеровых ячеек;

III - заключительный этап - определяются в новый момент времени значения фильтрационных параметров  $\psi = (u, v, \rho, p)$  на основе закона сохранения массы для каждой ячейки и всей системы в целом на фиксированной расчетной сетке.

Приведем общий принцип расщепления, с помощью которого последовательно выстраиваются численные схемы метода Давыдова для решения системы уравнений механики сплошных и сыпучих сред:

- моделируемая среда заменяется системой из  $N$  частиц (жидких - “крупных” - частиц для сплошной среды), которые распределены в начальный момент по ячейкам эйлеровой сетки в координатном пространстве в соответствии с начальными данными;

- эволюция такой системы за время  $\Delta t$  осуществляется путем следующего расщепления: вначале изучается изменение внутреннего состояния подсистем, находящихся в ячейках в предположении их заторможенности или неподвижности (эйлеров этап), а затем рассматривается смещение всех частиц пропорционально их скорости и времени  $\Delta t$  без изменения внутреннего состояния подсистем с последующим пересчетом расчетной сетки в исходное положение (лагранжев и заключительный этапы).

Перейдем теперь к изложению метода Давыдова. Будем рассматривать безынерционную изотерическую фильтрацию однородной жидкости в пласте с эффективной толщиной  $h(x, y)$ . В качестве исходных рассмотрим



обезразмеренную систему дифференциальных уравнений (4.1.1), (4.1.2) гидромеханики при использовании закона А. Дарси (4.1.1), (4.1.2).

### I. Эйлеров этап.

На данном этапе для каждой расчетной ячейки  $(i, j)$  пренебрегаем всеми эффектами, связанными с ее перемещениями (отсутствует поток массы через границы эйлеровой ячейки). Тогда в уравнении (4.1.1) убирается конвективный член и исходная система уравнений подземной гидромеханики сводится к одному уравнению - закону А.Дарси. В силу этого для двумерной фильтрации имеем следующее:

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4.1.3 - 4.1.4)$$

Положим постоянными, в окрестности рассматриваемой ячейки  $(i, j)$  области интегрирования, величины коэффициентов динамической вязкости жидкости, проницаемости, пористости, а также эффективной толщины пласта.

Аппроксимируем (4.1.3) и (4.1.4) в момент времени  $t = t^n$  следующими разностными соотношениями:

$$u_{i,j}^n = -\left(\frac{k}{\mu}\right)_{i,j}^n \frac{p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n}{\Delta x}, \quad (4.1.5)$$

$$v_{i,j}^n = -\left(\frac{k}{\mu}\right)_{i,j}^n \frac{p_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}, \quad (4.1.6)$$

где величины с дробными индексами относятся к границе эйлеровой ячейки и могут быть вычислены, например, таким образом

$$p_{i+1/2,j}^n = \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{2}. \quad (4.1.7)$$

В разностном соотношении (4.1.7) верхний индекс указывает на принадлежность к  $n$  - му временному слою. Необходимо отметить, что существуют и другие способы вычисления фильтрационных величин на границах ячейки.

Таким образом, на первом этапе, в предположении заторможенности поля плотности жидкости, по сложившемуся на слое  $t^n$  полю давления вычисляются



значения скоростей  $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n$  для центров крупных частиц.

## II. Лагранжев этап.

На этом этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Здесь находятся за время  $\Delta t$  потоки массы  $\Delta M^n$  через границы эйлеровых ячеек, при этом полагаем, что вся масса переносится только за счет нормальной к границе составляющей скорости.

Дифференциальное уравнение неразрывности исходной системы уравнений подземной гидромеханики в разностной форме запишется так (в предположении, что фильтрационный поток жидкости через ячейку  $(i, j)$  направлен слева направо и снизу вверх):

$$(m \cdot h \cdot \rho^{n+1})_{i,j} \cdot \Delta x \Delta y = (m \cdot h \cdot \rho^n)_{i,j} \cdot \Delta x \Delta y + \Delta M_{i-1/2,j}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n \quad (4.1.8)$$

В разностном уравнении (4.1.8) пористая среда предполагается недеформируемой, здесь вычисления потока массы  $\Delta M^n$  имеют следующий вид (например, для правой и верхней границ ячеек):

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1/2,j}^n \cdot u_{i+1/2,j}^n \cdot h_{i+1/2,j} \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \quad \Delta M_{i,j+1/2}^n = \rho_{i,j+1/2}^n \cdot v_{i,j+1/2}^n \cdot h_{i,j+1/2} \cdot \Delta x \cdot \Delta t. \quad (4.1.9)$$

Заметим, что выбор разностных соотношений для вычисления значений фильтрационных параметров на границах ячейки имеет важное значение, так как сильно влияет на устойчивость и точность вычислений.

Рассмотрим основные способы вычисления потока массы  $\Delta M^n$ , традиционно применяемые при проведении численных экспериментов.

Формулы второго порядка точности с учетом направления потока (на примере правой границы ячейки) имеют следующий вид.

$$\text{Если } u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n > 0 \text{ и } u_{i+1/2,j}^n = u_{i,j}^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = u_{i,j}^n + \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{4} > 0,$$

$$\text{то } u_{i+1/2,j}^n = u_{i,j}^n + \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{4} > 0, \quad \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n + \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{4} > 0.$$

$$\text{Если } u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n < 0 \text{ и } u_{i+1/2,j}^n = u_{i+1,j}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = u_{i+1,j}^n - \frac{u_{i+2,j}^n - u_{i,j}^n}{4} < 0,$$



$$\text{то } u_{i+1/2,j}^n = u_{i+1,j}^n - \frac{u_{i+2,j}^n - u_{i,j}^n}{4} < 0, \quad \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n - \frac{\rho_{i+2,j}^n - \rho_{i,j}^n}{4} < 0. \quad (4.1.10)$$

$$\text{В случае, если } u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n > 0 \text{ и } u_{i+1/2,j}^n = u_{i,j}^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = u_{i,j}^n + \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{4} < 0,$$

$$\text{или если } u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n < 0 \text{ и } u_{i+1/2,j}^n = u_{i+1,j}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = u_{i+1,j}^n - \frac{u_{i+2,j}^n - u_{i,j}^n}{4} > 0, \text{ то}$$

полагаем, что  $\Delta M_{i+1/2,j}^n = 0$ .

Формулы первого порядка точности для вычисления  $\Delta M^n$ , также учитывающие направление потока, имеют следующий вид.

$$\text{Если } u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n > 0, \text{ то } u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2, \quad \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n.$$

$$\text{Если } u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n < 0, \text{ то } u_{i+1/2,j}^n = (u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n) / 2, \quad \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n. \quad (4.1.11)$$

Использование центральных разностей приводит к следующим равенствам:

$$u_{i\pm 1/2,j}^n = u_{i\pm 1,j}^n, \quad \rho_{i\pm 1/2,j}^n = \rho_{i\pm 1,j}^n. \quad (4.1.12)$$

Выражения для вычисления значений на границах ячейки без учета направления потока выглядят так:

$$u_{i+1/2,j}^n \cdot \rho_{i+1/2,j}^n = (\rho_{i,j}^n \cdot u_{i+1,j}^n + \rho_{i+1,j}^n \cdot u_{i,j}^n) / 2. \quad (4.1.13)$$

Необходимо отметить, что возможны и другие способы вычисления величин  $u_{i+1/2,j}^n$ ,  $\rho_{i+1/2,j}^n$ , вытекающие из особенностей рассматриваемого течения.

Значения  $h_{i+1/2,j}$  также можно вычислять или по формулам первого порядка точности

$$h_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(h_{i,j} + h_{i+1,j}), \quad (4.1.14)$$

или по формулам второго порядка точности

$$h_{i+1/2,j} = \frac{1}{4}(h_{i-1,j} + 2 \cdot h_{i,j} + h_{i+1,j}). \quad (4.1.15)$$

Здесь также возможны различные подходы.

### **III. Заключительный этап.**

Здесь происходит перераспределение массы по пространству и определяются окончательные поля эйлеровых параметров потока на



фиксированной расчетной сетке в момент времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Уравнение 5.1 этапа представляет собой закон сохранения массы  $M$ , записанный для данной ячейки  $(i, j)$  в разностной форме:

$$M^{n+1} = M^n + \sum \Delta M_{zp}^n, \quad (4.1.16)$$

где  $\Delta M_{zp}^n$  - масса жидкости, которая пересекла за время  $\Delta t$  одну из границ рассматриваемой ячейки; суммирование производится по всем сторонам ячейки.

Из (4.1.8) имеем следующее:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + \frac{\Delta M_{i-1/2,j}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n}{\Delta x \Delta y \cdot (m \cdot h)_{i,j}}, \quad (4.1.17)$$

а уравнение состояния  $\rho = \rho(p)$  позволяет вычислить новое значение давления в момент времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  в ячейке  $(i, j)$ :

$$p_{i,j}^{n+1} = p(\rho_{i,j}^{n+1}).$$

Здесь  $p = p(\rho)$  - функция, обратная к  $\rho = \rho(p)$ .

Вычислительный цикл, таким образом, закончен и вся процедура повторяется сначала для следующего временного слоя  $t^{n+2}$ .

Необходимо отметить очень важное достоинство метода Давыдова, которое вытекает из структуры конечно-разностных соотношений для лагранжева этапа при использовании формул первого и второго порядков точности (4.1.10), (4.1.11). Покажем, что их применение обеспечивает выполнение закона сохранения массы для всей прямоугольной сеточной области, состоящей, например, из  $M * N$  ячеек. Выражение для полной массы жидкости в этой области имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (mh\rho^{n+1})_{i,j} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (mh\rho^n)_{i,j} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{\Delta M_{i-1/2,j}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n}{\Delta x \Delta y} \quad (4.1.18)$$

Величина слева в (4.1.18) представляет собой массу жидкости в рассматриваемой области на временном слое  $t^{n+1}$ . Первый член справа есть аналогичная масса на слое  $t^n$ , а второй член представляет изменение массы за



время  $\Delta t$ . При использовании формул первого и второго порядков точности (4.1.10), (4.1.11) потоки массы через правую границу ячейки  $(i, j)$  и левую для  $(i+1, j)$  вычисляются так, что они равны по величине и противоположны по знаку. Аналогична ситуация для нижней и верхней границ ячейки. Тогда в (4.1.18) все значения для внутренних ячеек области интегрирования взаимно уничтожаются и мы получаем следующее:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [mh(\rho^{n+1} - \rho^n)_{i,j} \Delta x \Delta y] = \sum_{i=1}^M (\Delta M_{i,1/2}^n - \Delta M_{i,N+1/2}^n) + \sum_{j=1}^N (\Delta M_{1/2,j}^n - \Delta M_{M+1/2,j}^n). \quad (4.1.19)$$

Отсюда видно, что при отсутствии стоков и источников полное изменение массы жидкости в пласте происходит только за счет притока вдоль внешней границы области интегрирования. Выражение (4.1.19) и доказывает консервативность разностных схем метода Давыдова при использовании вышеуказанных формул первого и второго порядков точности для вычисления потока массы.

Перейдем теперь к вопросу постановки начальных и граничных условий для моделирования двумерных однофазных безинерционных течений.

Для того чтобы не нарушать единообразия вычислений, в методе Давыдова вдоль внешней и внутренней границ области интегрирования вводятся слои фиктивных ячеек. Число таких слоев равняется порядку аппроксимации дифференциальных граничных условий соответствующими конечными разностями. Ниже на рис.4.1.2 в прямоугольной области размером  $M \times N$  ячеек фиктивные ячейки окрашены в серый цвет.

Начнем с условия непроницаемости на внешней границе области интегрирования:

$$u_{N+1/2,j}^n = 0, \quad v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n.$$

Положим, что

$$u_{N+1/2,j}^n = \frac{u_{N,j}^n + u_{N+1,j}^n}{2}. \quad (4.1.20)$$

Используя формулы первого порядка точности с разностями вперед по пространственной переменной, получаем:



$$\left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N,j} \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N,j}^n}{\Delta x} + \left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N+1,j} \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N+1,j}^n}{\Delta x} = 0. \quad (4.1.21)$$

|       |     |                 |                 |                 |       |       |
|-------|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-------|-------|
|       | 2,M |                 |                 |                 | N-1,M |       |
| 1,M-1 |     |                 |                 |                 |       | N,M-1 |
|       |     |                 | <b>(i, j+1)</b> |                 |       |       |
|       |     | <b>(i-1, j)</b> | <b>(i, j)</b>   | <b>(i+1, j)</b> |       |       |
|       |     |                 | <b>(i, j-1)</b> |                 |       |       |
| 1,2   |     |                 |                 |                 |       | N,2   |
|       | 2,1 |                 |                 |                 | N-1,1 |       |

Рис.4.1.2

Без ограничения общности можно положить, что  $k_{N+1,j} = k_{N,j}$ . Полагая далее  $p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n$ , в силу того, что  $\mu_{N,j}^n = \mu(p_{N,j}^n)$  получаем  $\mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n$ . Таким образом, окончательно для второго слоя ячеек имеем:

$$p_{N+2,j}^n = p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n. \quad (4.1.22)$$

Использование формул второго порядка точности дает следующее:

$$\left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N,j} \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N+1,j} \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N,j}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0. \quad (4.1.23)$$

Отсюда, полагая  $k_{N+1,j} = k_{N,j}$ , имеем

$$p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n. \quad (4.1.24)$$

Записывая центральные разности непосредственно относительно границы ячейки  $(N+1/2, j)$ , имеем

$$u_{N+1/2,j}^n = \left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N+1/2,j} \cdot \frac{p_{(N+1/2)+1/2,j}^n - p_{(N+1/2)-1/2,j}^n}{\Delta x} = 0.$$

Отсюда получаем следующие соотношения для значений давления на первом слое фиктивных ячеек:

$$p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n. \quad (4.1.25)$$

Теперь можно, например, объединить формулы первого и второго порядков точности. С этой целью для внутренней ячейки области интегрирования используем центральные разности, а для слоя фиктивных ячеек



- односторонние, тогда получаем:

$$\left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N,j} \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N+1,j} \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N+1,j}^n}{\Delta x} = 0.$$

Отсюда для значений давления второго слоя ячеек имеем:

$$p_{N+2,j}^n = (p_{N,j}^n + p_{N-1,j}^n) / 2. \quad (4.1.26)$$

Рассмотрим теперь граничное условие, связанное с заданием расхода жидкости на границе области интегрирования. Пусть, например, для ячейки  $(N, j)$  задан объемный расход жидкости  $q(t)$ , вытекающей через ее правую сторону. Математическая модель этого явления запишется так:

$$\Delta y \cdot h \cdot u_{N+2,j}^n = q(t) \quad (4.1.27)$$

или, обозначая  $\varphi = \frac{q}{(\Delta y \cdot h)}$ , получаем

$$u_{N+1/2,j}^n = \varphi(t).$$

Здесь и далее не будем рассматривать односторонние разности для аппроксимации граничных условий, так как практика их применения в реальных задачах показала неудобство и громоздкость их реализации.

Используя центральные разности непосредственно относительно границы, получаем следующее:

$$-\left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N+1/2,j} \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N,j}^n}{\Delta x} = \varphi(t).$$

Отсюда, полагая

$$\varphi_1^*(t) = \frac{\varphi(t) \cdot \Delta x}{(k / \mu^n)_{N+1/2,j}},$$

получаем значения для первого слоя фиктивных ячеек:

$$p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n - \varphi_1^*(t). \quad (4.1.28)$$

В случае применения центральных разностей для ячеек  $(N, j)$  и  $(N+1, j)$  получаем следующее:

$$\left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N,j} \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N+1,j} \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N+1,j}^n}{\Delta x} = -2 \cdot \varphi.$$

Полагая  $p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n$ , для давления во втором слое фиктивных ячеек



получаем следующее:

$$p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n - 4 \cdot \varphi_2^*(t), \quad (4.1.29)$$

где  $\varphi_2^*(t) = \frac{\varphi(t) \cdot \Delta x}{(k / \mu^n)_{N,j}}$ .

Комбинирование схем первого и второго порядков точности в рассматриваемом случае дает

$$\left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N,j} \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \left(\frac{k}{\mu^n}\right)_{N+1/2,j} \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N+2,j}^n}{\Delta x} = -2 \cdot \varphi.$$

По аналогии с предыдущим случаем, полагая  $p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n$ , получаем

$$p_{N+2,j}^n = \frac{1}{2}(p_{N-1,j}^n + p_{N,j}^n) - 2 \cdot \varphi_2^*(t), \quad (4.1.30)$$

где  $\varphi_2^*(t) = \frac{\varphi(t) \cdot \Delta x}{(k / \mu^n)_{N,j}}$ .

Необходимо отметить, что все три приведенные разностные формулировки для задания объемного дебита на границе ячейки допускают инверсию на левую границу области потока и выводятся аналогичным образом.

В случае, если жидкость втекает через правую границу области, то знак “минус” в выражениях (4.1.28), (4.1.29), (4.1.30) необходимо заменить на “плюс”. Рассмотрим теперь граничное условие заданного закона распределения давления на границе области:

$$p_{N+1/2,j}^n = f(t).$$

Отсюда, учитывая соотношения  $p_{N+1/2,j}^n = \frac{1}{2}(p_{N,j}^n + p_{N+1,j}^n)$ , получаем для первого слоя фиктивных ячеек:

$$p_{N+1,j}^n = 2 \cdot f(t) - p_{N,j}^n. \quad (4.1.30)$$

О постановке граничных условий на единичной скважине (условие массового и объемного дебитов) в методе Давыдова можно найти в кандидатской диссертации В.М. Шведова [151].

Таким образом, мы рассмотрели разностные формулировки всех граничных условий, применяемых в подземной гидромеханике. Полученные



соотношения для фильтрационных величин (давления  $p$ , коэффициента проницаемости  $k$ , вязкости  $\mu$ ) на слоях фиктивных ячеек обеспечивают сквозной счет при учете граничных условий на границе области интегрирования.

Перейдем теперь к изложению алгоритма метода Давыдова для моделирования двумерных двухфазных безинерционных течений.

Рассмотрим изотермическую двухфазную безинерционную фильтрацию в пласте с эффективной толщиной  $h(x, y)$  при пренебрежении капиллярными силами и силой тяжести. В качестве исходных уравнений возьмем систему, состоящую из уравнений неразрывности и линейного дифференциального уравнения А.Дарси, записанного для каждой из участвующих в движении фаз [1, 9 и др.]:

$$m \cdot h \frac{\partial \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \vec{W}_\alpha h) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.1.31)$$

$$\vec{W}_\alpha = - \frac{k}{\mu_\alpha} \cdot f_\alpha(s_\alpha) \cdot \nabla p, \quad (4.1.32)$$

$$s_1 + s_2 = 1. \quad (4.1.33)$$

Здесь индекс  $\alpha$  относит каждое уравнение системы к соответствующей фазе;  $f_\alpha(s_\alpha)$  - фазовые проницаемости, где переменную  $s$  будем отождествлять с насыщенностью для первой фазы. Остальные переменные не требуют пояснений. Вид баротропных уравнений состояния  $\rho_1 = \rho_1(p)$ ,  $\rho_2 = \rho_2(p)$  при изложении алгоритма метода Давыдова несущественен, поэтому мы их не включаем явно в систему уравнений (4.1.31) - (4.1.33).

Прежде, чем перейти к изложению алгоритма численного метода Давыдова, отметим некоторую особенность его применения к моделированию двухфазного фильтрационного потока. Напомним, что в случае однофазного фильтрационного потока на неподвижную в пространстве эйлерову сетку налагается одна система лагранжевых частиц. При рассмотрении двухфазного фильтрационного потока появляется необходимость введения двух систем лагранжевых частиц, каждая из которых обладает своим полем скоростей,



зависящим от собственных коэффициентов динамической вязкости и фазовых проницаемостей. Нахождение этих полей на эйлеровом этапе независимо друг от друга, только в соответствии с законом фильтрации данной фазы. Также независимо вычисляются перетоки масс для каждой из фаз на лагранжевом этапе и только заключительный этап метода требует привлечения характеристик обоих фазовых потоков.

Приведем теперь алгоритм метода Давыдова для моделирования двухфазных безынерционных фильтрационных течений.

### I. Эйлеров этап.

На данном этапе исходная система уравнений (4.1.31) - (4.1.33) редуцируется к следующей системе

$$\frac{\partial \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.1.34)$$

$$\vec{W}_\alpha = -\frac{k}{\mu_\alpha} \cdot f_\alpha(s_\alpha) \cdot \nabla p \quad (4.1.35)$$

Аппроксимируя систему уравнений (4.1.34) - (4.1.35) в момент времени  $t = t^n$  для ячейки  $(i, j)$  и полагая  $u_\alpha, v_\alpha$  для компонент векторов скоростей вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ , получаем:

$$(u_\alpha)_{i,j}^n = -\left(\frac{k}{\mu_\alpha}\right)_{i,j}^n \cdot f_\alpha(s) \cdot \frac{p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n}{\Delta x}, \quad (4.1.36)$$

$$(v_\alpha)_{i,j}^n = -\left(\frac{k}{\mu_\alpha}\right)_{i,j}^n \cdot f_\alpha(s) \cdot \frac{p_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}. \quad (4.1.37)$$

### II. Лагранжев этап.

Предположение о том, что массы жидкостей переносятся только за счет нормальной к границе составляющей скорости, приводит нас к следующим разностным уравнениям:

$$\begin{aligned} [m \cdot h \cdot (\rho_1 \cdot s_1)^{n+1}]_{i,j} \cdot \Delta x \Delta y &= [m \cdot h \cdot (\rho_1 \cdot s_1)^n]_{i,j} \cdot \Delta x \Delta y + \\ &+ (\Delta M_1)_{i-1/2,j}^n - (\Delta M_1)_{i+1/2,j}^n + (\Delta M_1)_{i,j-1/2}^n - (\Delta M_1)_{i,j+1/2}^n, \\ [m \cdot h \cdot (\rho_2 \cdot s_2)^{n+1}]_{i,j} \cdot \Delta x \Delta y &= [m \cdot h \cdot (\rho_2 \cdot s_2)^n]_{i,j} \cdot \Delta x \Delta y + \\ &+ (\Delta M_2)_{i-1/2,j}^n - (\Delta M_2)_{i+1/2,j}^n + (\Delta M_2)_{i,j-1/2}^n - (\Delta M_2)_{i,j+1/2}^n, \end{aligned} \quad (4.1.38)$$



Аналогично случаю однофазной фильтрации, выражения для потоков в соответствующих фаз имеют вид:

$$\begin{aligned}
 (\Delta M_\alpha)_{i+1/2,j}^n &= (\rho_\alpha)_{i+1/2,j}^n \cdot (u_\alpha)_{i+1/2,j}^n \cdot h_{i+1/2,j} \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \\
 (\Delta M_\alpha)_{i-1/2,j}^n &= (\rho_\alpha)_{i-1/2,j}^n \cdot (u_\alpha)_{i-1/2,j}^n \cdot h_{i-1/2,j} \cdot \Delta y \cdot \Delta t, \\
 (\Delta M_\alpha)_{i,j+1/2}^n &= (\rho_\alpha)_{i,j+1/2}^n \cdot (v_\alpha)_{i,j+1/2}^n \cdot h_{i,j+1/2} \cdot \Delta x \cdot \Delta t, \\
 (\Delta M_\alpha)_{i,j-1/2}^n &= (\rho_\alpha)_{i,j-1/2}^n \cdot (v_\alpha)_{i,j-1/2}^n \cdot h_{i,j-1/2} \cdot \Delta x \cdot \Delta t.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.39}$$

### III. Заключительный этап.

На данном этапе проводится регуляризация расчетной сетки по соотношениям каждой из фаз и рассчитываются новые значения плотности, давления и насыщенности. Здесь мы получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $p, \rho_1, \rho_2, s_1, s_2$ . В явном виде эта система уравнений выглядит так:

$$\begin{aligned}
 m \cdot h \cdot (\rho_1 \cdot s_1)^{n+1} \cdot \Delta x \Delta y &= m \cdot h \cdot (\rho_1 \cdot s_1)^n \cdot \Delta x \Delta y + \Delta M_1, \\
 m \cdot h \cdot (\rho_2 \cdot s_2)^{n+1} \cdot \Delta x \Delta y &= m \cdot h \cdot (\rho_2 \cdot s_2)^n \cdot \Delta x \Delta y + \Delta M_2, \\
 \rho_1^{n+1} = \rho_1(p^{n+1}), \rho_2^{n+1} = \rho_2(p^{n+1}), s_1^{n+1} + s_2^{n+1} &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.40}$$

Величины, стоящие в правых частях уравнений неразрывности в (4.1.40) для каждой из фаз известны нам из лагранжева этапа, также известны баротропные уравнения состояния.

Вычислительный цикл, таким образом, закончен и теперь вся процедура вычислений повторяется для следующего момента времени  $t^{n+2}$ . Также, как и в случае однофазной фильтрации, можно показать, что при использовании разностных схем первого и второго порядков точности для вычислений потока масс на лагранжевом этапе для каждой из фаз, полное изменение массы каждой фазы происходит только за счет притока с границы области интегрирования.

Перейдем теперь к вопросу постановки начальных и граничных условий для моделирования двумерных двухфазных безынерционных фильтрационных течений.

Начнем с условия непроницаемости на внешней границе области интегрирования. Это условие заключается в требовании равенства нулю нормальных к границе компонент скоростей фильтрации обеих фаз



$$(u_\alpha)_{N+1/2,j}^n = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.1.41)$$

или

$$(u_\alpha)_{N+1}^n + (u_\alpha)_N^n = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.1.42)$$

Применяя к (4.1.42) центральные разности, получаем:

$$\left(\frac{k}{\mu_\alpha^n}\right)_{N,j} \cdot f_\alpha(s_{N,j}^n) \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} +$$

$$\left(\frac{k}{\mu_\alpha^n}\right)_{N+1,j} \cdot f_\alpha(s_{N+1,j}^n) \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N,j}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда, требуя выполнения условий

$$s_{N+1}^n = s_N^n, \quad p_{N+1}^n = p_N^n,$$

получаем значения для слоев фиктивных ячеек:

$$(\mu_\alpha)_{N+1,j}^n = (\mu_\alpha)_{N,j}^n, \quad f_\alpha(s_{N+1,j}^n) = f_\alpha(s_{N,j}^n), \quad p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n, \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.1.43)$$

Пусть теперь задан объемный расход  $q(t)$  для одной из фаз, втекающей в граничную ячейку  $(N, j)$  через ее правую сторону. Математическая модель этого явления имеет следующий вид:

$$(u_1)_{N+1/2,j}^n \cdot \Delta y \cdot h = -q(t).$$

Перепишем вышеуказанное условие так:

$$(u_1)_{N+1/2,j}^n = -\varphi(t), \quad (4.1.44)$$

$$\text{где } \varphi(t) = \frac{q(t)}{\Delta y \cdot h}.$$

Для аппроксимации (4.1.44) используем центральные разности

$$\left(\frac{k}{\mu_\alpha^n}\right)_{N,j} \cdot f_\alpha(s_{N,j}^n) \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} +$$

$$\left(\frac{k}{\mu_\alpha^n}\right)_{N+1,j} \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N,j}^n}{2 \cdot \Delta x} = 2 \cdot \varphi(t), \quad \alpha = 1, 2. \quad (4.1.45)$$

Аналогично случаю однофазной фильтрации, вводя обозначение

$$f_1(s_{N+1,j}^n) = 1, \quad \varphi^*(t) = \frac{\varphi(t) \cdot \Delta x \cdot (\mu_1)_{N,j}}{k_{N,j}^n \cdot f_1(s_{N,j}^n)},$$

получаем значения для фиктивных слоев ячеек:



$$s_{N+1,j}^n = s_{N,j}^n, \quad p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n + 4 \cdot \varphi^*. \quad (4.1.45)$$

В случае, если втекающий в ячейку  $(N, j)$  через правую ее границу поток однороден по составу и является одной из фаз потока основной области (например, первой), то зависимость (4.1.45) записывается в следующем виде:

$$\left(\frac{k}{\mu_\alpha}\right)_{N,j} \cdot f_\alpha(s_{N,j}^n) \cdot \frac{p_{N+1,j}^n - p_{N-1,j}^n}{2 \cdot \Delta x} + \left(\frac{k}{\mu_\alpha}\right)_{N+1,j} \cdot \frac{p_{N+2,j}^n - p_{N,j}^n}{2 \cdot \Delta x} = 2 \cdot \varphi(t), \quad \alpha = 1, 2.$$

Здесь отсутствие множителя  $f_1(s_{N+1,j}^n)$  объясняется тем, что  $f_1(s_{N+1,j}^n) = 1$  для любого временного слоя  $t = t^n$ . Тогда соотношения для фиктивных ячеек примут несколько иной вид:

$$s_{N+1,j}^n = 1, \quad p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = f_1(s_{N,j}^n) \cdot (p_{N-1,j}^n - p_{N,j}^n) + p_{N,j}^n + 4 \cdot \varphi^*(t), \quad (4.1.47)$$

$$\text{где } \varphi^*(t) = \frac{\varphi(t) \cdot \Delta x \cdot (\mu_1)_{N,j}}{k_{N,j}}.$$

Задание законов изменения давления и насыщенности на границе области

$$p_{N+1/2,j}^n = F_1(t), \quad s_{N+1/2,j}^n = F_2(t) \quad (4.1.48)$$

приводит к следующим значениям параметров потока в слое фиктивных ячеек

$$s_{N+1,j}^n = 2 \cdot F_2(t) - s_{N,j}^n, \quad p_{N+1,j}^n = 2 \cdot F_1(t) - p_{N,j}^n, \quad p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n, \quad (4.1.49)$$

где последнее соотношение в (4.1.49) добавлено из физических соображений и подкреплено практическими расчетами.

Итак, мы рассмотрели основные дифференциальные граничные условия, возникающие при решении задач безынерционной двухфазной фильтрации.

Перейдем теперь к вопросу исследования нелинейных свойств разностных схем метода Давыдова для моделирования двумерных безынерционных фильтрационных течений.

В настоящее время для исследования нелинейных разностных схем метода Давыдова широко применяется метод дифференциальных приближений (д.п.).

Приведем, следуя работам [11, 48, 152], основные определения из теории д.п. разностных схем для решения систем уравнений  $L(t, x, D) = 0$ .

Пусть  $\Lambda(t, x, \tau, h, T)$  - разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор  $L(t, x, D)$ . Здесь  $D = \{D_0, D_1\}$ ,  $T = \{T_0, T^1\}$ ,



$D_1 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s} \right\}$ ,  $T^1 = \{T_1, \dots, T_s\}$ ,  $T_0$  - оператор сдвига по  $t$ ;  $T_j$  - оператор сдвига

по  $x_j$ ;  $\tau, h$  - сеточные параметры,  $h = \{h_1, \dots, h_s\}$ .

Отметим, что имеет место следующее операторное соотношение:

$$T_0 = e^{tD_0},$$

$$T_j = e^{h_j \partial / \partial x_j}.$$

Разлагая оператор  $\Lambda(t, x, \tau, h, T) = \Lambda(t, x, \tau, h, e^{tD_0}, e^{hD_1})$  в ряд Тейлора по параметрам  $\tau, h$  и используя соотношение  $h = h(\tau)$ , можно получить, что

$$\Lambda(t, x, \tau, h, T) = L(t, x, \tau, h, D) + \tau^\alpha \cdot P_\alpha(t, x, D) + R(t, x, \tau, h, D),$$

где  $R(t, x, \tau, h, D) = \sum_{k>\alpha} \tau^k \cdot P_k(t, x, D)$ .

Оператор  $L(t, x, \tau, h, D)$  называется гиперболической формой первого д.п. (г.ф.п.д.п.) разностного уравнения  $\Lambda(t, x, \tau, h, T) = 0$ . Если в операторе  $L(t, x, \tau, h, D)$  производные по времени выше первой, заменить через производные по пространству, используя исходное дифференциальное уравнение  $L(t, x, D) = 0$ , то получится параболическая форма первого д.п. (п.ф.п.д.п.) разностного уравнения  $\Lambda(t, x, \tau, h, T) = 0$ .

$\Gamma$ -форма (гиперболическая форма) получается из разностной схемы путем разложения ее членов в ряд Тейлора по сеточным параметрам, а  $\Pi$ -форма (параболическая форма) получается из  $\Gamma$ -формы путем замены производных по времени выше первой через производные по пространству с использованием не исходного дифференциального уравнения  $L(t, x, D) = 0$ , а самой  $\Gamma$ -формы.

Рассмотрим теперь вопросы устойчивости разностных схем. Естественно, что возможны различные способы получения разностных схем метода Давыдова для аппроксимации исходной системы дифференциальных уравнений движения жидкости в пористой среде. Однако в ряде случаев возникает сильная неустойчивость вычислений – появляются быстрорастущие и осциллирующие решения, которые уже не отражают поведения решений исходных дифференциальных уравнений. Для устойчивости вычислительного



процесса необходимо, чтобы возникающие при расчете малые возмущения затухали бы с течением времени [11, 39, 41, 42, 44, 48 и др.].

Как известно, для исследования линейных уравнений с постоянными коэффициентами используется метод Фурье. По существу, метод Фурье предполагает линеаризацию уравнений в окрестности течения с постоянными параметрами и не учитывает нелинейных эффектов (влияние градиентов течения), которые в ряде случаев являются истинными источниками неустойчивости.

Для анализа устойчивости, поэтому, будем использовать эвристический способ, основанный на рассмотрении параболической формы дифференциальных приближений разностных схем и пригодный для нелинейных уравнений [11 и др.]. В этом подходе оценивается знак коэффициентов  $\alpha_i$ , (коэффициентов диффузии) у диссипативных членов дифференциального приближения, содержащих частные производные второго порядка по пространственным переменным. Можно показать на примере линейного уравнения, что при отрицательном значении этого коэффициента уравнение дифференциального приближения допускает экспоненциально возрастающее во времени (неустойчивое) решение [11].

Таким образом, в качестве оценки критериев устойчивости нелинейных схем (хорошо подтвержденных на практике) здесь используется условие положительности коэффициентов диффузии у диссипативных членов соответствующего дифференциального приближения. Для широкого класса линейных разностных схем результаты анализа устойчивости с помощью метода дифференциальных приближений и метода Фурье совпадают.

В работах [119, 121] были рассмотрены разностные схемы метода Давыдова для моделирования двумерных однофазных безынерционных фильтрационных течений. Здесь была определена Г-форма четвертого дифференциального приближения, которая имеет следующий вид [121, 124, 125]:

$$\begin{aligned}
 [m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w})]_{i,j}^n &= \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \rho}{\partial x} u) - \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\Delta x^3}{8} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (-\frac{\Delta x^2}{6} \rho + \frac{\Delta x^3}{12} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\Delta x^4}{24} \\
 &\cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}) \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (-\frac{\Delta x^2}{6} u + \frac{\Delta x^3}{12} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x^4}{24}) \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + (\frac{\Delta x^3}{24} u - \frac{\Delta x^4}{8} \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^4}{48} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^4}{120} u \frac{\partial^5 \rho}{\partial x^5} - \\
 &- \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (-\frac{\Delta x^2}{6} u + \frac{\Delta x^3}{12} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x^4}{24}) \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + (\frac{\Delta x^3}{24} u - \frac{\Delta x^4}{8} \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial^4 \rho}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^4}{48} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^4}{120} u \frac{\partial^5 \rho}{\partial x^5} - \frac{\Delta x^4}{120} \\
 &\cdot \rho \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} u + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v \frac{\partial \rho}{\partial y}) - \frac{\Delta y^2}{4} \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\Delta y^3}{8} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (-\frac{\Delta y^2}{6} \rho + \frac{\Delta y^3}{12} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\Delta y^4}{24} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \\
 &+ (-\frac{\Delta y^2}{6} v + \frac{\Delta y^3}{12} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\Delta y^4}{24} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \frac{\partial^3 \rho}{\partial y^3} + (\frac{\Delta y^3}{24} v - \frac{\Delta y^4}{8} \frac{\partial v}{\partial y}) \frac{\partial^4 \rho}{\partial y^4} - \frac{\Delta y^4}{48} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{\Delta y^4}{120} \rho \frac{\partial^5 v}{\partial y^5} - \\
 &- \frac{\Delta y^4}{120} v \frac{\partial^5 \rho}{\partial y^5} - m \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - m \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 \rho}{\partial t^3} - m \frac{\Delta t^3}{24} \frac{\partial^4 \rho}{\partial t^4} - m \frac{\Delta t}{120} \frac{\partial^5 \rho}{\partial t^5} + O(\Delta x^5, \Delta y^5, \Delta t^5). \quad (4.1.50)
 \end{aligned}$$

Параболическая форма второго дифференциального приближения принимает следующий вид [108, 112, 113]:

$$\begin{aligned}
 m \rho_p \frac{\partial \rho}{\partial t} &= a_{11} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + b_{11} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + b_{12} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x \partial y^2} + b_{13} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x \partial y^2} + b_{21} \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^2 \partial y} + \\
 &+ b_{22} \frac{\partial^3 \rho}{\partial y^3}, \quad (4.1.51)
 \end{aligned}$$

$$m \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{m} \{ (4u^2 + 2v^2 + |uv|\rho_p) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + (4v^2 + 2u^2 + |uv|\rho_p) \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + 2|uv|\rho_p \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} \} \quad (4.1.52)$$

Приведем  $a_{i,j}$  - элементы матрицы аппроксимационной вязкости (коэффициенты при  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}$ ):

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \beta \rho + \Delta x u \rho_p + \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial u}{\partial x} \rho_p - \frac{\Delta t}{2m} (4u^2 + 2v^2 + |uv|\rho_p) + \frac{\Delta t^2}{6m} \{ 5u^2 \rho_p \frac{\partial u}{\partial x} + 4\beta u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2u^2 \rho_p \frac{\partial v}{\partial y} + \\
 &+ \beta u \frac{\partial v}{\partial y} (2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y}) + \beta u (\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} + uv \rho_p \frac{\partial u}{\partial y} + 2\beta v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + 2uv \rho_p \frac{\partial v}{\partial y} + 2\beta v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \beta \frac{\partial \rho}{\partial y} + \\
 &+ (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}) (4u^2 + 2v^2 + |uv|\rho_p) \},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \cdot a_{12} &= -\frac{1}{m} |uv|\rho_p + \frac{\Delta t}{6m} \{ uv \rho_p (2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial y}) + 2u \frac{\partial u}{\partial x} (v \rho_p + \beta \frac{\partial \rho}{\partial y}) + u \frac{\partial v}{\partial x} (\beta \frac{\partial \rho}{\partial x} + 3u \rho_p) + 2v \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \\
 &\cdot (\beta \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \rho_p) + v \frac{\partial u}{\partial y} (3 \rho_p v + \beta \frac{\partial \rho}{\partial y}) + uv \rho_p (3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y}) \},
 \end{aligned}$$

$$a_{22} = \beta \rho + \Delta y v \rho_p + \frac{\Delta y^2}{4} \rho_p \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\Delta t}{2m} (4v^2 + 2u^2 + |uv|\rho_p) + \frac{\Delta t^2}{6m} \{ 2\beta u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} \beta \frac{\partial \rho}{\partial x} +$$



$$\begin{aligned}
& + 2u \frac{\partial v}{\partial x} \left( \beta \frac{\partial \rho}{\partial y} + v \rho_p \right) + 5v^2 \rho_p \frac{\partial v}{\partial y} + 4\beta v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + 2\rho_p \frac{\partial u}{\partial x} v^2 + \beta v \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \beta \left( 2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \\
& + uv \rho_p \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (4v^2 + 2u^2 + |uv|) \rho_p \} \quad (4.1.53)
\end{aligned}$$

Элементы матрицы аппроксимационной дисперсии определяются из параболической формы второго дифференциального приближения и выглядят так [121, 124, 125]:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \rho_p \left( -\frac{\Delta x^2}{6} u + \frac{\Delta x^3}{12} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t^2}{6m} \left\{ \beta u \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + 2\beta u \left( \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + 2\beta \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + 4u^3 \rho_p + \right. \\
& \left. + \beta u \left( \rho \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right\}; \\
b_{22} &= \rho_p \left( -\frac{\Delta x^2}{6} v + \frac{\Delta y^3}{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\Delta t^2}{6m} \left\{ \beta v \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + 2\beta v \left( \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + 2\beta \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + 4v^3 \rho_p + \right. \\
& \left. + \beta v \left( \rho \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right\}, \\
b_{21} &= \frac{\Delta t^2}{6m} \left\{ 3\beta u \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2\beta u \left( \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + uv \left( \beta \frac{\partial \rho}{\partial y} + v \rho_p \right) + \beta v \left( \rho \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right\}, \\
b_{13} &= \frac{\Delta t^2}{6m} \left\{ \beta u \left( \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + uv \left( \beta \frac{\partial \rho}{\partial x} + u \rho_p \right) + 2\beta v \left( \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + 3\beta v \left( v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}. \quad (4.1.54)
\end{aligned}$$

Условием устойчивости разностных схем безынерционной фильтрации при использовании классической модели Дарси является положительность диагональных элементов матрицы аппроксимационной вязкости (4.1.53).

## 4.2. Метод Давыдова для моделирования инерционных фильтрационных течений при использовании модели С.А.Христиановича.

Рассмотрим изотермическую фильтрацию однородной жидкости в нефтегазоносном пласте с учетом сил инерции. В качестве уравнения движения будем использовать современное модельное уравнение С.А.Христиановича [106-108, 46, 47].

При изложении алгоритма метода Давыдова будем использовать разностные схемы первого порядка точности, эффективность которых показали проведенные практические расчеты [46, 47].



Покроем область интегрирования фиксированной в пространстве (эйлеровой) расчетной сеткой в декартовой системе координат прямоугольными ячейками с размерами  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и разбиваем на  $N \times M$  ячеек, где  $N, M$  - число ячеек по осям  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно.

Исходная система уравнений подземной гидромеханики при изотермическом режиме фильтрации и использовании уравнения С.А.Христиановича выглядит так [143]:

$$h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot m \cdot \vec{U} \cdot h) = 0, \quad (4.2.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} + \varepsilon^2 (\nabla p + \beta \cdot p \nabla \ln m) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} \vec{U} = 0, \quad (4.2.2)$$

где  $U = (u, v)$  - вектор действительной скорости жидкости,  $\beta$  - безразмерная физическая характеристика пласта ( $0 < \beta < 1$ ), величины  $[\lambda] = L^2$  и  $[\varepsilon^2] = 1$  связаны с коэффициентом проницаемости пласта  $k$  в модели Дарси так [121]:

$$k = \lambda \cdot \varepsilon^2. \quad (4.2.3)$$

Напомним, что вектор скорости фильтрации  $W$  и действительной скорости  $U$  связаны так [9]:

$$W = m \cdot U \quad (4.2.4)$$

Рассмотрим теперь все этапы целого расчетного цикла метода Давыдова в отдельности.

### **I. Эйлеров этап.**

На данном этапе исходная система уравнений подземной гидромеханики сводится к единственному уравнению – модельному уравнению С.А.Христиановича. В случае пространственно-двумерной фильтрации уравнение (4.2.2) имеет следующий вид:

$$\rho \frac{du}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} u = 0, \quad (4.2.5)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} \right) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} v = 0, \quad (4.2.6)$$

где выражения для полных производных имеют следующий вид:



$$\frac{du}{dt} = u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.2.7)$$

$$\frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.2.8)$$

Аппроксимируя уравнения (4.2.5) - (4.2.6) для ячейки (i,j) в момент времени  $t = t^n$ , получаем следующие разностные уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j}^n = & u_{i,j}^n - \Delta t \cdot (u_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i,j+1/2}^n - u_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) - \\ & - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} [\varepsilon^2 (\frac{p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \beta \cdot (\frac{p}{m})_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i+1/2,j}^n - m_{i-1/2,j}^n}{\Delta x}) + (\frac{\mu m}{\lambda})_{i,j}^n \cdot u_{i,j}^n], \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j}^n = & v_{i,j}^n - \Delta t \cdot (u_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i+1/2,j}^n - v_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) - \\ & - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} [\varepsilon^2 (\frac{p_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} + \beta (\frac{p}{m})_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i,j+1/2}^n - m_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) + (\frac{\mu m}{\lambda})_{i,j}^n \cdot v_{i,j}^n]. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Здесь величины с дробными индексами относятся к границе ячейки и вычисляются аналогично случаю применения модельного уравнения А.Дарси.

Таким образом, на первом этапе, в предположении заторможенности поля плотности жидкости, по сложившемуся на слое  $t = t^n$  фильтрационных величин вычисляются значения скоростей для центров лагранжевых частиц.

## II. Лагранжев этап.

На данном этапе определяются потоки массы через границы эйлеровых ячеек. Дифференциальное уравнение неразрывности в разностной форме запишется так:

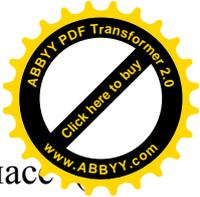
$$(m \cdot h \cdot \rho^{n+1})_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = (m \cdot h \cdot \rho^n)_{i,j} + \Delta M_{i-1/2,j}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n, \quad (4.2.11)$$

где формулы для нахождения потока масс имеют здесь следующий вид (например, для правой границы ячейки):

$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \langle \rho_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle m_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle h_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t \quad (4.2.12)$$

и т.д. Знак  $\langle \rangle$  обозначает значения физических величин на границе ячейки.

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим два случая вычисления потока масс  $\Delta M^n$ :



а) формула второго порядка точности для вычисления потока масс (на примере правой границы ячейки).

$$\begin{aligned} \text{Если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n &\equiv \tilde{u}_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4} > 0, \text{ то} \\ \tilde{u}_{i+1/2,j}^n &= \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4}, \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n + \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{4}, \\ m_{i+1/2,j}^n &= m_{i,j}^n + \frac{m_{i+1,j}^n - m_{i-1,j}^n}{4}. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n &\equiv \tilde{u}_{i+1,j}^n - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4} < 0, \\ \text{то } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n &= \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4}, \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n + \frac{\rho_{i+2,j}^n - \rho_{i,j}^n}{4}, m_{i+1/2,j}^n = m_{i+1,j}^n + \frac{m_{i+2,j}^n - m_{i,j}^n}{4}. \end{aligned}$$

В противном случае, т.е.

$$\text{при } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \equiv \tilde{u}_{i,j}^n + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i,j}^n + \frac{\tilde{u}_{i+1,j}^n - \tilde{u}_{i-1,j}^n}{4} < 0$$

$$\text{или при } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0 \text{ и } \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \equiv \tilde{u}_{i+1,j}^n - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = \tilde{u}_{i+1,j}^n - \frac{\tilde{u}_{i+2,j}^n - \tilde{u}_{i,j}^n}{4} > 0$$

полагаем  $\Delta M_{i+1/2,j}^n = 0$ .

б) приведем аналогично вышеуказанному случаю формулы первого порядка точности для потока масс  $\Delta M^n$ :

$$\text{Если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n > 0, \text{ то } \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i,j}^n, m_{i+1/2,j}^n = m_{i,j}^n.$$

$$\text{Если } \tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n < 0, \text{ то } \rho_{i+1/2,j}^n = \rho_{i+1,j}^n, m_{i+1/2,j}^n = m_{i+1,j}^n. \quad (4.2.14)$$

### III. Заключительный этап.

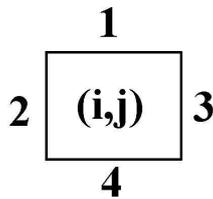
На данном этапе вычисляются окончательные поля параметров фильтрационного потока на фиксированной эйлеровой сетке в момент времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ .

Для автоматического определения направления потока воспользуемся введенными Ю.М. Давыдовым (функции Давыдова) функциями  $D_{i,j}^n(m)$ ,



пронумеруем все стороны прямоугольной ячейки  $(i, j)$  индексами  $m = 1, \dots, 4$ ,

это показано ниже:



$$D_{i,j}^n(m) = \begin{cases} 1, & \text{при втекании в ячейку } (i, j) \text{ через сторону } m; \\ 0, & \text{при вытекании из ячейки } (i, j) \text{ через сторону } m. \end{cases} \quad (4.2.15)$$

Параметр потока  $\rho$  для рассматриваемой ячейки будут следующими:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + 2 \cdot \{ [D_{i,j}^n(1) - 0,5] \cdot \Delta M_{i-1/2,j}^n + [D_{i,j}^n(2) - 0,5] \cdot \Delta M_{i,j-1/2}^n + [D_{i,j}^n(3) - 0,5] \cdot \Delta M_{i+1/2,j}^n + [D_{i,j}^n(4) - 0,5] \cdot \Delta M_{i,j+1/2}^n \} \cdot \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y}. \quad (4.2.16)$$

Данная схема метода Давыдова является явной и поэтому не требует специальных приемов для ее разрешения.

**Перейдем теперь к вопросу постановки начальных и граничных условий для моделирования двумерных однофазных инерционных фильтрационных течений.**

Заметим, что если этого требует постановка задачи, в методе Давыдова в качестве начальных условий могут задаваться неоднородные граничные условия, полученные: 1) из расчетов тем же методом Давыдова на более грубой расчетной сетке или при меньших временах счета, 2) из расчетов, полученных при применении других методов, 3) из аналитических решений, 4) из натуральных физических экспериментов, 5) из неоднородных физических моделей (как, например, в задаче о Релей-Тейлоровской неустойчивости).

Традиционно при решении практических задач подземной гидромеханики в качестве начальных условий используются параметры невозмущенного фильтрационного потока, которые обычно соответствуют времени до периода включения в работу вертикальных и горизонтальных скважин. В качестве



начальных условий в данной работе использовались функции началь  
распределений в расчетной области:

$$p = p_i(x, y), \rho = \rho(p_i(x, y)), m = m(p_i(x, y)), u = u_i(x, y), v = v_i(x, y), \lambda = \lambda_i(x, y),$$

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^2_i(x, y), \beta = \beta_i = const, \mu = \mu_i = const. \quad (4.2.17)$$

Перейдем теперь к граничным условиям. Как и в предыдущей главе, для моделирования приграничных течений будем использовать метод фиктивных ячеек Ю.М. Давыдова [11 и др.].

Начнем с условия непроницаемости на внешней границе области интегрирования:

$$\tilde{u}_{N+1/2,j}^n = 0, \tilde{v}_{N+1,j}^n = \tilde{v}_{N,j}^n. \quad (4.2.18)$$

Положим  $\tilde{u}_{i+1/2,j}^n = 0,5 \cdot (\tilde{u}_{i,j}^n + \tilde{u}_{i+1,j}^n)$ . Полагаем для первого слоя ячеек

$$p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \rho_{N+1,j}^n = \rho(p_{N,j}^n), m_{N+1,j}^n = m(p_{N,j}^n), \mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n, u_{N+1,j}^n = -u_{N,j}^n,$$

$$v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n, (\varepsilon^2)_{N+1,j} = (\varepsilon^2)_{N,j}, \lambda_{N+1,j} = \lambda_{N,j}, \beta_{N+1,j} = \beta_{N,j}. \quad (4.2.19)$$

Далее, используя центральные разности по пространственным переменным, для второго слоя фиктивных ячеек имеем:

$$u_{N+2,j}^n = -u_{N-1,j}^n, v_{N+2,j}^n = v_{N-1,j}^n, p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n, m_{N+2,j}^n = m(p_{N-1,j}^n). \quad (4.2.20)$$

Рассмотрим теперь условие полного протекания на внешней области интегрирования:

$$\tilde{u}_{N+1,j}^n = \tilde{u}_{N,j}^n, \tilde{v}_{N+1,j}^n = \tilde{v}_{N,j}^n. \quad (4.2.21)$$

Полагаем для первого слоя ячеек следующее:

$$p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \rho_{N+1,j}^n = \rho(p_{N,j}^n), m_{N+1,j}^n = m(p_{N,j}^n), \mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n, u_{N+1,j}^n = u_{N,j}^n,$$

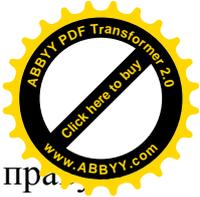
$$v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n, (\varepsilon^2)_{N+1,j} = (\varepsilon^2)_{N,j}, \lambda_{N+1,j} = \lambda_{N,j}, \beta_{N+1,j} = \beta_{N,j}. \quad (4.2.23)$$

Тогда для второго слоя ячеек получаем следующие соотношения:

$$u_{N+2,j}^n = 2 \cdot u_{N,j}^n - u_{N-1,j}^n, v_{N+2,j}^n = 2 \cdot v_{N,j}^n - v_{N-1,j}^n,$$

$$m_{N+2,j}^n = 2 \cdot m_{N,j}^n - m_{N-1,j}^n, p_{N+2,j}^n = 2 \cdot p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n \quad (4.2.24)$$

Рассмотрим теперь граничное условие, связанное с заданием расхода жидкости на границе области интегрирования. Пусть, например, для ячейки



$(N, j)$  задан объемный расход  $q(t)$  жидкости, вытекающей через ее правую сторону. Тогда разностную формулировку этого условия можно представить в следующем виде:

$$\Delta y \cdot h \cdot m \cdot \tilde{u}_{N+1/2, j}^n = q(t), \quad (4.2.25)$$

или, обозначая

$$\varphi = q(t) / (\Delta y \cdot h \cdot m), \quad (4.2.26)$$

получаем

$$\tilde{u}_{N+1/2, j}^n = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущим случаям полагаем:

$$p_{N+1, j}^n = p_{N, j}^n, \rho_{N+1, j}^n = \rho(p_{N, j}^n), m_{N+1, j}^n = m(p_{N, j}^n), \mu_{N+1, j}^n = \mu_{N, j}^n, \\ u_{N+1, j}^n = u_{N, j}^n, v_{N+1, j}^n = v_{N, j}^n, (\varepsilon^2)_{N+1, j}^n = (\varepsilon^2)_{N, j}^n, \lambda_{N+1, j}^n = \lambda_{N, j}^n, \beta_{N+1, j}^n = \beta_{N, j}^n.$$

Далее, полагая

$$u_{N+2, j}^n = u_{N-1, j}^n, v_{N+2, j}^n = 2 \cdot v_{N, j}^n - v_{N-1, j}^n, m_{N+2, j}^n = m_{N-1, j}^n,$$

получаем для значения давления во втором слое ячеек:

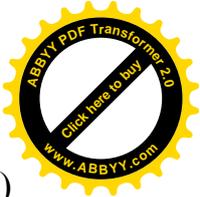
$$p_{N+2, j}^n = p_{N-1, j}^n - \frac{4 \cdot \Delta x}{\Delta t} \cdot \left( \frac{\rho^n}{\varepsilon^2} \right)_{N, j} \cdot \left( \varphi(t) - u_{N, j}^n \left( 1 - \frac{\Delta t}{\rho^n} \left( \frac{\mu \cdot m^n}{\lambda} \right) \right) \right)_{N, j}. \quad (4.2.27)$$

Таким образом, мы рассмотрели основные виды граничных условий и разностные формулировки для вычисления фильтрационных величин в слоях фиктивных ячеек [143].

Перейдем теперь к изложению алгоритма метода Давыдова для моделирования двумерных двухфазных инерционных фильтрационных течений [144].

Будем рассматривать изотермическую двухфазную фильтрацию при учете сил инерции и пренебрежении капиллярными силами и силой тяжести. В качестве исходных уравнений возьмем систему, состоящую из уравнения неразрывности и модельного уравнения акад. С.А. Христиановича, записанного для каждой из участвующих в движении фаз:

$$m \cdot h \frac{\partial \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho_\alpha \cdot m \cdot U_\alpha h) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.2.28)$$



$$\rho_{\alpha} \frac{dU_{\alpha}}{dt} + \varepsilon^2 (f_{\alpha}(s) \cdot \nabla p + \beta \cdot p \nabla \ln m) + \frac{\mu_{\alpha} \cdot m}{\lambda} U_{\alpha} = 0, \quad (4.2.29)$$

где  $s_1 + s_2 = 1$ ;  $\rho_{\alpha}$ ,  $U_{\alpha}$ ,  $p$ ,  $\mu_{\alpha}$  - фильтрационные параметры соответствующей фазы течения - соответственно плотность, вектор действительной скорости, давление и вязкость фазы;  $s_{\alpha}$  - насыщенность соответствующей фазой;  $f_{\alpha}(s)$  - фазовые проницаемости, где переменную  $s$  будем отождествлять с насыщенностью для первой фазы,  $m$  - пористость среды,  $\lambda, \varepsilon^2$  - характеристики среды течения такие, что  $k = \lambda \cdot \varepsilon^2$  - коэффициент проницаемости пористой среды;  $\beta \in (0; 1)$  - безразмерная постоянная, которая зависит от физических свойств пористой среды течения.

Уравнение (4.2.29) является обобщением классического закона теории фильтрации - линейного закона Дарси, который для случая двухфазного течения имеет вид [9]:

$$W_{\alpha} = - f_{\alpha}(s) \cdot \frac{k}{\mu_{\alpha}} \cdot \nabla p, \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $W_{\alpha} = m \cdot U_{\alpha}$  - вектор скорости фильтрации соответствующей фазы.

Систему уравнений движения жидкости в пористой среде замыкает уравнение состояния вида

$$\rho_{\alpha} = \rho_{\alpha}(p), \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.2.30)$$

записанное для каждой из фаз в отдельности.

### **1. Эйлеров этап.**

На этом этапе для каждой расчетной сетки (i, j) пренебрегаем всеми эффектами, связанными с ее перемещениями. Будем пренебрегать деформацией грунтового скелета, в силу этого конвективный член из уравнения неразрывности системы (4.2.28) убирается и поле плотности оказывается «замороженным». Исходная система уравнений, таким образом, сводится на этом этапе к единственному уравнению - к уравнению (4.2.29).

Имеем, что

$$\rho_{\alpha} \frac{du_{\alpha}}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{\mu_{\alpha} \cdot m}{\lambda} u_{\alpha} = 0, \quad (4.2.31)$$



$$\rho_{\alpha} \frac{dv_{\alpha}}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} \right) + \frac{\mu_{\alpha} \cdot m}{\lambda} v_{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

где полная производная  $\frac{d\varphi_{\alpha}}{dt}$ ,  $\varphi_{\alpha} = (u_{\alpha}, v_{\alpha})$  определяется как

$$\frac{d\varphi_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x} \cdot u_{\alpha} + \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial y} \cdot v_{\alpha} \quad (4.2.32)$$

Аппроксимируя (4.2.31) в момент времени  $t^n$  центральными разностями по пространственным переменным и правыми разностями по времени, мы находим значения действительной скорости жидкости  $(\tilde{u}_{\alpha}^n)_{i,j}$  для каждой из фаз в отдельности для расчетной сетки  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_{\alpha}^n)_{i,j} = & (u_{\alpha}^n)_{i,j} - \Delta t \left( (\tilde{u}_{\alpha}^n)_{i,j} \cdot \frac{(\tilde{u}_{\alpha}^n)_{i+1/2,j} - (\tilde{u}_{\alpha}^n)_{i-1/2,j}}{\Delta x} + (\tilde{v}_{\alpha}^n)_{i,j} \cdot \frac{(u_{\alpha}^n)_{i,j+1/2} - (u_{\alpha}^n)_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) - \\ & \frac{\Delta t}{(\rho_{\alpha}^n)_{i,j}} \left[ (\varepsilon^2)_{i,j} \left( \frac{p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \beta \left( \frac{p}{m} \right)_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i+1/2,j}^n - m_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \right) + \left( \frac{\mu_{\alpha} m}{\lambda} \right)_{i,j}^n \cdot (u_{\alpha}^n)_{i,j} \right], \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_{\alpha}^n)_{i,j} = & (v_{\alpha}^n)_{i,j} - \Delta t \left( (u_{\alpha}^n)_{i,j} \cdot \frac{(v_{\alpha}^n)_{i+1/2,j} - (v_{\alpha}^n)_{i-1/2,j}}{\Delta x} + (v_{\alpha}^n)_{i,j} \cdot \frac{(v_{\alpha}^n)_{i,j+1/2} - (v_{\alpha}^n)_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) - \\ & \frac{\Delta t}{(\rho_{\alpha}^n)_{i,j}} \left[ (\varepsilon^2)_{i,j} \left( \frac{p_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} + \beta \left( \frac{p}{m} \right)_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i,j+1/2}^n - m_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \right) + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n \cdot (v_{\alpha}^n)_{i,j} \right], \end{aligned}$$

где величины с дробными ячейками относятся к границе ячейки и вычисляются, например, так

$$p_{i,j+1/2}^n = \frac{p_{i,j}^n + p_{i,j+1}^n}{2}, \quad (4.2.34)$$

а верхний индекс указывает на принадлежность к  $n$ -му временному слою. Таким образом, на эйлеровом этапе мы находим значения скорости фильтрации для каждой из фаз в отдельности:  $(\tilde{u}_{\alpha}^n)_{i,j}$ ,  $(\tilde{v}_{\alpha}^n)_{i,j}$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

## II. Лагранжев этап.

На этом этапе находятся потоки масс  $\Delta M_{\alpha}^n$  через границы эйлеровых ячеек за рассматриваемое время  $\Delta t$  для каждой из фаз в отдельности. При этом предполагается, что вся масса жидкости переносится только за счет нормальной к границе ячейки составляющей скорости фильтрации.



Уравнение неразрывности (4.2.28) в разностной форме можно записать следующим образом (в предположении, что поток жидкости через ячейку  $(i, j)$  направлен слева направо и снизу вверх):

$$(m \cdot h \cdot \rho_\alpha^{n+1})_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = (m \cdot h \cdot \rho_\alpha^n)_{i,j} + (\Delta M_\alpha)_{i-1/2,j}^n - (\Delta M_\alpha)_{i+1/2,j}^n + (\Delta M_\alpha)_{i,j-1/2}^n - (\Delta M_\alpha)_{i,j+1/2}^n \quad (4.2.35)$$

Потоки массы  $\Delta M_\alpha^n$  имеют здесь следующий вид (например, для правой и верхней границы ячейки):

$$\begin{aligned} (\Delta M_\alpha)_{i+1/2,j}^n &= (\rho_\alpha)_{i+1/2,j}^n \cdot (\tilde{u}_\alpha)_{i+1/2,j}^n \cdot m_{i+1/2,j}^n \cdot h_{i+1/2,j}^n \cdot \Delta y \cdot \Delta t \\ (\Delta M_\alpha)_{i,j+1/2}^n &= (\rho_\alpha)_{i,j+1/2}^n \cdot (\tilde{v}_\alpha)_{i,j+1/2}^n \cdot m_{i,j+1/2}^n \cdot h_{i,j+1/2}^n \cdot \Delta x \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

а) можно определять  $\Delta M_\alpha^n$  по формулам второго порядка точности.

Покажем это на примере правой границы.

Если  $(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n > 0$  и

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n &\equiv (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + \left( \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x} \right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - (\tilde{u}_\alpha)_{i-1,j}^n}{4} > 0, \text{ то} \\ (\tilde{u}_\alpha)_{i+1/2,j}^n &= (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - (\tilde{u}_\alpha)_{i-1,j}^n}{4}, \quad (\rho_\alpha)_{i+1/2,j}^n = (\rho_\alpha)_{i,j}^n + \frac{(\rho_\alpha)_{i+1,j}^n - (\rho_\alpha)_{i-1,j}^n}{4}. \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

Если  $(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n < 0$  и

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n &\equiv (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - \left( \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x} \right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i+2,j}^n - (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n}{4} < 0, \text{ то} \\ (\tilde{u}_\alpha)_{i+1/2,j}^n &= (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i+2,j}^n - (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n}{4}, \quad (\rho_\alpha)_{i+1/2,j}^n = (\rho_\alpha)_{i+1,j}^n - \frac{(\rho_\alpha)_{i+2,j}^n - (\rho_\alpha)_{i,j}^n}{4}. \end{aligned}$$

В противном случае, т.е.

при  $(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n > 0$  и

$$(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n \equiv (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + \left( \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x} \right)_{i,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - (\tilde{u}_\alpha)_{i-1,j}^n}{4} < 0$$

или при  $(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n < 0$  и

$$(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n \equiv (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - \left( \frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x} \right)_{i+1,j}^n \cdot \frac{\Delta x}{2} = (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n - \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i+2,j}^n - (\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n}{4} > 0,$$

полагаем  $\Delta M_\alpha^n = 0$ .



б) можно определять  $\Delta M_\alpha^n$  по формулам первого порядка точно, которые также учитывают направление потока

Если  $(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n > 0$ , то

$$(\tilde{u}_\alpha)_{i+1/2,j}^n = \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n}{2}, \quad (\rho_\alpha)_{i+1/2,j}^n = (\rho_\alpha)_{i,j}^n.$$

Если  $(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n < 0$ , то (4.2.38)

$$(\tilde{u}_\alpha)_{i+1/2,j}^n = \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n}{2}, \quad (\rho_\alpha)_{i+1/2,j}^n = (\rho_\alpha)_{i+1,j}^n.$$

Кроме перечисленных способов определения потока масс могут быть использованы формулы определения для  $\Delta M_\alpha^n$ , не учитывающие направление потока.

Значения  $m_{i+1/2,j}^n, h_{i+1/2,j}^n$  также можно вычислять или по формулам первого порядка точности

$$h_{i+1/2,j}^n = \frac{h_{i,j}^n + h_{i+1,j}^n}{2}, \quad m_{i+1/2,j}^n = \frac{m_{i,j}^n + m_{i+1,j}^n}{2}, \quad (4.2.39)$$

или по формулам второго порядка точности

$$h_{i+1/2,j}^n = \frac{h_{i-1,j}^n + 2 \cdot h_{i,j}^n + h_{i+1,j}^n}{4}, \quad m_{i+1/2,j}^n = \frac{m_{i-1,j}^n + 2 \cdot m_{i,j}^n + m_{i+1,j}^n}{4} \quad (4.2.40)$$

Здесь также возможны другие способы вычислений.

### III. Заключительный этап.

На этом этапе для каждой ячейки расчетного поля (i, j) рассчитываются новые значения для полей давления и насыщенности. Для нахождения новых значений физических параметров, для каждой ячейки расчетного поля (i, j) решается система, состоящая из пяти алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных  $p, \rho_1, \rho_2, s_1, s_2$ . Обозначая

$$(\Delta M_\alpha)^n = (\Delta M_\alpha)_{i-1/2,j}^n - (\Delta M_\alpha)_{i+1/2,j}^n + (\Delta M_\alpha)_{i,j-1/2}^n - (\Delta M_\alpha)_{i,j+1/2}^n \quad (4.2.41)$$

как суммарный переток в ячейку (i, j) для каждой фазы, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\rho_1)^{n+1} \cdot (s_1)^{n+1} \cdot m \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y &= (\rho_1)^n \cdot (s_1)^n \cdot m \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y + (\Delta M_1)^n, \\ (\rho_2)^{n+1} \cdot (s_2)^{n+1} \cdot m \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y &= (\rho_2)^n \cdot (s_2)^n \cdot m \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y + (\Delta M_2)^n, \end{aligned} \quad (4.2.42)$$



$$(\rho_1)^{n+1} = \rho_1(p^{n+1}), (\rho_2)^{n+1} = \rho_2(p^{n+1}), (s_1)^{n+1} + (s_2)^{n+1} = 1.$$

Неизвестными в данной системе уравнений являются новые значения плотности, давления и насыщенности:

$$(\rho_1)^{n+1}, (\rho_2)^{n+1}, p^{n+1}, (s_1)^{n+1}, (s_2)^{n+1}.$$

Данная система уравнений имеет единственное решение.

Для вычисления значений физических параметров во внутренних точках области интегрирования в методе Давыдова используются шаблоны типа «крест». Чтобы не нарушать единообразия вычислений на границе области интегрирования, вводятся фиктивные ячейки, предложенные автором метода Ю.М. Давыдовым.

Начнем с условия непроницаемости на внешней границе области интегрирования. Это условие заключается в требовании равенства нулю нормальных к границе компонент скоростей фильтрации обеих фаз:

$$(\tilde{u}_\alpha)_{N+1/2,j}^n = 0, (\tilde{v}_\alpha)_{N+1,j}^n = (\tilde{v}_\alpha)_{N,j}^n, \quad (4.2.43)$$

где  $(\tilde{u}_\alpha)_{i+1/2,j}^n = \frac{(\tilde{u}_\alpha)_{i,j}^n + (\tilde{u}_\alpha)_{i+1,j}^n}{2}$ .

Естественно положить

$$\begin{aligned} (\rho_\alpha)_{N+1,j}^n &= (\rho_\alpha)_{N,j}^n, (\mu_\alpha)_{N+1,j}^n = (\mu_\alpha)_{N,j}^n, \lambda_{N+1,j}^n = \lambda_{N,j}^n, m_{N+1,j}^n = m_{N,j}^n, \\ (\varepsilon^2)_{N+1,j}^n &= (\varepsilon^2)_{N,j}^n, (u_\alpha)_{N+1,j}^n = -(u_\alpha)_{N,j}^n, (v_\alpha)_{N+1,j}^n = (v_\alpha)_{N,j}^n, p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \\ (s_\alpha)_{N+1,j}^n &= (s_\alpha)_{N,j}^n. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Применяя к (4.2.43) схему (4.2.33), находим значения во втором слое фиктивных ячеек:

$$(u_\alpha)_{N+2,j}^n = -(u_\alpha)_{N-1,j}^n, (v_\alpha)_{N+2,j}^n = (v_\alpha)_{N-1,j}^n, m_{N+2,j}^n = m_{N-1,j}^n, p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n \quad (4.2.45)$$

Рассмотрим теперь условие полного протекания на границе области интегрирования:

$$(\tilde{u}_\alpha)_{N+1,j}^n = (\tilde{u}_\alpha)_{N,j}^n, (\tilde{v}_\alpha)_{N+1,j}^n = (\tilde{v}_\alpha)_{N,j}^n \quad (4.2.46)$$

Без ограничения общности можно положить

$$\begin{aligned} (\rho_\alpha)_{N+1,j}^n &= (\rho_\alpha)_{N,j}^n, (\mu_\alpha)_{N+1,j}^n = (\mu_\alpha)_{N,j}^n, \lambda_{N+1,j}^n = \lambda_{N,j}^n, m_{N+1,j}^n = m_{N,j}^n, \\ (\varepsilon^2)_{N+1,j}^n &= (\varepsilon^2)_{N,j}^n, (u_\alpha)_{N+1,j}^n = (u_\alpha)_{N,j}^n, (v_\alpha)_{N+1,j}^n = (v_\alpha)_{N,j}^n, p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \\ (s_\alpha)_{N+1,j}^n &= (s_\alpha)_{N,j}^n. \end{aligned} \quad (4.2.47)$$



Тогда мы получаем следующее:

$$(u_{\alpha})_{N+2,j}^n = 2 \cdot (u_{\alpha})_{N,j}^n - (u_{\alpha})_{N-1,j}^n, (v_{\alpha})_{N+2,j}^n = 2 \cdot (v_{\alpha})_{N,j}^n - (v_{\alpha})_{N-1,j}^n,$$

$$m_{N+2,j}^n = 2 \cdot m_{N,j}^n - m_{N-1,j}^n, p_{N+2,j}^n = 2 \cdot p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n$$

Достаточно просто моделируется граничное условие заданного закона изменения давления на границе области

$$p_{N+1/2,j}^n = \Omega(t)$$

Отсюда можно легко получить, что  $p_{N+1,j}^n = 2 \cdot \Omega(t) - p_{N,j}^n$ .

Рассмотрим теперь граничные условия, связанные с заданием расхода жидкости на границе области интегрирования. Пусть, например, для ячейки  $(N, j)$  задан объемный расход  $q(t)$  жидкости для одной из фаз, например первой, вытекающей через ее правую сторону. Тогда для второй фазы на границе области ставятся условия непротекания. Разностную формулировку этого условия можно представить в следующем виде:  $\Delta y \cdot h \cdot m \cdot (\tilde{u}_1)_{N+1/2,j}^n = q(t)$

или, обозначая

$$\varphi = q(t) / (\Delta y \cdot h \cdot m), \quad (4.2.48)$$

получаем  $(\tilde{u}_1)_{N+1/2,j}^n = \varphi(t)$ .

Естественно положить

$$(\rho_{\alpha})_{N+1,j}^n = (\rho_{\alpha})_{N,j}^n, (\mu_{\alpha})_{N+1,j}^n = (\mu_{\alpha})_{N,j}^n, \lambda_{N+1,j}^n = \lambda_{N,j}^n, m_{N+1,j}^n = m_{N,j}^n,$$

$$(\varepsilon^2)_{N+1,j}^n = (\varepsilon^2)_{N,j}^n, (u_1)_{N+1,j}^n = (u_1)_{N,j}^n, (v_1)_{N+1,j}^n = (v_1)_{N,j}^n, p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad (4.2.49)$$

$$(u_2)_{N+1,j}^n = -(u_2)_{N,j}^n, (v_2)_{N+1,j}^n = (v_2)_{N,j}^n, (s_1)_{N+1,j}^n = (s_1)_{N,j}^n, f_2(s_{N+1,j}^n) = 0, \alpha = 1, 2$$

Для второго слоя фиктивных ячеек имеем:

$$m_{N+2,j}^n = m_{N-1,j}^n, (u_1)_{N+2,j}^n = (u_1)_{N-1,j}^n, (v_1)_{N+2,j}^n = 2 \cdot (v_1)_{N,j}^n - (v_1)_{N-1,j}^n,$$

$$p_{N+2,j}^n = p_{N,j}^n - f_1(s_{i,j}^n) \cdot (p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n) - \frac{4 \cdot \Delta x}{(\varepsilon^2)_{i,j}^n \cdot \Delta t} \cdot (\rho_1)_{i,j}^n \cdot$$

$$\left( \varphi - (u_1)_{N,j}^n \cdot \left( 1 - \frac{\Delta t}{(\varepsilon^2)_{N,j}^n \cdot \lambda_{N,j}^n} \cdot m_{N,j}^n \cdot (\mu_1)_{N,j}^n \right) \right) \quad (4.2.50)$$

В работах [115, 117, 120, 124, 125] были исследованы нелинейные свойства разностных схем метода Давыдова во внутренних расчетных точках для моделирования прямолинейно-параллельного фильтрационного потока упругой



жидкости в пористой среде при использовании в качестве уравнения движения модельного уравнения С.А. Христиановича. Математическая модель прямолинейно-параллельного фильтрационного потока упругой жидкости выглядит так:

$$HB \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(HB \rho m u) = 0, \quad (4.2.51)$$

$$\rho \frac{du}{\partial t} + \varepsilon^2 (\nabla p + \beta \cdot p \cdot \nabla \ln m) + \frac{\mu m}{\lambda} = 0, \quad (4.2.52)$$

$$\rho = \rho(p), \quad (4.2.53)$$

$$m = m(p), \quad (4.2.54)$$

где  $\rho, u, p, \mu$  - фильтрационные параметры жидкости - соответственно плотность, вектор действительной скорости, давление и вязкость жидкости;  $m$  - пористость среды,  $\varepsilon^2, \lambda$  - характеристики среды течения такие, что  $k = \lambda \cdot \varepsilon^2$ , где  $k$  - коэффициент проницаемости среды;  $\beta = \text{const}$  - безразмерная постоянная,  $H, B$  - соответственно ширина и толщина пласта.

Уравнение неразрывности (4.2.51) в разностной форме в пространственно-одномерном случае было записано следующим образом (в предположении, что поток жидкости через ячейку ( $i$ ) направлен слева направо):

$$[B \cdot H \cdot (\rho \cdot m)^{n+1}]_i \Delta x = [B \cdot H \cdot (\rho \cdot m)^n]_i \Delta x + \Delta M_{i-1/2}^n - \Delta M_{i+1/2}^n, \quad (4.2.55)$$

Потоки масс вычислялись формулами первого порядка точности.

Значения фильтрационных параметров на границе области аппроксимировались также формулами первого порядка точности.

Были определены элементы матрицы аппроксимационной вязкости [119, 120, 124, 125]:

$$a_{11} - \text{коэффициент при производной } \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

$$a_{11} = \Delta x \cdot m u + \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial u}{\partial x} m - \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \cdot u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon^2 m p_\rho - \frac{\Delta x \Delta t}{4 \rho} m \left\{ \varepsilon^2 \left( 4 \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{m} \beta \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{2 \mu m u}{\lambda} \right\},$$



$a_{12}$  - коэффициент при производной  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

$$a_{12} = \frac{\Delta x^2}{4} \frac{\partial \rho}{\partial x} m - \frac{\Delta x^2}{8} \rho \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta t \rho \mu u - \frac{\Delta x \Delta t}{2} \mu u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{3}{4} \Delta t \Delta x^2 \frac{\mu}{\lambda} m \frac{\partial m}{\partial x},$$

$a_{13}$  - коэффициент при производной  $\frac{\partial^2 m}{\partial x^2}$ ,

$$a_{13} = \frac{\Delta x^2}{8} \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta t \varepsilon^2 \beta p + \Delta t \Delta x^2 \frac{\mu}{\lambda} \left( \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} (\mu u) + \frac{m}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4.2.56)$$

В заключение главы отметим, были также исследованы нелинейные свойства разностных схем метода Давыдова для расчета инерционной фильтрации в рамках модели академика С.А.Христиановича на границах расчетной области в случае использования дробных ячеек [114-118, 120, 124, 125].

### 4.3. Тестовые расчеты методом Давыдова пространственно-двумерных однофазных фильтрационных течений при различных моделях фильтрации.

Для проведения численных расчетов и исследования алгоритма метода Давыдова для задач подземной гидродинамики при использовании модельных уравнений А. Дарси и С.А.Христиановича, рассмотрим следующую пространственно-двумерную модельную задачу.

Гипотетическая залежь нефти имеет прямоугольную форму в плане и разрабатывается двумя горизонтальными скважинами одинаковой длины. До начала разработки залежи пластовое давление постоянно и равно 10 МПа. Толщина пласта  $h = 10$  м. Границы пласта непроницаемы. В момент времени  $t = 0$  включают в работу две добывающие горизонтальные скважины с одинаковым постоянным во времени объемным дебитом. Пластовая нефть имеет следующие характеристики: плотность при атмосферном давлении 855 кг/м<sup>3</sup>, вязкость  $\mu = 5.57$  мПа·с, коэффициент объемной упругости  $\beta_{жид.} = 3 \cdot 10^{-9}$  Па<sup>-1</sup>.



Пористость пласта в начальный момент времени во всех численных расчетах принималась равной 0,25. Коэффициент объемной упругости пласта  $\beta_{\text{сред.}} = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$ .

Жидкость в данной задаче принималась слабосжимаемой, учитывалась объемная упругость пласта.

Для моделирования фильтрационных течений на внешних и внутренних границах области интегрирования использовался метод фиктивных ячеек, разработанный автором метода Ю.М. Давыдовым. На внешней границе области интегрирования ставилось условие непротекания, а на внутренней - условие постоянного объемного дебита.

При проведении численных экспериментов характерные параметры фильтрационных величин, используемые при приведении к безразмерному виду исходных систем уравнений движения по обеим моделям, были выбраны следующие:

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/куб. м.}, p_0 = 10 \text{ МПа}, \mu_0 = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, L_0 = 10 \text{ м}, (\varepsilon^2)_0 = 10^{-8},$$

$$\lambda_0 = 10^{-3} \text{ кв.м.}, k_0 = 10^{-11} \text{ кв.м.}, t_0 = 10^3 \text{ сек.}$$

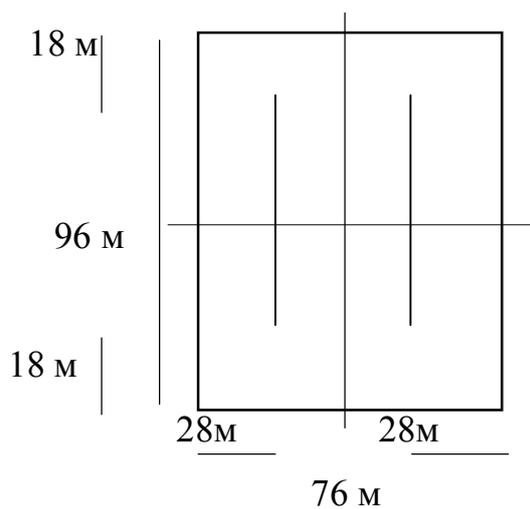


Рис.4.3.1. Схема расположения скважин в гипотетической залежи.

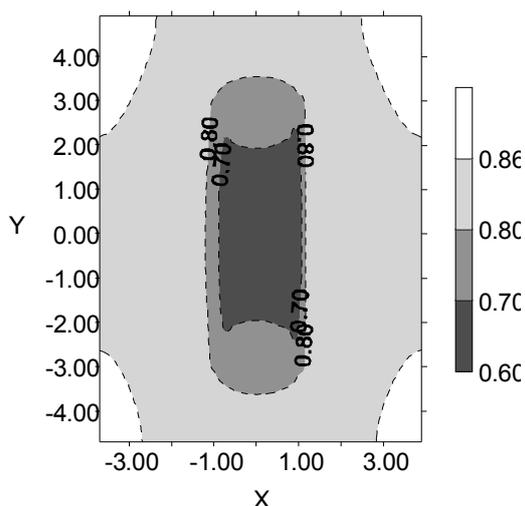


Рис.4.3.2

$$T_1 = 5.00$$

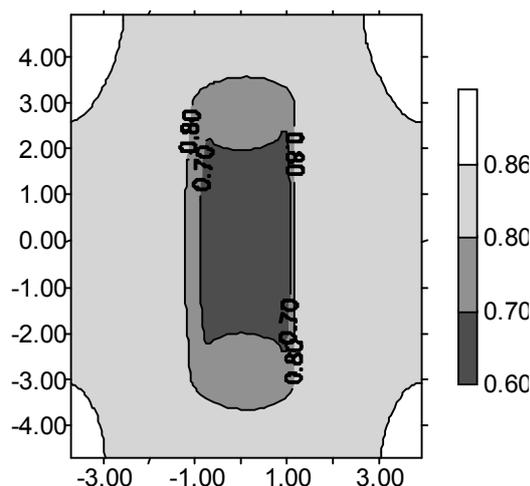


Рис.4.3.3

$$T_1 = 5.00$$

На рис.4.3.2 - рис.4.3.9 представлены изолинии безразмерного пластового давления  $P^* = p/p_0$  численных решений по обеим моделям. По горизонтальной оси системы координат графика отложены безразмерные расстояния по оси  $X$  от центра пласта, аналогичным образом по вертикальной оси системы координат графика отложены безразмерные расстояния по оси  $Y$  от центра пласта.

На рис.4.3.2 - рис.4.3.9 представлены изолинии поля давления численных решений для модели С.А. Христиановича (сплошные линии), модели А. Дарси (штрих-пунктирные линии) в последовательные моменты времени. На рис.4.3.10 - рис.4.3.15 графики численных решений для модели С.А.Христиановича изображены сплошными линиями, модели А. Дарси - штрих-пунктирными линиями.

Исходные безразмерные данные для численных расчетов, представленных на рис.4.3.2 - рис.4.3.8, были следующими:

$$Q_0 = 0.01, k = 0.10, \varepsilon^2 = 1.00, \lambda = 0.10, \beta = 0.20$$

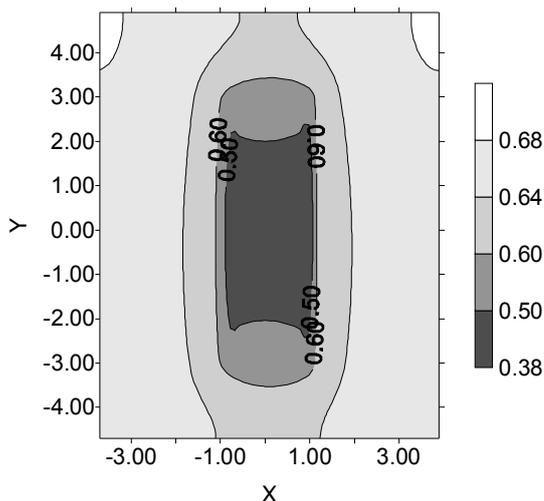


Рис.4.3.4

$$T_2 = 10.00$$

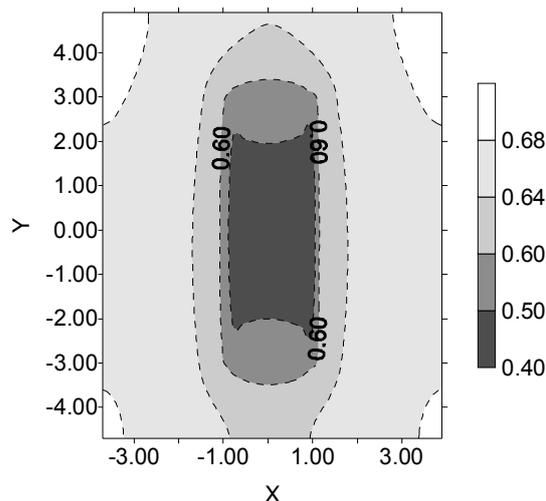


Рис.4.3.5

$$T_2 = 10.00$$

При проведении сравнений численных решений по модели А.Дарси и С.А.Христиановича в качестве точного решения принималось численное решение по модели А. Дарси.

Так, при  $T_1 = 5.00$  (рис.4.3.2, рис.4.3.3) относительная ошибка численных решений по модели С.А. Христиановича вдоль внешней границы области интегрирования составляла от 0.1 до 0.4 %. Максимальное значение относительной ошибки численного решения по нелинейной модели составляла 1.0 %. При  $T_2 = 10.00$  относительное отличие в области между двух горизонтальных скважин численного решения по модели С.А. Христиановича от соответствующих решений по модели А. Дарси составляла 1.2–1.6%, в то время как аналогичные показатели для точек вблизи внешних границ составляли 0.5–0.7%. Это объясняется появлением достаточно больших градиентов в межскважинной области в результате их эксплуатации. В дальнейшем, при  $T_3 = 15.00$  величина относительной ошибки лежит в интервале [1.2;3.4]. При  $T_4 = 20.00$  относительная ошибка численных решений в межскважинной области достигает 15.00 %, что объясняется большими градиентами пластового давления и большими скоростями фильтрации в этой зоне.

Безразмерные шаги по времени и пространственным переменным принимались следующими:  $\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.10, \Delta t = 0.003$ . Прямоугольная область интегрирования состоит из 80 ячеек по горизонтали и 100 ячеек по вертикали.

Для моделирования условия непротекания на внешних границах области интегрирования и условия объемного дебита на скважинах применялся метод фиктивных ячеек, разработанный автором метода Ю.М.Давыдовым.

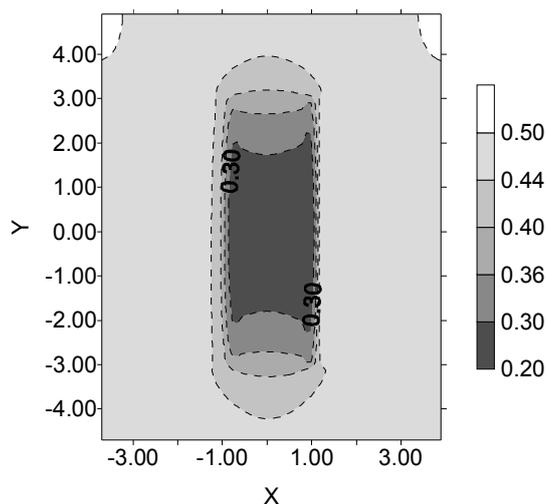


Рис.4.3.6

$$T_3 = 15.00$$

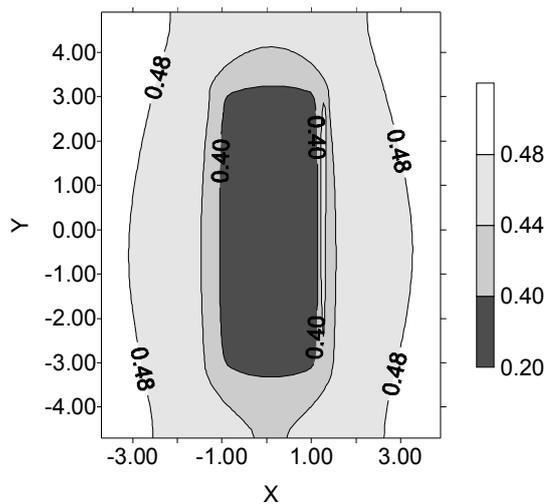


Рис.4.3.7

$$T_3 = 15.00$$

Количество слоев фиктивных ячеек равно порядку аппроксимации разностных схем метода Давыдова. В данной задаче для аппроксимации разностными схемами дифференциальных граничных условий на внешней и внутренней границах области интегрирования использовались схемы второго порядка точности.

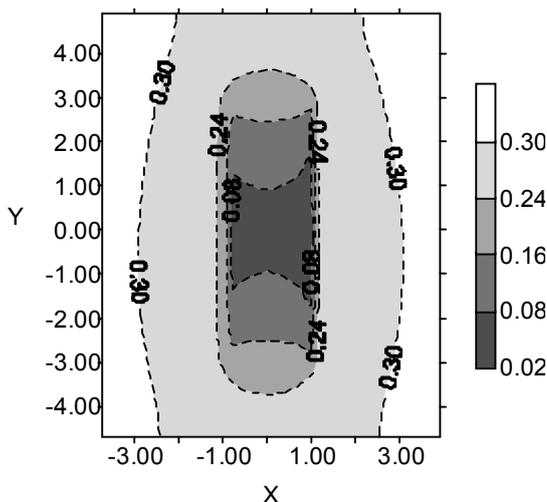


Рис.4.3.9

$$T_4 = 20.00$$

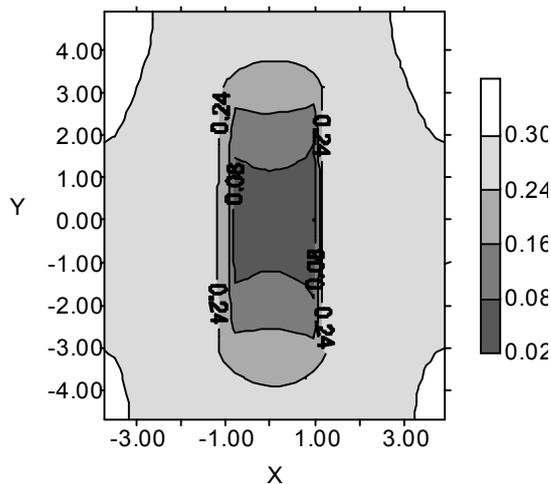


Рис.4.3.8

$$T_4 = 20.00$$

Координаты центра пласта равны (0,0). На рис.4.3.10 показаны профили безразмерного давления  $P(x^*, 0)$  для четырех моментов времени  $T_1 = 5.00, T_2 = 10.00, T_3 = 15.00, T_4 = 20.00$  при использовании обеих моделей. На рис.6.2.11 показаны профили безразмерного давления  $P(0, x^*)$  для четырех моментов времени  $T_1 = 5.00, T_2 = 10.00, T_3 = 15.00, T_4 = 20.00$  при использовании моделей А.Дарси и С.А. Христиановича.

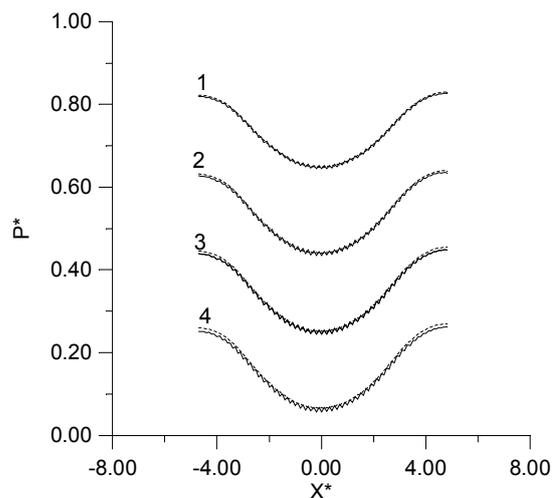
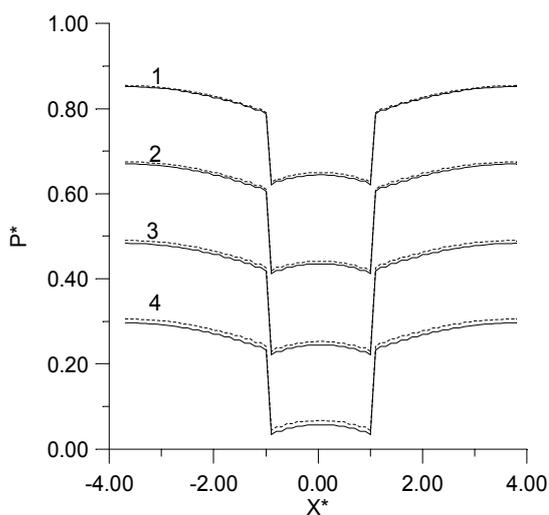


Рис.4.3.10

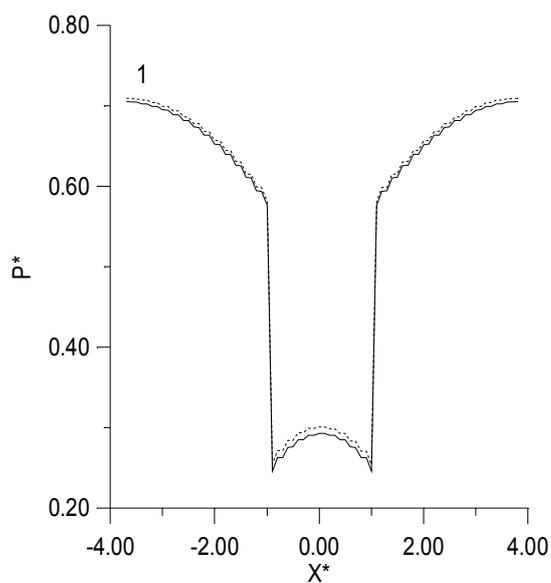


Рис.4.3.11

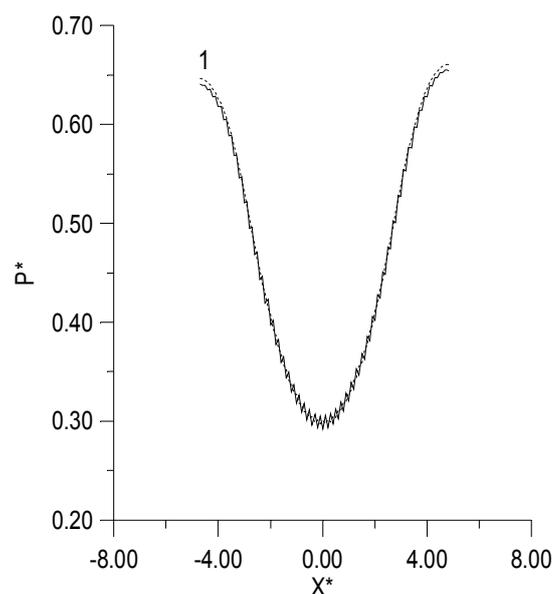


Рис.4.3.12

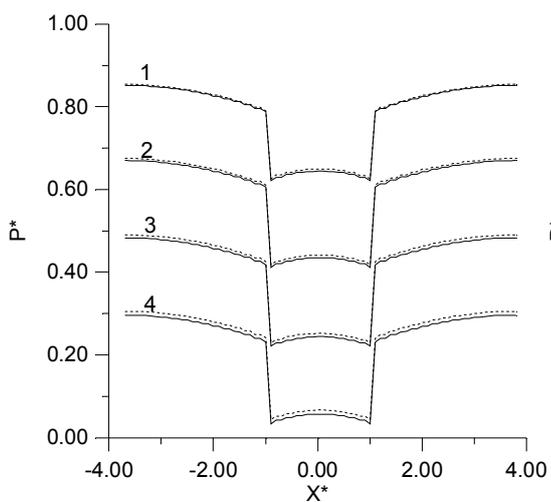


Рис.4.3.13

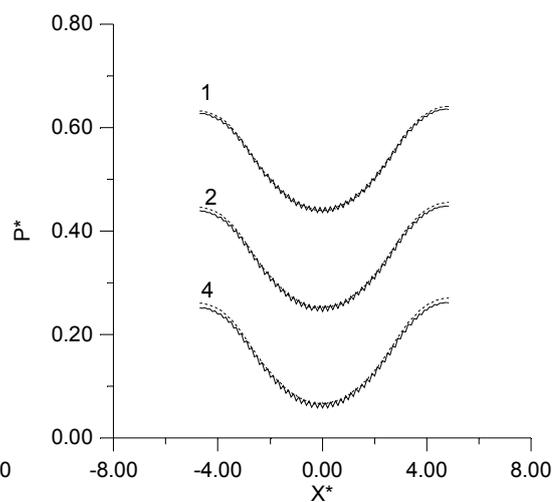


Рис.4.3.14

Рис.4.3.15

На рис. 4.3.12 и рис.4.3.13 представлены соответствующие рис.4.3.10, рис.4.3.11 профили давлений численных решений по обеим моделям при следующих начальных условиях:

$$Q_0 = 0.02, k = 0.10, \varepsilon^2 = 1.00, \lambda = 0.10, \beta = 0.20$$



На рис.4.3.14 и рис.4.3.15 представлены профили давлений числен-  
ных решений по обеим моделям для четырех моментов времени  
 $T_1 = 5.00, T_2 = 10.00, T_3 = 15.00, T_4 = 20.00$  при следующих начальных условиях:

$$Q_0 = 0.01, k = 0.10, \varepsilon^2 = 1.00, \lambda = 0.10, \beta = 0.99$$

Программы на ЭВМ реализации метода Давыдова для решения  
пространственно-одномерных и пространственно-двумерных тестовых задач  
фильтрации в пласте были составлены на языке Fortran 90. Расчеты  
проводились на IBM PC с процессором Pentium 120 МГц. С помощью единой  
программы на Fortran 90 осуществлялись численные расчеты по обеим  
вышеуказанным моделям фильтрации. Расчет одного варианта на ЭВМ  
решения пространственно-двумерной тестовой задачи фильтрации жидкости в  
горизонтальном пласте при показателе времени  $T = 50.00$  составлял 45 минут.

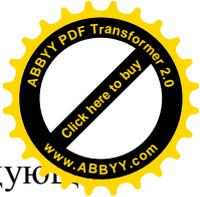
4.4. Аналитическое исследование пространственно-трехмерных  
инерционных фильтрационных течений газа в пористой среде при  
использовании модели С.А.Христиановича.

Систему уравнений движения газа в пласте при инерционном режиме  
фильтрации по модели С.А.Христиановича в общем случае можно представить  
в следующем виде [108]:

$$\frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho m \vec{U}) = 0, \quad (4.4.1)$$

$$\rho \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} + \varepsilon^2 (\nabla p + \beta \cdot p \cdot \nabla \ln m) = f. \quad (4.4.2)$$

Неустановившуюся фильтрацию газа можно приближенно рассматривать  
как изотермическую, так как изменения температуры газа, возникающие при  
изменениях давления, в значительной мере компенсируются теплообменом со  
скелетом пористой среды, поверхность контакта газа с которой огромна [8, 9,  
106-108 и др.].



Напомним, что изменение пористости зависит от давления следующим образом:  $dm = \beta_c \cdot dp$ , или в конечной форме:  $m = m_0 + \beta_c \cdot (p - p_0)$ , где  $\beta_c$  - коэффициент объемной упругости пласта.

Изменение пористости скелета в зависимости от пластового давления также можно определить формулой [108]:

$$dm = \frac{m_0}{k_m} \cdot dp, \quad (4.4.3)$$

где  $k_m$  - коэффициент, определяемый экспериментально. Уравнение состояния для совершенного газа имеет баротропный вид:  $\rho = \rho(p)$ , обращая которое, получаем:

$$p = p(\rho). \quad (4.4.4)$$

Введем потенциал скорости  $\varphi$  следующим образом:

$$\vec{U} = \nabla \varphi. \quad (4.4.5)$$

Известно, что для потенциальных баротропных движений в потенциальном поле внешних массовых сил можно проинтегрировать уравнение импульсов в форме Лэмба-Громеки [69 и др.].

Полная производная по времени от действительной скорости  $\frac{d\vec{U}}{dt}$  в уравнении импульсов определяется так:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \cdot \vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) + (rot \vec{U} \times \vec{U})$$

Так как движение газа считается потенциальным, то  $\omega = \frac{1}{2} rot \vec{U} = 0$ .

Перепишем уравнение движения газа в виде:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{U^2}{2} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\nabla p}{\rho} - \varepsilon^2 \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\nabla m}{\rho} + \nabla V,$$

где  $f = \nabla V$ ,  $V$  - потенциал внешних массовых сил. Введем следующую функцию:  $P(\rho) = \int \frac{dp}{\rho}$  и, учитывая, что



$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \varphi) = \nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right), \quad \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \int \frac{dp}{\rho} = \nabla P(\rho),$$

получаем следующее уравнение:

$$\nabla\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \nabla\left(\frac{\vec{U}^2}{2}\right) + \varepsilon^2(1 + \beta)\nabla P(\rho) - \nabla V = 0 \quad (4.4.6)$$

После интегрирования последнего уравнения имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\vec{U}^2}{2} + \varepsilon^2(1 + \beta) \cdot P(\rho) - V = C(t) \quad (4.4.7)$$

Так как потенциал определяется с точностью до произвольной функции времени, последний интеграл записывается в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla \varphi|^2 + \varepsilon^2(1 + \beta) \cdot P(\rho) - V = const \quad (4.4.8)$$

Интеграл (4.4.8) является интегралом типа Лагранжа-Коши. Рассмотрим теперь уравнение неразрывности (4.4.1). Перепишем (4.4.1) в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial m}{\partial t} + m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla(\rho m) + \rho m \cdot \text{div}(\vec{U}) = 0, \quad (4.4.9)$$

или 
$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho \right) + \frac{1}{m} \left( \frac{\partial m}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla m \right) + \text{div}(\vec{U}) = 0 \quad (4.4.10)$$

Для скорости звука в совершенном газе с постоянными теплоемкостями справедливо следующее соотношение [69]:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (4.4.11)$$

где  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  - отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении

и объеме. Выразим пористость  $m$  и плотность  $\rho$  через давление  $p$ :

$$\frac{\gamma + 1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla p \right) + a^2 \cdot \text{div}(\vec{U}) = 0 \quad (4.4.12)$$

Учитывая, что 
$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla p, \quad (4.4.13)$$

представим (4.4.12) в следующем виде:

$$(\gamma + 1) \frac{dp}{dt} + a^2 \cdot \Delta \varphi = 0, \quad (4.4.14)$$



где  $\Delta$ - оператор Лапласа:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Функцию  $P(\rho)$  определяем из интеграла (4.4.8):

$$P(\rho) = \frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left( V - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \right). \quad (4.4.15)$$

Рассмотрим случай  $V(x, y, z) = 0$ . Согласно формуле (4.4.13), вычислим производную  $\frac{dP}{dt}$  и подставим в (4.4.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \vec{i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \vec{j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \vec{k} \right) \right) = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Определим градиент давления следующим образом:

$$\nabla p = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) + \frac{1}{2} (\nabla (\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi)) \right).$$

Учитывая условия отсутствия вихря  $rot \vec{U} = rot \nabla \varphi = 0$ , получаем следующее выражение:

$$\nabla p = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) + (\nabla \cdot \nabla \varphi) \cdot \nabla \varphi \right).$$

Окончательно для  $\frac{dp}{dt}$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - 2w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} - u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - z^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \right. \\ &- 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2uw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - 2uw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - 2vw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \left. \right) \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Подставляя (4.4.17) в (4.4.14), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + 2w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \left( u^2 - \frac{\varepsilon^2(1+\beta)}{\gamma+1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left( v^2 - \frac{\varepsilon^2(1+\beta)}{\gamma+1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \\ + \left( w^2 - \frac{\varepsilon^2(1+\beta)}{\gamma+1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2uw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + 2vw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0, \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

где  $u, v, w$ - составляющие вектора скорости, определяемые так:



$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4.4.19)$$

Принимая во внимание (4.4.19), (4.4.18) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 (1 + \beta)}{\gamma + 1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon^2 (1 + \beta)}{\gamma + 1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 (1 + \beta)}{\gamma + 1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \\ & + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Здесь  $a$  - скорость звука, которая определяется из следующего уравнения:

$$\frac{w_1}{2} + \frac{a_*^2 (\gamma + 1)}{\gamma - 1} = \frac{w_2}{2} + \frac{\varepsilon^2 (\beta + 1)}{\gamma - 1} a^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.4.21)$$

Уравнение (4.4.21) можно получить из интеграла типа Лагранжа-Коши, если для давления  $p$  адиабатических движений совершенного газа использовать выражение  $p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1}$ . Квадрат скорости звука определяется формулой:

$$a^2 = \frac{\gamma + 1}{\varepsilon^2 (\beta + 1)} a_*^2 + \frac{\gamma - 1}{\varepsilon^2 (\beta + 1)} \left[ \frac{w_1^2 - v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right], \quad (4.4.22)$$

где  $a$  - критическая скорость звука в потоке,  $w_1$  - скорость невозмущенного потока,  $v^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2$ .

Подставляя выражение для квадрата скорости  $a^2$  в уравнение (4.4.20), получаем нелинейное уравнение в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  для исследования нестационарных трехмерных течений газа в пористой среде. Таким образом, мы вывели основное дифференциальное уравнение газовой динамики для трехмерного потенциального нестационарного течения газа в нефтегазоносном пласте. Для линеаризации полученного уравнения типа Эйлера будем



применять метод возмущений. В общем случае потенциал скорости для точки потока выражается так:

$$\varphi(x, y, z, t) = w_1 x + \tilde{\varphi}(x, y, z, t). \quad (4.4.23)$$

Здесь  $\tilde{\varphi}(x, y, z, t)$  - потенциал скорости возмущения.

Скорость потока определяется выражениями:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = w_1 + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z}. \quad (4.4.24)$$

Далее для квадрата скорости звука имеем:

$$\frac{\varepsilon^2(1+\beta)}{\gamma+1} a^2 = a_*^2 - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} (2w_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} + (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z})^2 + 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}). \quad (4.4.25)$$

Учитывая (4.4.25), преобразуем уравнение типа Эйлера к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + (w_1^2 - a_*^2) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - a_*^2 (\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2}) = - (2w_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} + (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x})^2) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} (2w_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} + \\ & + (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z})^2 + 2 \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}) \cdot (\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2}) - (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} - (\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z})^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - \\ & - 2(w_1 + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial y} - 2(w_1 + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} - 2(w_1 + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial t} - \\ & - 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial t} - 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z \partial t}. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Сокращая (4.4.26) на  $w_1^2$ , а также учитывая, что  $\frac{w_1^2}{a_*^2} = M_1^2$  ( $M_1$  - число

Маха), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + (1 - \frac{1}{M_1^2}) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \frac{1}{M_1^2} (\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2}) = - (2 \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} + (\frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x})^2) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \\ & - \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)} \cdot (2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{1}{w_1} + (\frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x})^2 + (\frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y})^2 + (\frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z})^2 + 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \frac{1}{w_1^2}) \cdot (\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2}) - (\frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} - (\frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z})^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - 2(1 + \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}) \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial y} - 2(1 + \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}) \cdot \\ & \cdot \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial z} - 2 \cdot \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} - \frac{2}{w_1} (1 + \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial t} - \frac{2}{w_1^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial t} - \frac{2}{w_1^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z \partial t}. \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

Умножая (4.4.27) на  $M_1^2$ , получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a_*^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + (M_1^2 - 1) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} \right) = -M_1^2 \left( \frac{2}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} + \left( \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} - \\
& - \frac{(\gamma - 1)M_1^2}{2(\gamma + 1)} \cdot \left( 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \frac{1}{w_1} + \left( \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right)^2 + 2 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \frac{1}{w_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} \right) - M_1^2 \left( \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} - \left( \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z^2} - 2 \left( 1 + \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial y} M_1^2 - 2M_1^2 \cdot \\
& \cdot \left( 1 + \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial z} - 2M_1^2 \cdot \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial z} - \frac{2}{w_1} \left( 1 + \frac{1}{w_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x \partial t} - \\
& - \frac{2M_1^2}{w_1^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y \partial t} - \frac{2}{w_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial z \partial t}
\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

Представим потенциал скорости возмущения в виде формального ряда:

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \tilde{\varphi}_n, \tag{4.4.29}$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр.

Подставляя (4.4.29) в уравнение (4.4.28) и группируя по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , в нулевом приближении получаем уравнение следующего вида:

$$(1 - M_1^2) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial z^2} = \frac{1}{a_*^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial t^2} + \frac{2 \cdot w_1}{a_*^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial x \partial t} = 0. \tag{4.4.30}$$

Последующие приближения также будут линейными дифференциальными уравнениями второго порядка и приведем здесь только три приближения.

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{\varphi}_{0tt}}{a_*^2} - (1 - M_1^2) \tilde{\varphi}_{0xx} - \tilde{\varphi}_{0yy} - \tilde{\varphi}_{0zz} + 2 \frac{M_1^2}{w_1} \tilde{\varphi}_{0xt} = 0, \\
& \frac{\tilde{\varphi}_{1tt}}{a_*^2} - (1 - M_1^2) \cdot \tilde{\varphi}_{1xx} - \tilde{\varphi}_{1yy} - \tilde{\varphi}_{1zz} + 2 \cdot \frac{M_1^2}{w_1} \tilde{\varphi}_{1xt} = - \frac{2M_1^2}{w_1} \tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{0xx} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left( \frac{2}{w_1} \tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{w_1^2} \tilde{\varphi}_{0t} \right) \tilde{\varphi}_{0xx} + \\
& + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left( \frac{2}{w_1} \tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{w_1^2} \tilde{\varphi}_{0t} \right) \tilde{\varphi}_{0yy} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left( \frac{2}{w_1} \tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{w_1^2} \tilde{\varphi}_{0t} \right) \tilde{\varphi}_{0zz} - \frac{2M_1^2}{w_1^2} \tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{0xt} - \frac{2M_1^2}{w_1^2} \tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{0yt} - \\
& - \frac{2M_1^2}{w_1^2} \tilde{\varphi}_{0z} \tilde{\varphi}_{0zt} - 2 \frac{M_1^2}{w_1} \tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{0xy} - 2 \frac{M_1^2}{w_1} \tilde{\varphi}_{0z} \tilde{\varphi}_{0xz},
\end{aligned} \tag{4.4.31}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tilde{\varphi}_{2tt}}{a_*^2} - (1-M_1^2)\tilde{\varphi}_{2xx} - \tilde{\varphi}_{2yy} - \tilde{\varphi}_{2zz} + \frac{2M_1^2}{W_1}\tilde{\varphi}_{2xt} = -M_1^2 \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \frac{1}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \right) \tilde{\varphi}_{0xx} + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{1xx} \right\} - \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 \tilde{\varphi}_{0y}^2 \tilde{\varphi}_{0yy} - \\
 & - \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 \tilde{\varphi}_{0z}^2 \tilde{\varphi}_{0zz} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \right) \tilde{\varphi}_{1xx} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \frac{1}{W_1^2}(\tilde{\varphi}_{0x}^2 + \tilde{\varphi}_{0y}^2 + \tilde{\varphi}_{0z}^2) + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1t} \right) \tilde{\varphi}_{0xx} \right\} + \\
 & + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1t}\tilde{\varphi}_{0xx} \left\} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \right) \tilde{\varphi}_{1yy} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{W_1^2}(\tilde{\varphi}_{0x}^2 + \tilde{\varphi}_{0y}^2 + \tilde{\varphi}_{0z}^2) + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1t}\tilde{\varphi}_{0yy} \left. \right\} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \right) \tilde{\varphi}_{1zz} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \frac{1}{W_1^2}(\tilde{\varphi}_{0x}^2 + \tilde{\varphi}_{0y}^2 + \tilde{\varphi}_{0z}^2) + \right. \right. \\
 & + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1t}\tilde{\varphi}_{0zz} \left. \right\} - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{1xt} + \tilde{\varphi}_{1x}\tilde{\varphi}_{0xt}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0y}\tilde{\varphi}_{1yt} + \tilde{\varphi}_{1y}\tilde{\varphi}_{0yt}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0z}\tilde{\varphi}_{1zt} + \tilde{\varphi}_{1z}\tilde{\varphi}_{0zz} \\
 & + \tilde{\varphi}_{1x}\tilde{\varphi}_{0xt}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0y}\tilde{\varphi}_{1yt} + \tilde{\varphi}_{1y}\tilde{\varphi}_{0yt}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0z}\tilde{\varphi}_{1zt} + \tilde{\varphi}_{1z}\tilde{\varphi}_{0zz} + \tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{0z}^2) - \\
 & - 2 \frac{M_1^2}{W_1} (\tilde{\varphi}_{0y}\tilde{\varphi}_{1xy} + (\tilde{\varphi}_{1y} + \frac{1}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{0y})\tilde{\varphi}_{0xy}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 \tilde{\varphi}_{0y}\tilde{\varphi}_{0z}\tilde{\varphi}_{0yz} ; \\
 & \frac{\tilde{\varphi}_{3tt}}{a_*^2} - (1-M_1^2)\tilde{\varphi}_{3xx} - \tilde{\varphi}_{3yy} - \tilde{\varphi}_{3zz} + \frac{2M_1^2}{W_1}\tilde{\varphi}_{3xt} = -M_1^2 \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{2x} + \frac{1}{W_1^2}2\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{1x} \right) \tilde{\varphi}_{0xx} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \tilde{\varphi}_{1xx} + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{2xx} \left. \right\} - \frac{M_1^2}{W_1^2} (2\tilde{\varphi}_{0y}\tilde{\varphi}_{1y}\tilde{\varphi}_{0yy} + \tilde{\varphi}_{0y}^2\tilde{\varphi}_{1yy}) - \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (2\tilde{\varphi}_{0z}\tilde{\varphi}_{1z}\tilde{\varphi}_{0zz} + \tilde{\varphi}_{0z}^2\tilde{\varphi}_{1zz}) + \\
 & + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \right) \tilde{\varphi}_{2xx} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \frac{1}{W_1^2}(\tilde{\varphi}_{0x}^2 + \tilde{\varphi}_{0y}^2 + \tilde{\varphi}_{0z}^2) + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1t} \right) \tilde{\varphi}_{1xx} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{2x} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{W_1^2}(2\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{1x} + 2\tilde{\varphi}_{0y}\tilde{\varphi}_{1y} + 2\tilde{\varphi}_{0z}\tilde{\varphi}_{1z}) + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{2t} \left. \right\} \tilde{\varphi}_{0xx} \left\} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \right) \tilde{\varphi}_{2yy} + \right. \\
 & + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \frac{1}{W_1^2}(\tilde{\varphi}_{0x}^2 + \tilde{\varphi}_{0y}^2 + \tilde{\varphi}_{0z}^2) + \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1t} \right) \tilde{\varphi}_{1yy} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{2x} + \frac{1}{W_1^2}(2\tilde{\varphi}_{0x}\tilde{\varphi}_{1x} + 2\tilde{\varphi}_{0y}\tilde{\varphi}_{1y} + \right. \\
 & + 2\tilde{\varphi}_{0z}\tilde{\varphi}_{1z}) + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{2t} \left. \right\} \tilde{\varphi}_{0yy} \left\} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left\{ \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{0x} + \frac{2}{W_1^2}\tilde{\varphi}_{0x}^2 \right) \tilde{\varphi}_{2zz} + \left( \frac{2}{W_1}\tilde{\varphi}_{1x} + \frac{2}{W_1^2}(\tilde{\varphi}_{0x}^2 + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{\varphi}_{0y}^2 + \tilde{\varphi}_{0z}^2) + \frac{2}{W_1} \tilde{\varphi}_{1t} \tilde{\varphi}_{1zz} + \left( \frac{2}{W_1} \tilde{\varphi}_{2x} + \frac{1}{W_1^2} (2\tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{1x} + 2\tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{1y} + 2\tilde{\varphi}_{0z} \tilde{\varphi}_{1z}) \right) + \left( \frac{2}{W_1} \tilde{\varphi}_{2x} + \right. \\
 & + \frac{1}{W_1^2} (2\tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{1x} + 2\tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{1y} + 2\tilde{\varphi}_{0z} \tilde{\varphi}_{1z}) + \frac{2}{W_1^2} \tilde{\varphi}_{2t} \tilde{\varphi}_{0zz} \left. \right\} - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{2xt} + \tilde{\varphi}_{1x} \tilde{\varphi}_{1xt} + \\
 & + \tilde{\varphi}_{2x} \tilde{\varphi}_{0xt}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{2yt} + \tilde{\varphi}_{1y} \tilde{\varphi}_{1yt} + \tilde{\varphi}_{2y} \tilde{\varphi}_{0yt}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0z} \tilde{\varphi}_{2zt} + \tilde{\varphi}_{1z} \tilde{\varphi}_{1zt} + \\
 & + \tilde{\varphi}_{2z} \tilde{\varphi}_{0zt}) - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 \{ \tilde{\varphi}_{0z} \tilde{\varphi}_{2xz} + (\tilde{\varphi}_{1z} + \frac{1}{W_1} \tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{0z}) \tilde{\varphi}_{1xz} + (\tilde{\varphi}_{2z} + \frac{1}{W_1} (\tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{1z} + \\
 & + \tilde{\varphi}_{1x} \tilde{\varphi}_{0z})) \tilde{\varphi}_{0zz} \} - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 \{ \tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{2xy} + (\tilde{\varphi}_{1y} + \frac{1}{W_1} \tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{0y}) \tilde{\varphi}_{1xy} + (\tilde{\varphi}_{2y} + \frac{1}{W_1} (\tilde{\varphi}_{0x} \tilde{\varphi}_{1y} + \\
 & + \tilde{\varphi}_{1x} \tilde{\varphi}_{0y})) \tilde{\varphi}_{0xy} \} - 2 \left( \frac{M_1}{W_1} \right)^2 (\tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{0z} \tilde{\varphi}_{1yz} + (\tilde{\varphi}_{0y} \tilde{\varphi}_{1z} + \tilde{\varphi}_{1y} \tilde{\varphi}_{0z}) \tilde{\varphi}_{0yz} ).
 \end{aligned}$$

Рассматривая 7 приближений для вывода рекуррентной системы дифференциальных приближений, получаем следующее:

$$\frac{\tilde{\varphi}_{0tt}}{a_*^2} - (1 - M_1^2) \tilde{\varphi}_{0xx} - \tilde{\varphi}_{0yy} - \tilde{\varphi}_{0zz} + \frac{2w_1}{2} \tilde{\varphi}_{0xt} = 0, \quad (4.4.32)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tilde{\varphi}_{ntt}}{a_*^2} - (1 - M_1^2) \tilde{\varphi}_{nxx} - \tilde{\varphi}_{nyy} - \tilde{\varphi}_{nzz} + \frac{2M_1^2}{w} \tilde{\varphi}_{nxt} = \\
 & = -M_1^2 \left\{ \frac{2}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-i)xx} + \frac{1}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} T_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} \right\} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2(\gamma+1)} \left\{ \frac{2}{w_1^2} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{it} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xx} + \right. \\
 & + \frac{2}{w_1^2} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{it} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yy} + \frac{2}{w_1^2} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{it} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zz} + \\
 & + \frac{2}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yy} + \frac{2}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zz} + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} s_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \\
 & + \sum_{i=0}^{n-2} p_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-2} s_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-2} p_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \\
 & + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} + \sum_{i=0}^{n-2} s_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} + \sum_{i=0}^{n-2} p_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} \left. \right\} - 2 \left( \frac{M_1}{w_1} \right)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xt} -
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -2\left(\frac{M_1}{w_1}\right)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yt} - 2\left(\frac{M_1}{w_1}\right)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zt} - 2 \cdot \frac{M_1^2}{w_1} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xy} + \right. \\
& + \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xy} \left. \right\} - \frac{2M_1^2}{w_1} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xz} + \sum_{i=0}^{n-2} M_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xz} \right\} - \\
& - \frac{2M_1^2}{w_1^2} \left\{ \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yz} \right\}, \tag{4.4.33}
\end{aligned}$$

ГДЕ  $n=1,2,\dots$ ,

$$\begin{aligned}
T_{n-2} &= \frac{1}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)x}, \quad R_{n-2} = \frac{1}{w_2} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)x}, \quad s_{n-2} = \frac{1}{w_1^2} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)y}, \\
P_{n-2} &= \frac{1}{w_1^2} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}, \quad Q_{n-2} = \frac{1}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)y}, \quad M_{n-2} = \frac{1}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}, \\
R_{n-2} &= \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}. \tag{4.4.34}
\end{aligned}$$

Нулевое приближение потенциала скорости возмущения определяется из дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (4.4.30). Остальные приближения потенциала возмущения  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n$  являются решениями системы неоднородных уравнений (4.4.31), (4.4.33), (4.4.34).

Итак, нами выведена рекуррентная система, с помощью которой можно исследовать трехмерные нестационарные течения газа. Если число Маха  $M_1 < 1$ , то рассматриваются дозвуковые течения газа. В случае  $M_1 > 1$  система (4.4.32) - (4.4.34) используется для изучения движения в сверхзвуковом режиме. Зная распределение потенциала скорости возмущения  $\varphi(x, y, z, t)$ , мы можем определить составляющие скорости  $u, v, w$ , а также распределение давления в пласте согласно выражению (4.4.15) и плотность  $\rho$ , используя формулы (4.4.22), (4.4.11).



Итак, методом возмущений мы вывели рекуррентную систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости возмущения (4.4.32) - (4.4.34).

С помощью полученной рекуррентной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости возмущенного потока (4.4.32), (4.4.33), (4.4.34) могут быть исследованы пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в пористой среде.

Для определения нулевого (основного) приближения потенциала скорости возмущенного потока газа, из дифференциального уравнения (4.4.32) определяется  $\varphi_0(x, y, z, t)$ , затем - остальные приближения потенциала скорости возмущения  $\tilde{\varphi}_i(x, y, z, t)$  для  $i = 1, 2, 3, \dots$ , согласно рекуррентной системе дифференциальных уравнений (4.4.33), (4.4.34).

Как видно из системы (4.4.32), (4.4.33), однородные части дифференциальных уравнений в частных производных имеют один и тот же вид. Для определения последующих приближений потенциала возмущения необходимо определить общее решение неоднородного уравнения для фильтрационных течений газа, которое имеет следующий вид:

$$\frac{\tilde{\varphi}_{nit}}{a^2} - (1 - M_1^2) \tilde{\varphi}_{nxx} - \tilde{\varphi}_{nyy} - \tilde{\varphi}_{nzz} = F(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_{ixt}, \tilde{\varphi}_{ix}),$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Построим некоторые точные общие решения дифференциального уравнения (4.4.32), записанные относительно нулевого приближения потенциала скорости возмущения.

Решение уравнения (4.4.32) будем искать в виде

$$\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) = e^{\alpha t} [f_1(x) + f(y, z)], \tag{4.4.35}$$

где  $\alpha$  - const,  $\alpha < 0$ ,  $f_1(x), f(y, z)$  - неизвестные функции, подлежащие к определению.

Подставляя (4.4.35) в (4.4.32) и сокращая на  $e^{\alpha t}$ , получим следующее уравнение



$$(1 - M_1^2) f_1''(x) + f_{yy} + f_{zz} = \frac{\alpha^2}{a^2} f_1(x) + \frac{\alpha^2}{a^2} f(y, z) + \frac{2\alpha M_1^2}{w_1} f_1'(x). \quad (4.4.36)$$

Разделяя переменные, получаем:

$$(1 - M_1^2) f_1''(x) - \frac{2\alpha M_1^2}{w_1} f_1'(x) - f \frac{\alpha^2}{a^2} f_1(x) = \lambda, \quad (4.4.37)$$

$$f_{yy} + f_{zz} - \frac{\alpha^2}{a^2} f = -\lambda, \quad \text{или} \quad f_{yy} + f_{zz} - \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2} f = -\lambda. \quad (4.4.38)$$

Общее решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (4.4.37) записывается так:

$$f_1(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} - \frac{\lambda w_1^2}{M_1^2 \alpha^2} \quad (4.4.39)$$

Здесь  $C_1, C_2$  - постоянные интегрирования,  $\lambda$  - постоянная разделения переменных,  $k_1, k_2$  - корни характеристического алгебраического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (4.4.37). Причем

$$k_{1,2} = \frac{2M_1(M_1 \pm 1)}{w_1(1 - M_1^2)}. \quad (4.4.40)$$

Функцию  $f(y, z)$  представим в следующем виде:

$$f(y, z) = f_2(z) + f_3(y). \quad (4.4.41)$$

Относительно неизвестных функций  $f_2(z), f_3(y)$  получаем следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$f_3''(y) - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2} f_3(y) - \gamma = 0, \quad (4.4.42)$$

$$f_2''(z) - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2} f_2(z) + \lambda + \gamma = 0, \quad (4.4.43)$$

где  $\gamma$  - постоянная разделения переменных.

Решениями уравнений (4.4.42) и (4.4.43) являются следующие выражения, соответственно:

$$f_2(z) = C_5 e^{\frac{\alpha M_1 z}{w_1}} + C_6 e^{-\frac{\alpha M_1 z}{w_1}} + \frac{\lambda + \gamma}{M_1^2 \alpha^2} w_1^2, \quad (4.4.44)$$

$$f_3(y) = C_3 e^{\frac{\alpha M_1 y}{w_1}} + C_4 e^{-\frac{\alpha M_1 y}{w_1}} - \frac{\gamma w_1^2}{M_1^2 \alpha^2}. \quad (4.4.45)$$



Подставляя (4.4.44), (4.4.45), (4.4.41), (4.4.39) в искомое нуль приближение потенциала скорости возмущения, получаем:

$$\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) = e^{\alpha t} \left\{ C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{\frac{\alpha M_1 y}{w_1}} + C_4 e^{-\frac{\alpha M_1 y}{w_1}} + C_5 e^{\frac{\alpha M_1 z}{w_1}} + C_6 e^{-\frac{\alpha M_1 z}{w_1}} \right\}. \quad (4.4.46)$$

Перейдем теперь к построению следующего решения уравнения (4.4.42). Для этого введем новую искомую функцию  $f(y, z)$  в уравнение (4.4.38) в следующем виде:

$$\bar{f}(y, z) = \frac{\alpha^2}{a_*^2} f - \lambda. \quad (4.4.46, \text{б})$$

Преобразуя рассматриваемое уравнение, получаем:

$$\bar{f}_{yy} + \bar{f}_{zz} = \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2} \bar{f}. \quad (4.4.47)$$

Решение уравнения (4.4.47) ищем методом разделения переменных, полагая, что

$$\bar{f}(y, z) = f_4(y) \cdot f_5(z). \quad (4.4.48)$$

Тогда относительно неизвестных функций  $f_4(y)$  и  $f_5(z)$  получаем следующие обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$f_4''(y) - \beta f_4(y) = 0, \quad (4.4.49)$$

$$f_5''(z) + \left( \beta - \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2} \right) f_5(z) = 0, \quad (4.4.50)$$

где  $\beta$  - постоянная разделения переменных.

Если выбрать  $\beta > 0$  и  $\beta - \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2} > 0$ , то решениями уравнений (4.4.49) и (4.4.50) являются следующие выражения:

$$f_4(y) = \tilde{C}_4 e^{\sqrt{\beta} y} + \tilde{C}_5 e^{-\sqrt{\beta} y}, \quad (4.4.51)$$

$$f_5(z) = \tilde{C}_6 \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2}} z + \tilde{C}_7 \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2}} z. \quad (4.4.52)$$

Здесь  $\tilde{C}_4, \tilde{C}_5, \tilde{C}_6, \tilde{C}_7$  - постоянные интегрирования.



Подставляя полученные решения (4.4.51), (4.4.52), (4.4.48) в (4.4.47) получаем искомое решение  $f(y, z)$  рассматриваемого уравнения (4.4.48) в следующем виде:

$$f(y, z) = -\frac{w_1^2}{\alpha^2 M_1^2} \left\{ (\tilde{C}_4 e^{\sqrt{\beta}y} + \tilde{C}_5 e^{-\sqrt{\beta}y}) \cdot \left( \tilde{C}_6 \cos \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2}} z + \tilde{C}_7 \sin \sqrt{\beta - \frac{\alpha^2 M_1^2}{w_1^2}} z \right) - \lambda \right\} \quad (4.4.53)$$

Теперь, подставляя решения (4.4.53) и (4.4.49) в (4.4.35), а затем в (4.4.32), определяем нулевое приближение потенциала возмущений:

$$\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) = e^{\alpha t} \left\{ C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} - \frac{w_1^2}{M_1^2 \alpha^2} \left[ (\tilde{C}_4 e^{\sqrt{\beta}y} + \tilde{C}_5 e^{-\sqrt{\beta}y}) \cdot \left( \tilde{C}_6 \cos \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z + \tilde{C}_7 \sin \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z \right) \right] \right\}. \quad (4.4.54)$$

Вернемся теперь вновь к преобразованию (4.4.48). Искомую функцию  $f(y, z)$  представим в следующем виде

$$f(y, z) = \bar{f}(u), \quad \text{где } u = ay + bz, \quad a, b = \text{const}. \quad (4.4.55)$$

Далее относительно новой неизвестной функции  $\bar{f}$  получаем обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 \bar{f}}{du^2} - \frac{\alpha^2 M_1^2}{(a^2 + b^2) w_1^2} \bar{f} = -\frac{\lambda}{a^2 + b^2}. \quad (4.4.56)$$

Общим решением (4.4.56) является выражение следующего вида:

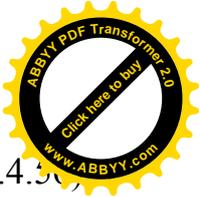
$$\bar{f}(u) = \bar{C}_1 e^{\frac{\alpha M_1}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} u} + C_2 e^{-\frac{\alpha M_1}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} u} + \frac{\lambda w_1^2}{\alpha^2 M_1^2}. \quad (4.4.57)$$

Согласно (4.4.55) функцию  $f(y, z)$  можно представить в следующем виде:

$$f(y, z) = \bar{C}_1 e^{\frac{\alpha M_1}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} (ay + bz)} + C_2 e^{-\frac{\alpha M_1}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} (ay + bz)} + \frac{\lambda w_1^2}{\alpha^2 M_1^2}. \quad (4.4.58)$$

Определим теперь, аналогично рассмотренным выше случаям, потенциал скорости возмущения  $\tilde{\varphi}_0 = (x, y, z, t)$ :

$$\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) = e^{\alpha t} \left[ C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \bar{C}_1 e^{\frac{\alpha M_1 (ay + bz)}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1}} + \bar{C}_2 e^{-\frac{\alpha M_1 (ay + bz)}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1}} \right]. \quad (4.4.59)$$



Таким образом, нами найдены общие решения (4.4.47), (4.4.54), (4.4.55), (4.4.56), (4.4.57) с помощью которых могут быть исследованы фильтрационные течения газа. Рассмотрим вопросы постановки начальных и граничных условий для потенциала скорости возмущенного потока газа.

Ставится задача Коши для определения потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$ : найти функцию  $\varphi(x, y, z, t)$ , удовлетворяющую уравнению (4.4.20) и следующим условиям:

- в начальный момент времени  $t = 0$  задается начальное распределение:  $\varphi(x, y, z, 0) = f_1(x, y, z)$ ;
- вдоль плоскости симметрии  $OXY$   $\varphi(x, y, 0, t) = f_2(x, y, t)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ ;
- выполняется условие на бесконечности  $\varphi(x, y, z, t) \rightarrow f_3(x, t)$  при  $y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$ .

Здесь  $f_1(x, y, z)$ ,  $f_2(x, y, t)$ ,  $f_3(x, t)$  - непрерывно дифференцируемые функции.

На бесконечно удаленных точках от скважины поток газа не возмущен. Перейдем к исследованию потенциала скорости  $\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t)$ .

Рассмотрим коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ , определяемые по соотношению (4.4.40). Пусть  $k_1 = \frac{\alpha M_1 (M_1 + 1)}{w_1 (1 - M_1^2)}$ . Тогда получим, что

$$k_1 = \frac{\alpha M_1}{w_1 (1 - M_1)} \tag{4.4.60}$$

Так как  $\alpha < 0$  и  $M_1 < 1$ , то имеем, что  $k_1 > 0$ . Аналогичным образом получаем, что

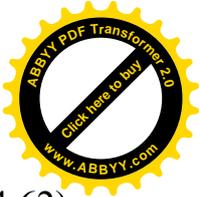
$k_2 = \frac{\alpha M_1 (M_1 - 1)}{w_1 (1 - M_1^2)}$ . Отсюда следует, что

$$k_2 = -\frac{\alpha M_1}{w_1 (1 + M_1)} \tag{4.4.61}$$

Если  $\alpha < 0$  и  $M_1 < 1$ , то  $k_2 > 0$ .

Принимая во внимание условия на бесконечности, для общего решения (4.4.54)  $C_2 = C_4 = 0$ .

Отсюда получаем следующее решение:



$$\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) = e^{\alpha} \left\{ C_1 e^{k_1 x} - \frac{w_1^2}{M_1^2 \alpha^2} \tilde{C}_5 e^{-\sqrt{\beta} y} (\tilde{C}_6 \cos \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z + \tilde{C}_7 \sin \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z) \right\}. \quad (4.4.62)$$

Здесь видно, что постоянную  $\beta$  следует выбрать так, чтобы выполнялось следующее условие

$$\beta > \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}. \quad (4.4.63)$$

Аналогичным образом, рассмотрим решение для  $\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t)$ , определяемое выражением (4.4.46). По граничным условиям для потенциала на бесконечности получаем, что  $C_2 = C_4 = C_6 = 0$ . При этом также имеет место  $\alpha < 0$ . Отсюда получаем, что

$$\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) = e^{\alpha} (C_1 e^{k_1 x} + C_3 e^{\frac{\alpha M_1}{w_1} y} + C_5 e^{\frac{\alpha M_1}{w_1} z}). \quad (4.4.64)$$

В случае потенциала скорости возмущения, определяемого по (4.4.59), также можно положить, что  $C_2 = \bar{C}_2 = 0$ . Отсюда получаем следующее выражение:

$$\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) = e^{\alpha} (C_1 e^{k_1 x} + \bar{C}_1 e^{\frac{\alpha M_1 (ay+bz)}{\sqrt{a^2+b^2} w_1}}). \quad (4.4.65)$$

Здесь  $a, b = const$ , причем  $a > 0$  и  $b > 0$ .

Скорость частиц газа возмущенного потока в любой точке пласта определяется из потенциала скорости возмущения следующим образом:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial x}, \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial y}, \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial z}. \quad (4.4.66)$$

Рассматривая решение в форме (4.4.62), находим составляющие вектора скорости:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= C_1 k_1 e^{k_1 x + \alpha t}, \\ \tilde{v} &= e^{\alpha} \frac{w_1^2 \sqrt{\beta}}{M_1^2 \alpha^2} \tilde{C}_5 e^{-\sqrt{\beta} y} (\tilde{C}_6 \cos \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z + \tilde{C}_7 \sin \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z), \\ \tilde{w} &= e^{\alpha} \frac{w_1^2 \tilde{C}_5}{M_1^2 \alpha^2} e^{-\sqrt{\beta} y} (\tilde{C}_6 \sin \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z - \tilde{C}_7 \cos \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z) \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}}. \end{aligned} \quad (4.4.67)$$

Составляющие вектора скорости возмущения фильтрационного течения газа, определяемые из потенциала скорости (4.4.64), выглядят так:



$$\tilde{u} = C_1 k_1 e^{k_1 x + \alpha t}, \quad \tilde{v} = C_3 \frac{\alpha M_1}{w_1} e^{\alpha \left(\frac{M_1}{w_1} y + t\right)}, \quad \tilde{w} = C_5 \frac{\alpha M_1}{w_1} e^{\alpha \left(\frac{M_1}{w_1} y + t\right)}. \quad (4.4.68)$$

Аналогичным образом, следуя выражению (4.4.65), для определения составляющих вектора скорости возмущения имеем:

$$\tilde{u} = C_1 k_1 e^{k_1 x + \alpha t}, \quad \tilde{v} = \bar{C}_1 \frac{\alpha M_1 a}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} e^{\frac{\alpha M_1 (ay + bz)}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} + \alpha t}, \quad \tilde{w} = \bar{C}_1 \frac{\alpha M_1 b}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} e^{\frac{\alpha M_1 (ay + bz)}{\sqrt{a^2 + b^2} w_1} + \alpha t}. \quad (4.4.69)$$

Полученные решения (4.4.67), (4.4.68) и (4.4.69) позволяют определить скорость возмущенного потока газа в любой точке пласта для любого момента времени пространственно-трехмерных нестационарных инерционных фильтрационных течений газа при использовании модели С.А.Христиановича, потенциалы поля течений которых находятся согласно (4.4.62), (4.4.64), (4.4.65).

Потенциалы скорости возмущения  $\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t)$  в полученных решениях (4.4.62), (4.4.64), (4.4.65) с течением времени стремятся к нулю, т.е. при  $t \rightarrow \infty$  имеет место  $\tilde{\varphi}_0(x, y, z, t) \rightarrow 0$ .

Потенциал скорости потока  $\varphi(x, y, z, t)$  на отдаленных точках от скважины будет поступательным, так как потенциал возмущения в этих точках угасает:

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \tilde{\varphi}_n(x, y, z, t) \rightarrow 0.$$

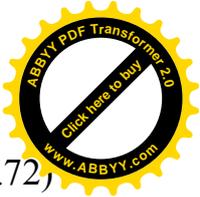
Составляющие вектора скорости  $u, v, w$  связаны с составляющими вектора скорости возмущения следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u &= w_1 + \tilde{u}, \\ v &= \tilde{v}, \\ w &= \tilde{w}. \end{aligned} \quad (4.4.70)$$

Давление газа в пласте будем вычислять согласно (4.4.8), полагая равным нулю потенциал внешних массовых сил  $U = 0$ , т.е.

$$P(\rho) = -\frac{1}{\varepsilon^2(1 + \beta)} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\text{grad} \varphi|^2 \right). \quad (4.4.71)$$

Потенциал скорости потока газа с учетом нулевого приближения для потенциала возмущения имеет следующий вид:



$$\varphi(x, y, z, t) = w_1 x + \varepsilon \cdot \tilde{\varphi}_0(x, y, z, t). \quad (4.4.72)$$

Подставляя выражения для частных производных  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  и  $|\text{grad} \varphi|^2$  из соотношений (4.4.54), (4.4.62), (4.4.64) и (4.4.65) в (4.4.69), можно определить распределение давления газа в пласте в пространстве и во времени.

Распределение поля давления фильтрационного течения газа, описываемого потенциалом скорости (4.4.71), (4.4.72) выглядит так:

$$P(x, y, z, t) = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left[ \alpha \varepsilon \cdot e^{\alpha t} \left\{ C_1 e^{k_1 x} - \frac{w_1^2}{M_1^2 \alpha^2} \tilde{C}_5 \tilde{C}_6 e^{-\sqrt{\beta} y} \left( \cos \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z \right) + \frac{1}{2} \left\{ w_1^2 + C_1 \varepsilon k_1 e^{\alpha t + k_1 x} (2w_1 + C_1 \varepsilon k_1 e^{\alpha t + k_1 x}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\tilde{C}_5^2 \tilde{C}_6^2 \varepsilon^2 w_1^4}{M_1^4 \alpha^4} e^{2(\alpha t - \sqrt{\beta} y)} \left( 2\beta + \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2} \sin 2 \sqrt{\beta - \frac{M_1^2 \alpha^2}{w_1^2}} z \right) \right\} \right].$$

Для удобства и компактности записи здесь принято, что  $\tilde{C}_6 = \tilde{C}_7$ .

Аналогичным образом, подставляя (4.4.64), (4.4.72) в (4.4.71), можно вывести формулу для определения распределения давления газа:

$$P(x, y, z, t) = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left[ \alpha \cdot \varepsilon \cdot e^{\alpha t} \left( C_1 e^{k_1 x} + C_3 e^{\frac{\alpha M_1 y}{w_1}} + C_5 e^{\frac{\alpha M_1 z}{w_1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ (w_1 + C_1 \varepsilon k_1 e^{\alpha t + k_1 x})^2 + \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 M_1^2}{w_1^2} \left( C_3^2 e^{2\alpha(t + \frac{M_1 y}{w_1})} + C_5^2 e^{2\alpha(t + \frac{M_1 z}{w_1})} \right) \right\} \right].$$

Используя последнюю формулу для определения потенциала скорости, получаем следующую функцию для определения давления в виде функции времени и точки трехмерного пространства:

$$P(x, y, z, t) = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\beta)} \left\{ \alpha \cdot \varepsilon e^{\alpha t} \left( C_1 e^{k_1 x} + C_3 e^{\frac{\alpha M_1 y}{w_1}} + C_5 e^{\frac{\alpha M_1 z}{w_1}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ (w_1 + C_1 \varepsilon k_1 e^{\alpha t + k_1 x})^2 + \frac{\varepsilon^2 \alpha^2 M_1^2}{w_1^2} e^{\frac{2\alpha M_1 (ay + bz)}{w_1}} \right] \right\}. \quad (4.4.73)$$

Рассмотрим теперь некоторые примеры установившихся пространственных течений сжимаемых жидкостей. Для этого будем



рассматривать квазилинейное уравнение второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат:

$$(u^2 - a^2)\varphi_{xx} + (v^2 - a^2)\varphi_{yy} + (w^2 - a^2)\varphi_{zz} + 2uv\varphi_{xy} + 2uv\varphi_{xz} + 2vw\varphi_{yz} = 0, \quad (4.4.74)$$

где  $\varphi(x, y, z)$  - потенциал скорости,  $u, v, w$  - составляющие вектора скорости, выражающиеся через потенциал скорости так:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4.4.75)$$

Исключим входящий в уравнение (4.4.75) квадрат модуля вектора скорости  $a^2$  при помощи соотношения, вытекающего из уравнения теплосодержания

$$a^2 = a_1^2 - (\gamma - 1) \cdot (w_1 \cdot u + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}), \quad (4.4.76)$$

где  $a_1$  - критическая скорость звука,  $\gamma = c_p / c_v$ ,  $w_1$  - заданная начальная скорость поступательного движения потока.

Рассмотрим обтекание в пространстве тонких и слабо искривленных тел, расположенных в однородном газовом потоке под малым углом атаки. В этом случае возмущения, создаваемые телом в однородном потоке, будут малыми, и уравнения (4.4.74), (4.4.75), (4.4.76) могут быть подвергнуты линеаризации.

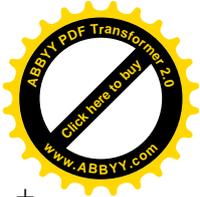
Выберем направление однородного потока, совпадающее с направлением оси  $Ox$  и обозначим через  $w_1$  и  $a_1$ , соответственно, скорость потока и скорость распространения звука в однородном потоке. Возмущения, вносимые в этот поток тонким телом, условимся обозначать "тильдой", тогда получаем следующее:

$$\varphi = a_1 \cdot x + \tilde{\varphi}, \quad u = w_1 + \tilde{u}, \quad v = \tilde{v}, \quad w = \tilde{w}. \quad (4.4.77)$$

Рассмотрим рекуррентную систему

$$(1 - M_1^2)\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} = 0 \quad (4.4.78)$$

$$\begin{aligned} (1 - M_1^2)\varphi_{nxx} + \varphi_{nyy} + \varphi_{nzz} = & \frac{M_1^2(\gamma + 1)}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{ix} \varphi_{(n-1-i)xx} + \frac{M_1^2(\gamma - 1)}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{ix} \varphi_{(n-1-i)yy} + \\ & + \frac{M_1^2(\gamma - 1)}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{ix} \varphi_{(n-1-i)zz} + \frac{2M_1^2}{w_1} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{iy} \varphi_{(n-1-i)xy} + \sum_{i=0}^{n-2} T_i \varphi_{(n-2-i)xy} \right] + \frac{2M_1^2}{w_1} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{iz} \varphi_{(n-1-i)xz} + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \varphi_{(n-2-i)xz} + \frac{2M_1^2}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} P_i \varphi_{(n-2-i)yz} + \frac{M_1^2(\gamma+1)}{2w_1^2} \sum_{i=0}^{n-2} G_i \varphi_{(n-2-i)xx} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2w_1^2} \sum_{i=0}^{n-2} G_i \varphi_{(n-2-i)zz} + \\
& + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2w_1^2} \sum_{i=0}^{n-2} G_i \varphi_{(n-2-i)yy} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2w_1^2} \sum_{i=0}^{n-2} \tilde{M}_i (\varphi_{(n-2-i)xx} + \varphi_{(n-2-i)zz}) + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{2w_1^2} \cdot \\
& \cdot \sum_{i=0}^{n-2} R_i (\varphi_{(n-2-i)xx} + \varphi_{(n-2-i)yy}) + \frac{M_1^2(\gamma+1)}{2w_1^2} \sum_{i=0}^{n-2} R_i \varphi_{(n-2-i)zz}, \tag{4.4.79}
\end{aligned}$$

где  $T_{n-1} = \frac{1}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{ix} \varphi_{(n-1-i)x}$ ,  $R_{n-1} = \frac{1}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{iz} \varphi_{(n-1-i)x}$ ,  $P_{n-1} = \frac{1}{w_1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{iy} \varphi_{(n-1-i)x}$ ,

$$G_n = \sum_{i=0}^n \varphi_{ix} \varphi_{(n-i)x}, \quad M_n = \sum_{i=0}^n \varphi_{iy} \varphi_{(n-i)y}, \quad R_n = \sum_{i=0}^n \varphi_{iz} \varphi_{(n-i)z}. \tag{4.4.80}$$

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \cdot \varphi_n(x, y, z), \tag{4.4.81}$$

где  $\varphi_n(x, y, z)$  - приближения потенциала возмущения,  $\varepsilon$  - малый параметр, характеризующий порядок угла отклонения скорости возмущений от направления основного потока.

Как видно из уравнения (4.4.78), в нулевом приближении для потенциала скорости возмущения  $\varphi_0(x, y, z)$  получено линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. В случае дозвукового режима течения ( $M_1 < 1$ ,  $M_1 = \frac{w_1}{a_1}$ ) уравнение (4.4.78) относится к эллиптическому типу.

Осуществив переход из системы  $Oxyz$  к новой ортогональной системе координат  $O\xi\zeta\psi$ , можно привести (4.4.78) к уравнению Лапласа для пространственных потенциальных течений сжимаемой жидкости. Остальные приближения, определяемые из системы дифференциальных уравнений (4.4.79), являются уравнениями Пуассона. Например, при  $n=1$  имеем:

$$\begin{aligned}
(1-M_1^2)\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} + \varphi_{1zz} & - \frac{M_1^2(\gamma+1)}{w_1} \varphi_{0x} \varphi_{0xx} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{w_1} \varphi_{0x} \varphi_{0yy} + \frac{M_1^2(\gamma-1)}{w_1} \varphi_{0x} \varphi_{0zz} + \\
& + \frac{2M_1^2}{w_1} \varphi_{0y} \varphi_{0xy} + \frac{2M_1^2}{w_1} \varphi_{0z} \varphi_{0xz} \tag{4.4.82}
\end{aligned}$$



Правая часть уравнения (4.4.82) составляется с учетом выражения нулевого приближения потенциала скорости возмущения, являющегося решением уравнения (4.4.78), который приводится к уравнению Лапласа.

Если скорость основного потока сверхзвуковая, т.е.  $M_1 > 1$ , то для потенциала возмущений имеем линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, принадлежащее к гиперболическому типу.

Рассмотрим теперь граничные условия на бесконечности. Положим, что при обтекании тел неограниченным потоком на бесконечности возмущения перед телом будут затухать, т.е. при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $V = \vec{grad}\varphi \rightarrow 0$  или, поскольку потенциал определен с точностью до постоянной, то можно принять, что при  $x \rightarrow -\infty$  имеет место  $\varphi \rightarrow 0$ .

Условие непроницаемости поверхности тела ставится так:

$$V_n = \text{grad}_n \varphi \stackrel{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на поверхности тела.}$$

Вернемся к уравнению (4.4.78). При  $M_1 < 1$  введем новые переменные  $\bar{y} = y\sqrt{1-M_1^2}$ ,  $\bar{z} = z\sqrt{1-M_1^2}$ . Тогда это уравнение переходит в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \bar{z}^2} = 0 \tag{4.4.83}$$

Решение уравнения Лапласа будем искать в виде:

$$\varphi_0(x, \bar{y}, \bar{z}) = f(u), \tag{4.4.84}$$

$$u = x^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2, \tag{4.4.85}$$

где  $f(u)$  - неизвестная функция, подлежащая определению.

Подставляя предполагаемые решения (4.4.84), (4.4.85) в уравнение Лапласа относительно функции  $f(u)$ , получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$uf''(u) + \frac{3}{2}f'(u) = 0 \tag{4.4.86}$$

После интегрирования уравнения имеем:



$$f(u) = -\frac{2C_1}{\sqrt{u}} + C_2, \quad \varphi_0(x, \bar{y}, \bar{z}) = -\frac{2C_1}{\sqrt{x^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}} + C_2 \quad (4.4.87)$$

Переходя к исходным переменным  $x, y, z$  для нулевого приближения потенциала скорости возмущения имеем:

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{2C_1}{\sqrt{x^2 + (1 - M_1^2)(y^2 + z^2)}} + C_2 \quad (4.4.88)$$

Учитывая условия на бесконечности и полагая, что  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = q/(8\pi)$ , получаем фундаментальное решение, соответствующее точечному источнику с объемным дебитом  $q$ :

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + (1 - M_1^2)(y^2 + z^2)}} \quad (4.4.89)$$

Это решение удовлетворяет уравнению (4.4.83) и при сверхзвуковой скорости потока, т.е. когда  $M_1 > 1$  и уравнение (4.4.78) не сводится к уравнению Лапласа, а имеет гиперболический тип. Очевидно, что при  $M_1 > 1$  решение (4.4.87) существует только внутри конуса Маха:

$$x^2 - (M^2 - 1) \cdot (y^2 + z^2) = 0 \quad (4.4.90)$$

Течение от источника в несжимаемой жидкости (при  $M_1 = 0$ ) обладает сферической симметрией (оно зависит от  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , где  $r$  - расстояние от источника), решение (4.4.87) при  $M > 0$  обладает осевой симметрией (оно зависит от  $x$  и  $r$ , где  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  - расстояние от оси симметрии).

Решение при  $0 < M_1 < 1$  можно, подобно решению при  $M = 0$ , назвать источником (стоком - при  $q < 0$ ) в начале координат. Решение при  $M > 1$  и  $q > 0$  соответствует течению газа внутри конуса Маха от его поверхности к стоку, расположенному на оси  $x$  при  $x = \infty$ .

Условно это будем называть источником, ему соответствуют решения с особенностью в начале координат и на всей поверхности конуса Маха.

Рассмотрим решение для обобщенного вида, когда источник помещен в точку с координатами  $\xi, \eta, \zeta$ :



$$\varphi_0 = - \frac{q}{4\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (1 - M_1^2)[(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]}}$$

Считая  $\xi, \eta, \zeta$  параметрами и дифференцируя по этим параметрам, можно получить новое решение для потенциала.

Дифференцируя правую часть решения по  $\xi$ , получим для потенциала возмущения новое решение. Это решение имеет в точке  $\xi, \eta, \zeta$  особенность типа цилиндрического диполя с осью, параллельной оси  $x$ :

$$\varphi = - \frac{q(x - \xi)}{4\pi \left\{ (x - \xi)^2 + (1 - M_1^2)[(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2] \right\}^{3/2}}$$

Найдем теперь решение уравнения Лапласа (4.4.83) методом разделения переменных Фурье. Пусть

$$\varphi_0(x, y, z) = f_1(x)f_2(u), \tag{4.4.91}$$

где  $U = a\bar{y} + b\bar{z}$ ,  $a, b - const$ ,  $f_1(x), f_2(u)$  - неизвестные пока функции, которые могут быть впоследствии определены. Подставляя (4.4.91) в уравнение (4.4.83), получаем

$$\frac{f_1''}{f_1(x)} = -(a^2 + b^2) \frac{f_2''(u)}{f_2(u)} = \lambda^2. \tag{4.4.92}$$

Здесь  $\lambda$  - постоянная разделения переменных. Из (4.4.92) получаем два линейных обыкновенно дифференциальных уравнения относительно искомых функций  $f_1(x), f_2(u)$ :

$$f_1''(x) - \lambda^2 f_1(x) = 0, \tag{4.4.93,а}$$

$$f_2''(u) + \frac{\lambda^2}{a^2 + b^2} f_2(u) = 0. \tag{4.4.93,б}$$

Первое уравнение (4.4.93,а) имеет следующее общее решение:

$$f_1(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}, \tag{4.4.94}$$

где  $C_1, C_2$ - постоянные интегрирования. Решением уравнения (4.4.93,б) является следующее выражение:



$$f_2(u) = C_3 \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2}} U\right) + C_4 \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2}} U\right) \quad (4.4.94, a)$$

или

$$f_2(a\bar{y} + b\bar{z}) = C_3 \cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a\bar{y} + b\bar{z})\right) + C_4 \sin\left(\frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a\bar{y} + b\bar{z})\right) \quad (4.4.95)$$

Подставляя (4.4.95), (4.4.94) в (4.4.91) и переходя к исходным переменным, получаем решение уравнения (4.4.78) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}) * \\ & * \left\{ C_3 \cos\left[\lambda \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{a^2 + b^2}} (ay + bz)\right] + C_4 \sin\left[\lambda \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{a^2 + b^2}} (ay + bz)\right] \right\} \end{aligned} \quad (4.4.96)$$

Учитывая условия для потока на бесконечности, полагаем  $C_2 = 0$ . Рассмотрим более простой случай, считая, что  $C_4 = 0$ . Тогда потенциал скорости имеет следующий вид:

$$\varphi_0(x, y, z) = \tilde{C}_1 e^{\lambda x} \cos\left[\lambda \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{a^2 + b^2}} (ay + bz)\right], \quad (4.4.97)$$

где  $\tilde{C}_1 = C_1 C_3$ .

Решением (4.4.97) могут быть описаны продольные и поперечные обтекания потоком газа волнистой поверхности. Для определения постоянной  $\tilde{C}_1$  следует составить граничные условия на заданной поверхности обтекаемого тела. Если уравнение поверхности есть  $F(x, y, z) = 0$ , то на этой поверхности должно выполняться условие  $(\vec{V} \text{grad} F) = 0$ , или

$$U \frac{\partial F}{\partial x} + V \frac{\partial F}{\partial y} + W \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (4.4.98)$$

теперь, согласно полученному решению (4.4.97), определим составляющие вектора скорости:

$$U = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \lambda \tilde{C}_1 e^{\lambda x} \cos\left[\lambda \sqrt{\frac{1 - M_1^2}{a^2 + b^2}} (ay + bz)\right],$$



$$g = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = -a\lambda \tilde{C}_1 \sqrt{\frac{1-M_1^2}{a^2+b^2}} \sin \left[ \lambda \sqrt{\frac{1-M_1^2}{a^2+b^2}} (ay+bz) \right] e^{\lambda x}, \quad (4.4.99)$$

$$W = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = -b\lambda \tilde{C}_1 \sqrt{\frac{1-M_1^2}{a^2+b^2}} \tilde{C}_1 \sin \left[ \lambda \sqrt{\frac{1-M_1^2}{a^2+b^2}} (ay+bz) \right] e^{\lambda x}$$

Воспользовавшись уравнением Бернулли, можно получить далее формулу для определения закона распределения давления по волнистой поверхности.

### Выводы

1. Предложен вычислительный алгоритм метода крупных частиц Ю.М. Давыдова для расчета пространственно-двумерных одно- и многофазных изотермических фильтрационных течений в пористой среде при использовании линейной модели Дарси. Нелинейные свойства разностных схем метода крупных частиц Ю.М. Давыдова исследованы с помощью аппарата метода дифференциальных приближений: определены элементы матрицы аппроксимационной вязкости и матрицы аппроксимационной дисперсии для расчета однофазных фильтрационных потоков в пористой среде при использовании модели Дарси.

2. Предложена разностная модель метода крупных частиц Ю.М. Давыдова для расчета одно- и многофазных инерционных изотермических фильтрационных течений при использовании нелинейной модели академика С.А. Христиановича. Нелинейные свойства разностных схем метода крупных частиц Ю.М. Давыдова исследованы с помощью метода дифференциальных приближений: определены коэффициенты матрицы аппроксимационной вязкости для расчета прямолинейно - параллельных инерционных фильтрационных потоков однородной упругой жидкости.

3. Решена тестовая задача о расчете методом крупных частиц разработки гипотетической залежи нефти двумя горизонтальными скважинами при использовании моделей А. Дарси и С. А. Христиановича. Проведен



сравнительный анализ численных решений, полученных при использовании моделей А. Дарси и С. А. Христиановича. Гипотетическая залежь принята непроницаемой и разрабатывалась двумя горизонтальными скважинами с одинаковым постоянным объемным дебитом.

4. Аналитически исследованы пространственно - трехмерные фильтрационные течения газа в пористой среде при использовании модели С. А. Христиановича. Применяя методы решения нелинейных уравнений в частных производных, из исходной системы уравнений фильтрации газа получено основное нелинейное дифференциальное уравнение газовой динамики для описания пространственно - трехмерных потенциальных нестационарных течений газа в пористой среде. Используя метод возмущений, получена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости возмущения. Получено несколько точных общих решений уравнения в частных производных, записанного относительно нулевого приближения потенциала скорости возмущения.



## ГЛАВА V. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ ДАВЫДОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

### 5.1. Разностная модель метода Давыдова на треугольной сетке в пространственно-двумерном случае.

Рассмотрим задачу построения разностной модели метода Давыдова на треугольной разностной сетке в пространственно-двумерном случае декартовой системы координат. В качестве исходных возьмем систему дифференциальных уравнений Эйлера в дивергентной форме для безразмерных величин [48]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W) &= 0, \\ \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U W) + \frac{\partial P}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V W) + \frac{\partial P}{\partial Y} &= 0,\end{aligned}$$

(5.1.1)

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E W) + \operatorname{div}(P W) = 0.$$

Система уравнений (5.1.1) замыкается уравнением состояния:

$$P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot [E - (U^2 + V^2) / 2].$$

(5.1.2)

Область интегрирования покрывается фиксированной в пространстве (эйлеровой) расчетной сеткой (рис. 5.1.1), состоящей из треугольных ячеек с основанием  $2\Delta x$  и высотой  $\Delta y$  в плоской декартовой системе координат.

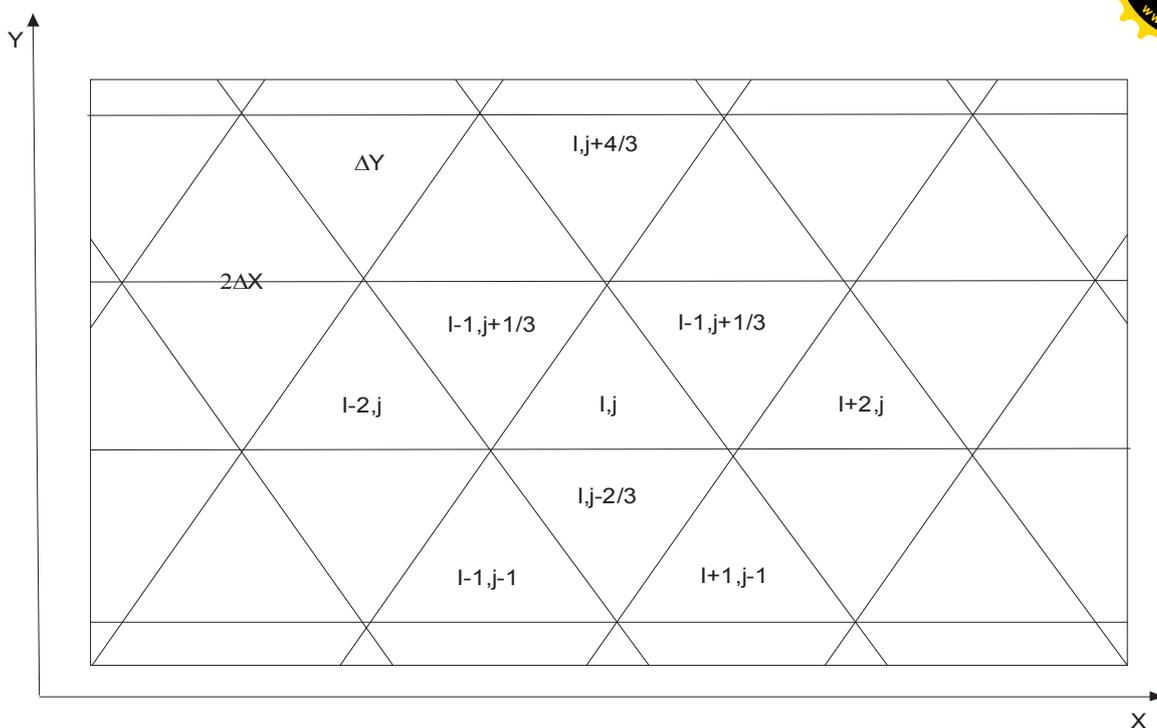


Рис. 5.1.1.

Рассмотрим все этапы одного расчетного цикла в методе Давыдова отдельно.

I. Эйлерав этап.

На этом этапе в системе (5.1.1) не учитываются конвективные члены. Тогда приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial X} &= 0, \\ \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial Y} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(PW) = 0.$$

Аппроксимируя систему (5.1.3) в момент времени  $t^n$ , получаем следующие разностные уравнения (по оси  $OX$  выбиралась трехточечная аппроксимация (рис. 5.1.2, рис. 5.1.3), по оси  $OY$  - шеститочечная аппроксимация (рис. 5.1.4, рис. 5.1.5) для ячейки  $(i, j)$ :

а)  $i + j$  - четное число:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_i^n &= U_{i,j}^n - [(P_{i+2,j}^n - P_{i-2,j}^n)/(4\Delta x)] / \rho_{i,j}^n \\
 \tilde{V}_i^n &= V_{i,j}^n - [(-P_{i-2,j}^n + 2P_{i-2,j+1/3}^n - P_{i,j}^n - P_{i,j-2/3}^n + 2P_{i+1,j+1/3}^n - P_{i+2,j}^n)/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j}^n, \\
 \tilde{E}_{i,j}^n &= E_{i,j}^n - \{[(PU)_{i+2,j}^n - (PU)_{i-2,j}^n]/(4\Delta x) + [-(PV)_{i-2,j}^n + 2(PV)_{i-1,j+1/3}^n - (PV)_{i,j}^n - \\
 &\quad - (PV)_{i,j-2/3}^n + 2(PV)_{i+1,j+1/3}^n - (PV)_{i+2,j}^n]/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j}^n \}.
 \end{aligned}
 \tag{5.1.4}$$

б)  $i + j$  - нечетное число:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_{i,j+1/3}^n &= U_{i,j+1/3}^n - [(P_{i+2,j+1/3}^n - P_{i-2,j+1/3}^n)/(4\Delta x)] \Delta t / \rho_{i,j+1/3}^n, \\
 \tilde{V}_{i,j+1/3}^n &= V_{i,j+1/3}^n - [(P_{i-2,j+1/3}^n - 2P_{i-1,j}^n + P_{i,j+1/3}^n + P_{i,j+1}^n - 2P_{i+1,j}^n + P_{i+2,j+1/3}^n)/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j+1/3}^n, \\
 \tilde{E}_{i,j+1/3}^n &= E_{i,j+1/3}^n - \{[(PU)_{i+2,j+1/3}^n - (PU)_{i-2,j+1/3}^n]/(4\Delta x) + [(PV)_{i-2,j+1/3}^n - 2(PV)_{i-1,j}^n + \\
 &\quad + (PV)_{i,j+1/3}^n + (PV)_{i,j+1}^n + 2(PV)_{i+1,j}^n + (PV)_{i+2,j+1/3}^n]/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j+1/3}^n \}.
 \end{aligned}
 \tag{5.1.5}$$

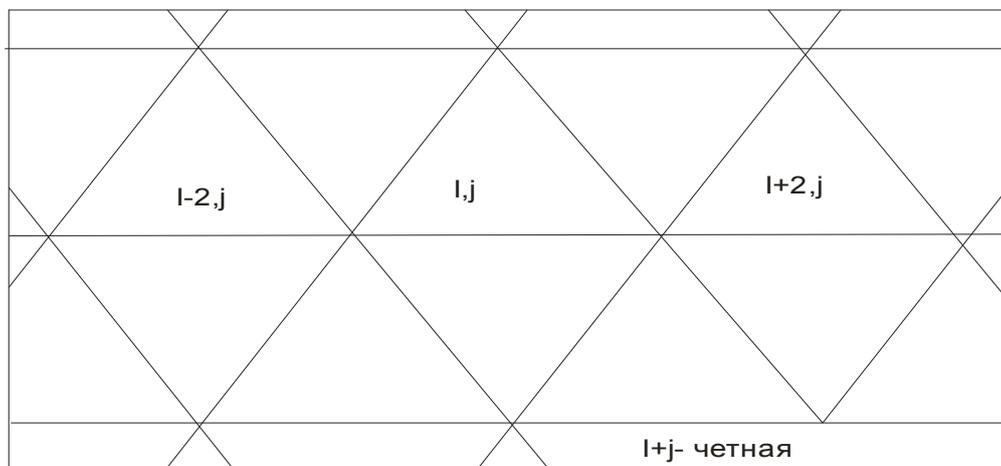


Рис. 5.1.2

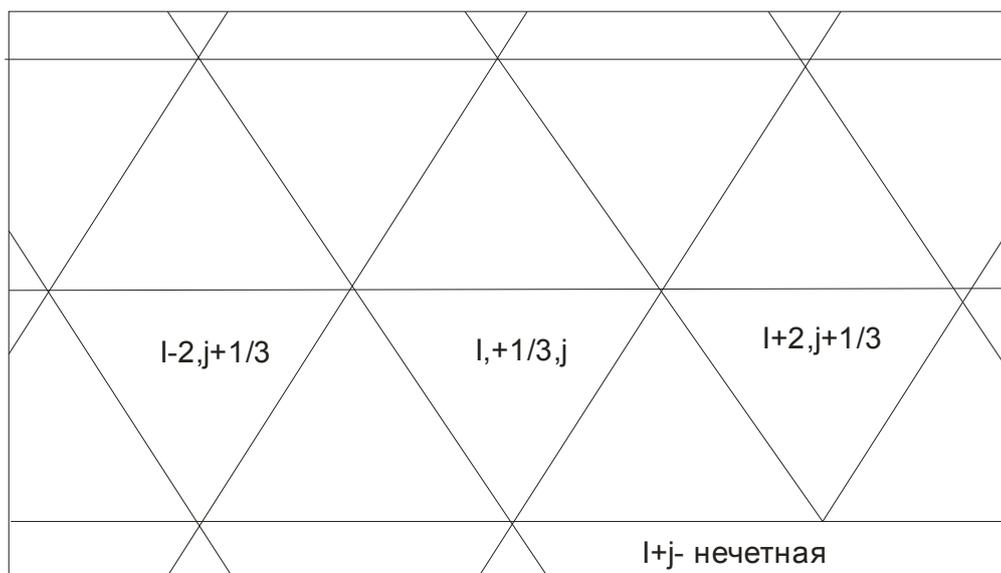


Рис. 5.1.3

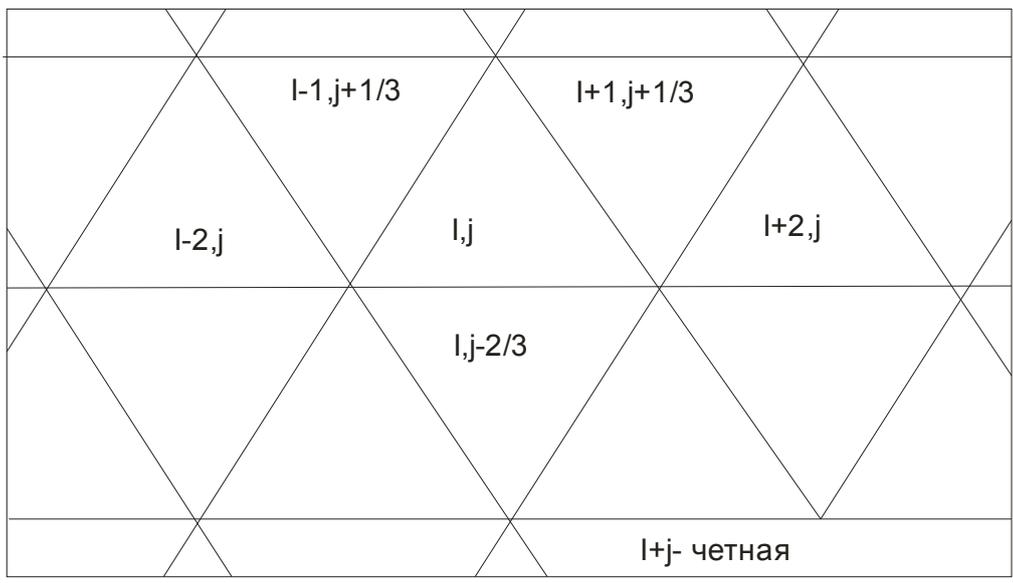


Рис. 5.1.4

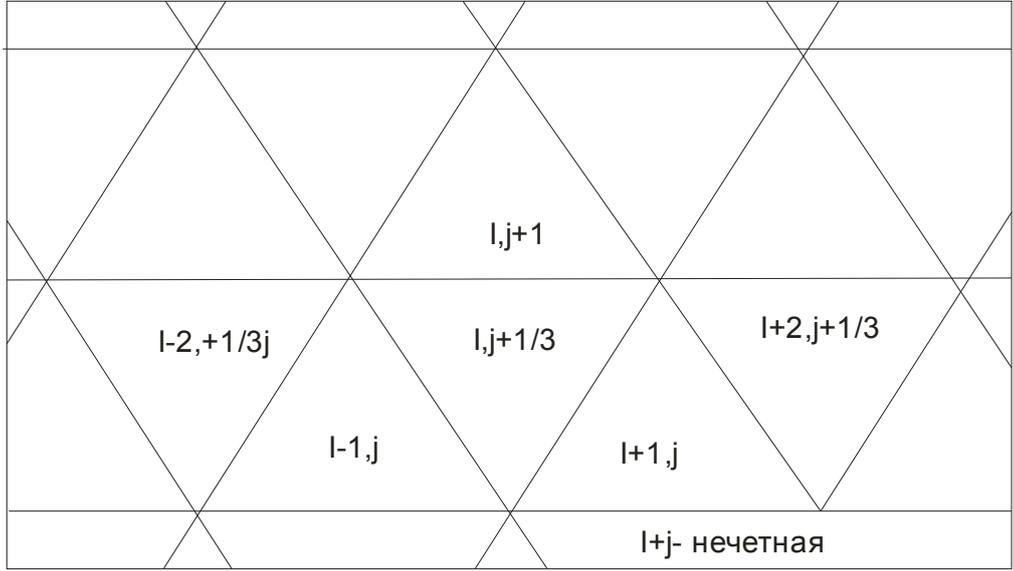


Рис. 5.1.5

II. Лагранжев этап.

На этом этапе определяются потоки массы  $\Delta M^n$  через границы эйлеровых ячеек за время  $\Delta t$  по формулам первого порядка точности. При этом полагаем, что масса, импульс и энергия переносятся только за счет нормальной к границе составляющей скорости. Значение плотности  $\langle \rho \rangle$ , соответствующее границе между ячейками, равно плотности ячейки, откуда течет поток. Например, если поток направлен от ячейки  $(i-1, j+1/3)$  к ячейке  $(i, j)$ , то  $\langle \rho \rangle_{i-1/2, j+1/6}^n = \rho_{i-1, j+1/3}^n$  и т. д. (рис. 5.1.6, рис. 5.1.7).

Для ячейки:

а)  $i + j$  - четное число:

$$\Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n = \langle \rho \rangle_{i-1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i-1, j+1/3}^n \Delta y - \tilde{V}_{i-1, j+1/3}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i, j}^n \Delta y - \tilde{V}_{i, j}^n \Delta x)] \Delta t / 4,$$

$$\Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n = \langle \rho \rangle_{i+1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i, j}^n \Delta y + \tilde{V}_{i, j}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i+1, j+1/3}^n \Delta y + \tilde{V}_{i+1, j+1/3}^n \Delta x)] \Delta t / 4,$$

$$\Delta M_{i, j-1/3}^n = \langle \rho \rangle_{i, j-1/3}^n [(\tilde{V}_{i, j-2/3}^n + \tilde{V}_{i, j}^n)] (\Delta x \Delta t) / 4.$$

б)  $i + j$  - нечетное число:

$$\Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n = \langle \rho \rangle_{i-1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i-1, j}^n \Delta y + \tilde{V}_{i-1, j}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i, j+1/3}^n \Delta y + \tilde{V}_{i, j+1/3}^n \Delta x)] \Delta t / 4,$$

$$\Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n = \langle \rho \rangle_{i+1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i, j+1/3}^n \Delta y - \tilde{V}_{i, j+1/3}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i+1, j}^n \Delta y - \tilde{V}_{i+1, j}^n \Delta x)] \Delta t / 4, \quad (5.1.7)$$

$$\Delta M_{i, j+2/3}^n = \langle \rho \rangle_{i, j+2/3}^n [\tilde{V}_{i, j+1/3}^n \Delta y + \tilde{V}_{i, j+1}^n \Delta x] (\Delta x \Delta t) / 2.$$

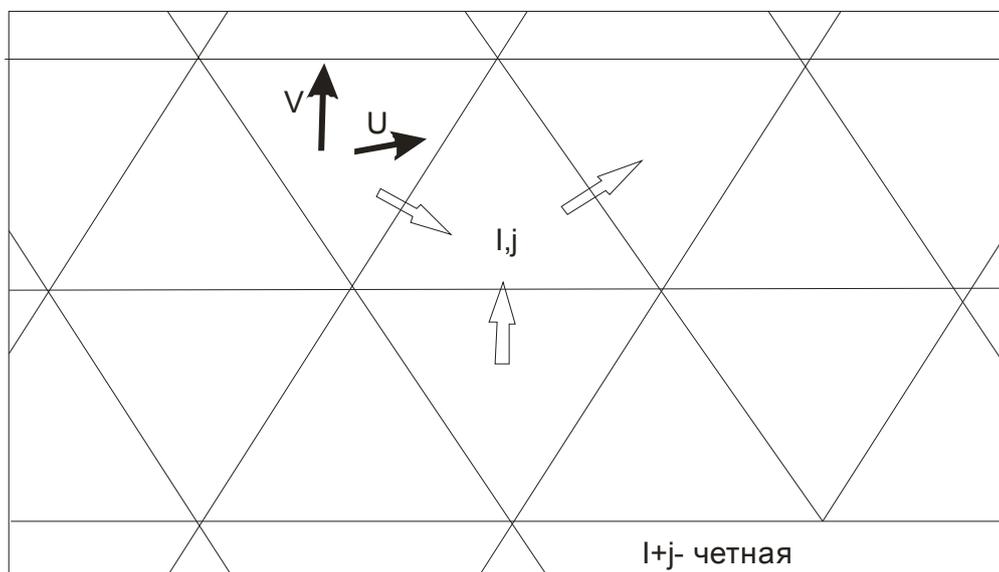


Рис. 5.1.6

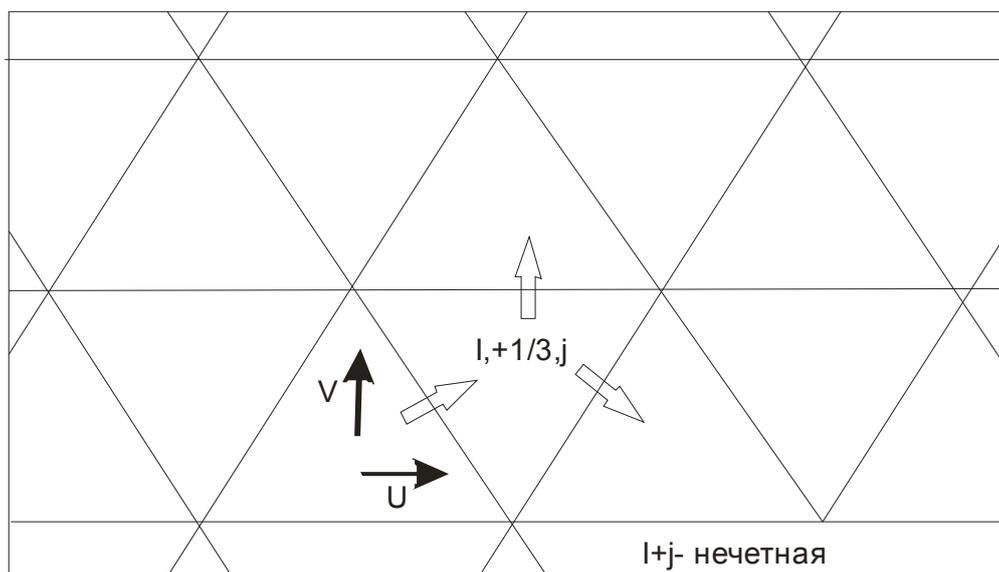




Рис. 5.1.7

III. Заключительный этап.

На этом этапе определяются окончательные поля параметров потока  $\rho, U, V, E$  и  $P$  на фиксированной эйлеровой сетке в момент времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ .

Введем новое обозначение:  $X = X(U, V, E)$ ,  $\tilde{X} = \tilde{X}(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{E})$ . Для автоматического определения направления потока используем введенную Ю.М.Давыдовым функцию  $D_{i,j}^n(m)$  [ ], для этого все стороны треугольной ячейки  $(i, j)$  пронумеруем индексами  $m = 1, 2, 3$ , как это показано ниже:

- а)  $i + j$  - четное число  $1 \triangle 2 \triangle 3$ ; б)  $i + j$  - нечетное число  $1 \nabla 2 \nabla 3$ .

Определим значение  $D_{i,j}^n(m)$ , относящееся к стороне  $m$ , следующим образом:

$$D_{i,j}^n(m) = \begin{cases} 1, & \text{если жидкость втекает в ячейку } (i, j) \text{ ч/з сторону } m \\ 0, & \text{если жидкость вытекает из ячейки } (i, j) \text{ ч/з сторону } m \end{cases}$$

Тогда, параметры потока  $\rho, X(U, V, E)$  для рассматриваемой ячейки будут следующими:

- а)  $i + j$  - четное число:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + 2\{[D_{i,j}^n(1) - 0.5]\Delta M_{i-1/2,j+1/6}^n + [\Delta M_{i,j}^n(2) - 0.5] \cdot \Delta M_{i,j-1/3}^n + [D_{i,j}^n(3) - 0.5]\Delta M_{i+1/2,j+1/6}^n\} / \Delta x \Delta y,$$

$$X_{i,j}^n = \{\tilde{X}_{i,j}^n [\rho_{i,j}^n \Delta x \Delta y - [1 - D_{i,j}^n(1)]\Delta M_{i-1/2,j+1/6}^n - [1 - D_{i,j}^n(2)] \cdot \Delta M_{i,j-1/3}^n - [1 - D_{i,j}^n(3)]\Delta M_{i+1/2,j+1/6}^n] + D_{i,j}^n(1)\tilde{X}_{i-1,j+1/3}^n \cdot \Delta M_{i-1,j+1/6}^n + D_{i,j}^n(2)\tilde{X}_{i,j-2/3}^n \Delta M_{i,j-1/3}^n + D_{i,j}^n(3)\tilde{X}_{i+1,j+1/3}^n \cdot \Delta M_{i+1/2,j+1/6}^n\} / (\rho_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y)$$

- б)  $i + j$  - нечетное число:

$$\rho_{i,j+1/3}^{n+1} = \rho_{i,j+1/3}^n + 2\{[D_{i,j}^n(1) - 0.5]\Delta M_{i-1/2,j+1/6}^n + [D_{i,j}^n(2) - 0.5]\Delta M_{i+1/2,j+1/6}^n + [D_{i,j}^n(3) - 0.5]\Delta M_{i,j+2/3}^n\} / \Delta x \Delta y,$$

$$X_{i,j+1/3}^n = \{\tilde{X}_{i,j+1/3}^n [\rho_{i,j+1/3}^n \Delta x \Delta y - [1 - D_{i,j}^n(1)]\Delta M_{i-1/2,j+1/6}^n - [1 - D_{i,j}^n(2)]\Delta M_{i+1/2,j+1/6}^n - [1 - D_{i,j}^n(3)]\Delta M_{i,j+2/3}^n] + (D_{i,j}^n(1)\tilde{X}_{i-1,j}^n \cdot \Delta M_{i-1/2,j+1/6}^n + D_{i,j}^n(2)\tilde{X}_{i+1,j}^n \Delta M_{i+1/2,j+1/6}^n + D_{i,j}^n(3)\tilde{X}_{i,j+1}^n \cdot \Delta M_{i,j+2/3}^n)\} / (\rho_{i,j+1/3}^{n+1} \Delta x \Delta y)$$



Далее путем перерасчета, согласно уравнению состояния (5.1) определяются значения поля давления в каждой ячейке эйлеровой сетки в новый момент времени  $t^{n+1}$ .

Начальные и граничные условия здесь ставятся традиционным образом, в зависимости от конкретной задачи. Предложенный алгоритм может найти широкое применение при решении разнообразных задач: обтекании наклонной пластины, клина, уступа с острием и др.

## 5.2. Пространственно-трехмерная разностная модель метода Давыдова на треугольной сетке.

В данном параграфе развиваем изложенный в предыдущем параграфе алгоритм метода Давыдова на треугольной сетке для пространственно-трехмерного случая. Система уравнений Эйлера и уравнение состояния для этого случая имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{W}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U \vec{W}) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V \vec{W}) + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ (5.2.1) \\ \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W \vec{W}) + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \vec{W}) + \operatorname{div}(P \vec{W}) &= 0. \end{aligned}$$

Система уравнений (5.2.1) замыкается уравнением состояния

$$\begin{aligned} P &= (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot [E - (U^2 + V^2 + W^2)/2], \\ (5.2.2) \end{aligned}$$

где  $\vec{W} = \vec{W}(U, V, W)$  - вектор скорости.

Расчетная ячейка в пространственно-трехмерном случае является призмой с треугольным основанием: стороны основания равны  $\Delta y \Delta x$  и лежат на в плоскости  $OXY$ , а высота призмы -  $\Delta z$  (рис. 5.2.1).

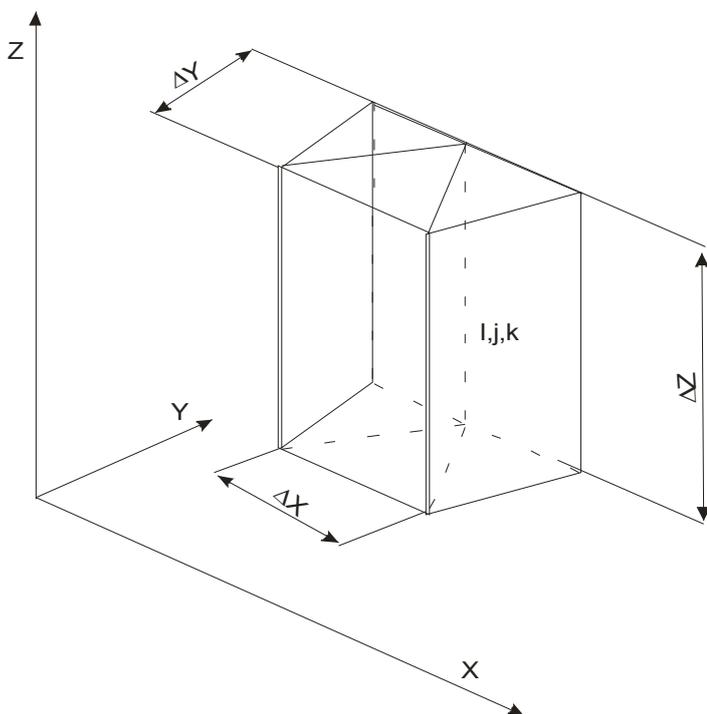


Рис. 5.2.1.

Согласно традиционному алгоритма метода Давыдова, распишем все этапы расчетного цикла.

I. Эйлерав этап.

На первом этапе предполагается, что поле плотности «заморожено». Тогда конвективные члены в уравнении (5.2.1) не будут учитываться. В этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\
 \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \\
 \rho \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.2.3}$$

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(PW) = 0.$$

Аппроксимируя уравнения (5.2.3) в момент времени  $t^n$ , далее разрешая относительно искомых величин  $\tilde{U}_{i,j,k}^n, \tilde{V}_{i,j,k}^n, \tilde{W}_{i,j,k}^n, \tilde{E}_{i,j,k}^n$ , получаем следующие разностные уравнения для ячейки:

а)  $i + j$  - четное число:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{i,j,k}^n &= U_{i,j,k}^n - [(P_{i+2,j,k}^n - P_{i-2,j,k}^n)/(4\Delta x)]\Delta t / \rho_{i,j,k}^n, \\ \tilde{V}_{i,j,k}^n &= V_{i,j,k}^n - [(-P_{i-2,j,k}^n + 2P_{i-1,j+1/3,k}^n - P_{i,j,k}^n - P_{i,j-2/3,k}^n + 2P_{i+1,j+1/3,k}^n - P_{i+2,j,k}^n)/(2\Delta y)]\Delta t / \rho_{i,j,k}^n, \\ \tilde{W}_{i,j,k}^n &= W_{i,j,k}^n - [(P_{i,j,k+1}^n - P_{i,j,k-1}^n)/(4\Delta z)]\Delta t / \rho_{i,j,k}^n, \\ \tilde{E}_{i,j,k}^n &= E_{i,j,k}^n - \{[(PU)_{i+2,j,k}^n - (PU)_{i-2,j,k}^n]/(4\Delta x) + [-(PV)_{i-2,j,k}^n + 2(PV)_{i-1,j+1/3,k}^n - \\ &-(PV)_{i,j,k}^n - (PV)_{i-1,j-2/3,k}^n + 2(PV)_{i+1,j+1/3,k}^n - (PV)_{i+2,j,k}^n]/(2\Delta y)] + [(PW)_{i,j,k+1}^n - \\ &-(PW)_{i,j,k-1}^n]/(2\Delta z)\}\Delta t / \rho_{i,j,k}^n\end{aligned}\quad (5.2.4)$$

б)  $i + j$  - нечетное число:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{i,j+1/3,k}^n &= U_{i,j+1/3,k}^n - [(P_{i+2,j+1/3,k}^n - P_{i-2,j+1/3,k}^n)/(4\Delta x)]\Delta t / \rho_{i,j+1/3,k}^n, \\ \tilde{V}_{i,j+1/3,k}^n &= V_{i,j+1/3,k}^n - [(-P_{i-2,j+1/3,k}^n + 2P_{i-1,j,k}^n + P_{i,j+1/3,k}^n + P_{i,j+1,k}^n - 2P_{i+1,j,k}^n + \\ &+ P_{i+2,j+1/3,k}^n)/(2\Delta y)]\Delta t / \rho_{i,j+1/3,k}^n, \\ \tilde{W}_{i,j+1/3,k}^n &= W_{i,j+1/3,k}^n - [(P_{i,j+1/3,k+1}^n - 2P_{i,j+1/3,k-1}^n)/(4\Delta z)]\Delta t / \rho_{i,j+1/3,k}^n, \\ \tilde{E}_{i,j+1/3,k}^n &= E_{i,j+1/3,k}^n - \{[(PU)_{i+2,j+1/3,k}^n + (PU)_{i-2,j+1/3,k}^n]/(4\Delta x) + [(PV)_{i-2,j+1/3,k}^n - \\ &- 2(PV)_{i-1,j,k}^n + (PV)_{i,j+1/3,k}^n + (PV)_{i,j+1,k}^n - 2(PV)_{i+1,j,k}^n + (PV)_{i+2,j+1/3,k}^n]/(2\Delta y) + \\ &+ [(PW)_{i,j+1/3,k}^n - (PW)_{i,j+1/3,k-1}^n]/(2\Delta z)\}\Delta t / \rho_{i,j+1/3,k}^n\end{aligned}\quad (5.2.5)$$

## II. Лагранжев этап.

Здесь определяются потоки массы  $\Delta M^n$  за промежуток времени  $\Delta t$  через все границы пространственно-трехмерной ячейки (рис. 5.2.1, рис. 5.2.2). Для одной ячейки имеем:

а)  $i + j$  - четное число:

$$\begin{aligned}\Delta M_{i-1/2,j+1/6,k}^n &= \langle \rho \rangle_{i-1/2,j+1/6,k}^n [(\tilde{U}_{i-1,j+1/3,k}^n \Delta y - \tilde{V}_{i-1,j+1/3,k}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i,j,k}^n \Delta y - \\ &- \tilde{V}_{i,j,k}^n \Delta x)](\Delta z \Delta t) / 2, \\ \Delta M_{i,j-1/3,k}^n &= \langle \rho \rangle_{i,j-1/3,k}^n [(\tilde{V}_{i,j-2/3,k}^n + \tilde{V}_{i,j,k}^n)](\Delta x \Delta z \Delta t), \\ \Delta M_{i+1/2,j+1/6,k}^n &= \langle \rho \rangle_{i+1/2,j+1/6,k}^n [(\tilde{U}_{i,j,k}^n \Delta y + \tilde{V}_{i,j,k}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i+1,j+1/3,k}^n \Delta y - \\ &- \tilde{V}_{i+1,j+1/3,k}^n \Delta x)](\Delta z \Delta t) / 2,\end{aligned}\quad (5.2.6)$$

$$\Delta M_{i,j,k-1/2}^n = \langle \rho \rangle_{i,j,k-1/2}^n [(\tilde{W}_{i,j,k-1}^n + \tilde{W}_{i,j,k}^n)](\Delta x \Delta y \Delta t) / 2,$$

$$\Delta M_{i,j,k+1/2}^n = \langle \rho \rangle_{i,j,k+1/2}^n [(\tilde{W}_{i,j,k-1}^n + \tilde{W}_{i,j,k+1}^n)](\Delta x \Delta y \Delta t) / 2$$

б)  $i + j$  - нечетное число:

$$\Delta M_{i-1/2,j+1/6,k}^n = \langle \rho \rangle_{i-1/2,j+1/6,k}^n [(\tilde{U}_{i-1,j,k}^n \Delta y + \tilde{V}_{i-1,j,k}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i,j+1/3,k}^n \Delta y + \tilde{V}_{i,j+1/3,k}^n \Delta x)](\Delta z \Delta t) / 2,$$

$$\Delta M_{i+1/2,j+1/6,k}^n = \langle \rho \rangle_{i+1,j+1/6,k}^n [(\tilde{U}_{i,j+1/3,k}^n \Delta y + \tilde{V}_{i,j+1/3,k}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i+1,j,k}^n \Delta y + \tilde{V}_{i+1,j,k}^n \Delta x)](\Delta z \Delta t) / 2,$$

$$\Delta M_{i,j+2/3,k}^n = \langle \rho \rangle_{i,j+2/3,k}^n [\tilde{V}_{i,j+1/3,k}^n + \tilde{V}_{i,j+1,k}^n](\Delta x \Delta z \Delta t), \tag{5.2.7}$$

$$\Delta M_{i,j+1/3,k-1/2}^n = \langle \rho \rangle_{i,j+1/3,k-1/2}^n [\tilde{W}_{i,j+1/3,k-1}^n + \tilde{W}_{i,j+1/3,k}^n](\Delta x \Delta y \Delta t) / 2,$$

$$\Delta M_{i,j+1/3,k+1/2}^n = \langle \rho \rangle_{i,j+1/3,k+1/2}^n [\tilde{W}_{i,j+1/3,k}^n + \tilde{W}_{i,j+1/3,k+1}^n](\Delta x \Delta y \Delta t) / 2.$$

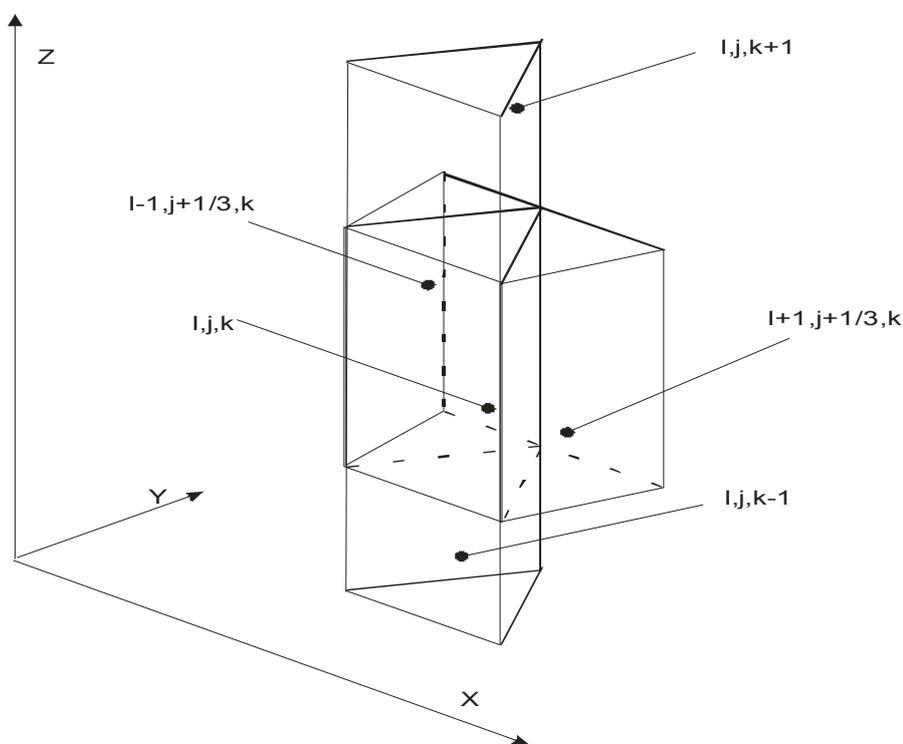


Рис. 5.2.2

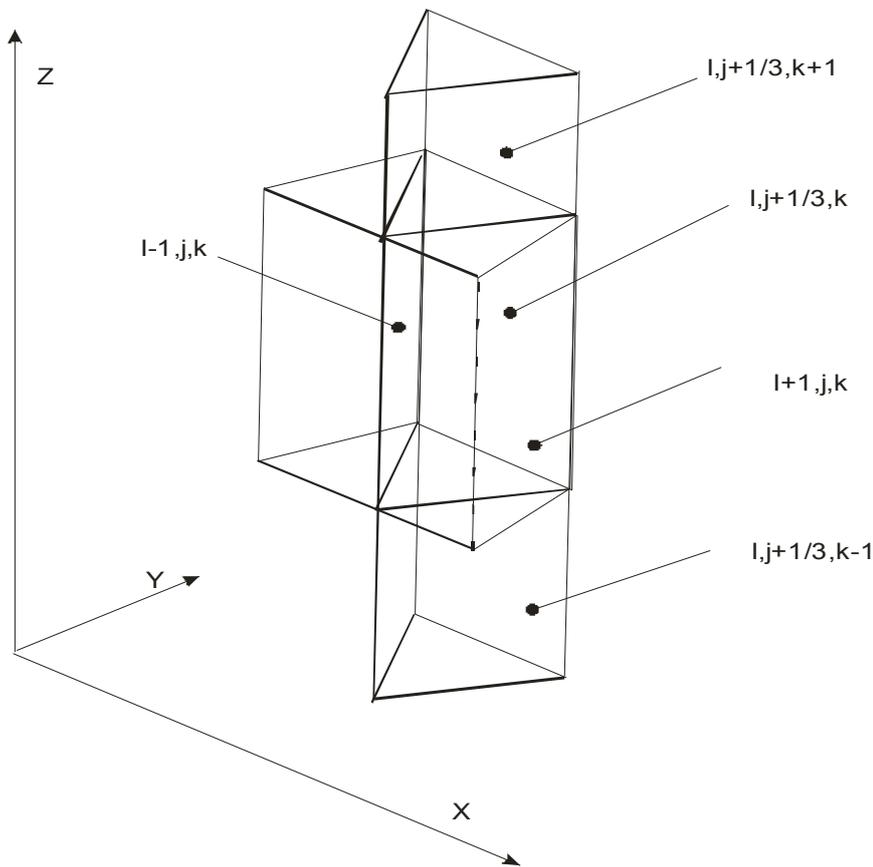


Рис. 5.2.3

### III. Заключительный этап.

Определяются окончательные поля эйлеровых параметров потока  $\rho$ ,  $X(U, V, W, E)$  и  $P$  на фиксированной сетке в момент времени  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ .

Как и в пространственно-двумерном случае, также используем функции Ю.М.Давыдова  $D_{i,j,k}^n(m)$  и занумеруем все стороны объемной ячейки  $(i, j, k)$  индексом  $m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

$$D_{i,j,k}^n(m) = \begin{cases} 1, & \text{если жидкость вытекает в ячейку } (i, j) \text{ ч/з сторону } m \\ 0, & \text{если жидкость вытекает из ячейки } (i, j) \text{ ч/з сторону } m \end{cases}$$

Тогда параметры потока  $\rho, X(U, V, E)$  для ячейки будут следующими:

а)  $i + j$  - четное число:

$$\rho_{i,j,k}^{n+1} = \rho_{i,j,k}^n + 2\{[D_{i,j,k}^n(1) - 0.5]\Delta M_{i-1/2, j+1/6, k}^n + [D_{i,j,k}^n(2) - 0.5]\Delta M_{i, j-1/3, k}^n + [D_{i,j,k}^n(3) - 0.5]\Delta M_{i+1/2, j+1/6, k}^n + [D_{i,j,k}^n(4) - 0.5]\Delta M_{i, j, k-1/2}^n + [D_{i,j,k}^n(5) - 0.5]\Delta M_{i, j, k+1/2}^n\} / (\Delta x \Delta y \Delta z),$$

$$X_{i,j,k}^{n+1} = \{\tilde{X}_{i,j,k} [\rho_{i,j,k}^n \Delta x \Delta y \Delta z - [1 - D_{i,j,k}^n(1)]\Delta M_{i-1/2, j+1/6, k}^n - [1 - D_{i,j,k}^n(2)]\Delta M_{i, j-1/3, k}^n - [1 - D_{i,j,k}^n(3)]\Delta M_{i+1/2, j+1/6, k}^n - [1 - D_{i,j,k}^n(4)]\Delta M_{i, j, k-1/2}^n - [1 - D_{i,j,k}^n(5)]\Delta M_{i, j, k+1/2}^n +$$



$$+ D_{i,j,k}^n (1) \tilde{X}_{i-1,j+1/3,k}^n \Delta M_{i-1/2,j+1/6,k}^n + D_{i,j,k}^n (2) \tilde{X}_{i,j-2/3,k}^n \cdot \Delta M_{i,j-1/3,k}^n + D_{i,j,k}^n (3) * \\ * \tilde{X}_{i+1,j+1/3,k}^n \Delta M_{i+1/2,j+1/6,k}^n + D_{i,j,k}^n (4) \tilde{X}_{i,j,k-1}^n \Delta M_{i,j,k-1/2}^n + D_{i,j,k}^n (5) \tilde{X}_{i,j-2/3,k}^n \Delta M_{i,j,k+1/2}^n ] \} / \\ / (\rho_{i,j,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z);$$

б)  $i + j$  - нечетное число:

$$\rho_{i,j+1/3,k}^{n+1} = \rho_{i,j+1/3,k}^n + 2\{[D_{i,j,k}^n (1) - 0.5] \Delta M_{i-1/2,j+1/6,k}^n + [D_{i,j,k}^n (2) - 0.5] \Delta M_{i+1/2,j-1/3,k}^n + [D_{i,j,k}^n (3) - \\ - 0.5] \Delta M_{i,j+2/3,k}^n + [D_{i,j,k}^n (4) - 0.5] \Delta M_{i,j+1/3,k-1/2}^n + [D_{i,j,k}^n (5) - 0.5] \Delta M_{i,j+1/3,k+1/2}^n\} / (\Delta x \Delta y \Delta z),$$

$$X_{i,j+1/3,k}^{n+1} = \{ \tilde{X}_{i,j+1/3,k}^n [\rho_{i,j+1/3,k}^n \Delta x \Delta y \Delta z - [1 - D_{i,j,k}^n (1)] \Delta M_{i-1/2,j+1/6,k}^n - [1 - D_{i,j,k}^n (2)] * \\ * \Delta M_{i+1/2,j+1/6,k}^n - [1 - D_{i,j,k}^n (3)] \Delta M_{i,j+2/3,k}^n ] + [1 - D_{i,j,k}^n (4)] \Delta M_{i,j+1/3,k-1/2}^n - [1 - D_{i,j,k}^n (5)] * \\ * \Delta M_{i,j+1/3,k+1/2}^n + \{ D_{i,j,k}^n (1) \tilde{X}_{i-1,j,k}^n \Delta M_{i-1/2,j+1/6,k}^n + D_{i,j,k}^n (2) \tilde{X}_{i+1,j,k}^n \Delta M_{i+1/2,j+1/6,k}^n + \\ + D_{i,j,k}^n (3) \tilde{X}_{i,j+1,k}^n \Delta M_{i,j+2/3,k}^n + D_{i,j,k}^n (4) \tilde{X}_{i,j+1/3,k-1}^n \Delta M_{i,j+1/3,k-1/2}^n + D_{i,j,k}^n (5) \tilde{X}_{i,j+1/3,k}^n * \\ * \Delta M_{i,j+1/3,k+1/2}^n ] \} / (\rho_{i,j+1/3,k}^{n+1} \Delta x \Delta y \Delta z)$$

Распределение давления в следующий момент времени  $t^{n+1}$  определяется путем перерасчета по уравнению состояния (5.2.2) для каждой ячейки эйлеровой сетки.

Начальные и граничные условия ставятся традиционным образом, в зависимости от рассматриваемой задачи. Отметим, что предложенный алгоритм может найти широкое применение при решении задач с треугольной и гексагональной симметриями.

### 5.3. Исследование разностных схем метода Давыдова для расчета течений вязкого и теплопроводного газа.

Рассмотрим следующую систему уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho U)_x &= 0, \\ (\rho U)_t + (P + \rho U^2 + Q^u)_x &= 0, \\ (\rho E)_t + [(P + \rho E)U + Q^E]_x &= 0, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

где  $\rho$  - плотность,  $U$  - скорость,  $P = P(\rho, J)$  - давление,  $E$  - удельная полная энергия,  $J = E - 0,5 \cdot U^2$  - удельная внутренняя энергия;  $Q^\varphi = Q^\varphi(\rho, U, E)$ ,  $\varphi = \{U, E\}$  - известные функции плотности, скорости и удельной полной энергии.



Для получения разностных схем воспользуемся расщеплением системы

(5.3.1) на две вспомогательные системы:

$$\rho_t = 0, \rho U_t + \chi_t P_x + \chi_U Q_x^U = 0, \rho E_t + \chi_1 (PU)_x + \chi_E Q_x^E = 0 \quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho U)_x = 0, \quad (\rho U)_t + (\rho U^2)_x + (1 - \chi_1) P_x + (1 - \chi_U) Q_x^U = 0, \\ (\rho E)_t + (\rho UE)_x + (1 - \chi_2) (PU)_x + (1 - \chi_E) Q_x^E = 0. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Для аппроксимации уравнений первого этапа (5.3.2), (5.3.3)

используем следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i^n = U_i^n - \frac{P_{i+1}^n - P_{i-1}^n \Delta t}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_i} x_i - \frac{(Q^U)_{i+1}^n - (Q^U)_{i-1}^n}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_i} \chi_U, \\ \tilde{E}_i^n = E_i^n - \chi_2 (1 - \chi_3) \frac{\Delta t}{4\Delta x \rho^n} \{ (P_{i+1}^n + P_i^n) ([U_{i+1}^n]_{x^4} + [U_{i+1}^n]_{x^5}) - \\ - (P_i^n + P_{i-1}^n) ([U_i^n]_{x^4} + [U_i^n]_{x^5}) \} - \chi_2 \chi_3 \frac{\Delta t}{2\Delta x \rho_i^n} \{ P_i^n [U_{i+1}^n]_{x^6} + \\ + P_{i+1}^n [U_i^n]_{x^7} - P_{i-1}^n [U_i^n]_{x^6} - P_i^n [U_{i-1}^n]_{x^7} \} - \frac{\Delta t x_E}{2\Delta x \rho^n} [(Q^E)_{i+1}^n - (Q^E)_{i+1}^n]. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Разностная схема второго порядка этапа запишется в виде

$$\begin{aligned} (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) \Delta x = < \Delta M(\rho U) >_{i-1/2}^n - < \Delta M(\rho U) >_{i+1/2}^n, \\ (\rho_i^{n+1} U_i^{n+1} - \rho_i^n \tilde{U}_i^n) \Delta x = -0,5 \Delta t (1 - \chi_1) (P_{i+1}^n - P_{i-1}^n) + < \Delta M(\rho U^2) >_{i-1/2}^n - < \Delta M(\rho U^2) >_{i+1/2}^n, \\ (\rho_i^{n+1} E_i^{n+1} - \rho_i^n \tilde{E}_i^n) \Delta x = -\frac{\Delta t}{4} (1 - \chi_2) (1 - \chi_8) \{ (P_{i+1}^n + P_i^n) ([U_{i+1}^n]_{x^9} + [U_i^n]_{x^{10}}) - (P_i^n + \\ + P_{i-1}^n) ([U_{i+1}^n]_{x^9} + [U_{i-1}^n]_{x^{10}}) \} - \frac{\Delta t}{2} (1 - \chi_2) \chi_8 \{ P_i^n [U_{i+1}^n]_{x^{11}} + P_{i+1}^n [U_i^n]_{x^{12}} - \\ - P_{i-1}^n [U_i^n]_{x^{11}} - P_i^n [U_{i-1}^n]_{x^{12}} \} + < \Delta M(\rho UE) >_{i-1/2}^n - < \Delta M(\rho UE) >_{i+1/2}^n. \\ (\rho_i^{n+1} U_i^{n+1} - \rho_i^n \tilde{U}_i^n) \Delta x = -0,5 \Delta t (1 - \chi_1) (P_{i+1}^n - P_{i-1}^n) + E_i^{n+1} - \rho_i^n \tilde{E}_i^n \Delta x = -\frac{\Delta t}{4} (1 - \chi_2) (1 - \chi_8) * \\ * \{ (P_{i+1}^n + P_i^n) ([U_{i+1}^n]_{x^9} + [U_i^n]_{x^{10}}) - (P_i^n + P_{i-1}^n) ([U_{i+1}^n]_{x^9} + [U_{i-1}^n]_{x^{10}}) \} - \frac{\Delta t}{2} (1 - \chi_2) \chi_8 \{ P_i^n [U_{i+1}^n]_{x^{11}} + \\ + P_{i+1}^n [U_i^n]_{x^{12}} - P_{i-1}^n [U_i^n]_{x^{11}} - P_i^n [U_{i-1}^n]_{x^{12}} \} + < \Delta M(\rho UE) >_{i-1/2}^n - < \Delta M(\rho UE) >_{i+1/2}^n. \end{aligned}$$

Потоки будем определять разностными формулами первого порядка точности:

$$< \Delta M(\rho U) >_{i+1/2}^n = < \rho >_{i+1/2}^n < \varphi >_{i+1/2}^n \Delta t, \quad \varphi = \{U, E\},$$

$$\text{где } < U >_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} ([U_i^n]_{z^U} + [U_{i+1}^n]_{x^U}).$$



Если  $\langle U \rangle_{i+1/2}^n \geq 0$ , то  $\langle \rho \rangle_{i+1}^n = \rho_i^n$ ,  $\langle \varphi \rangle_{i+1/2}^n = \langle \varphi \rangle_{i+1/2}^n = [\varphi_i^n]_{x^4}$

Если  $\langle U \rangle_{i+1/2}^n < 0$ , то  $\langle \rho \rangle_{i+1}^n$ ,  $\langle \varphi \rangle_{i+1/2}^n = [\varphi_{i+1}^n]_{x^4}$

Запишем гиперболическую форму второго дифференциального приближения вышеописанной разностной схемы:

$$\begin{aligned}
 \rho_i + (\rho U)_x &= \frac{\Delta x}{2} \left\{ (U \rho_x)_x - \frac{1}{2} (U \rho)_x - \frac{1}{2} (U_x \rho_x)_x \Delta x - \frac{1}{3} (\rho U_{xxx} + U \rho_{xxx}) \Delta x \right\} - \Delta t \left\{ \chi^U [\chi_1 P_{xx} - \right. \\
 &- \frac{1}{2} \chi_1 (\rho_x P_x)_x \Delta x + \chi_U (Q^U)_{xx} - \frac{\chi_U}{2} \left( \frac{\rho_x (Q^U)_x}{\rho} \right)_x \Delta x \left. - \frac{1}{2} \rho_{tt} - \frac{1}{6} \rho_{ttt} \Delta t \right\}, \\
 (\rho U)_t + (P + \rho U^2 + Q^U)_x &= \frac{\Delta x}{2} \left\{ |U| (\rho U)_x - \Delta x^2 \left\{ \frac{3}{4} U (\rho_x U_x)_x + \frac{1}{2} (\rho U_x^2)_x + \frac{1}{6} (U^2 \rho_{xx} + \right. \right. \\
 &+ 2 \rho U U_{xxx} - 3 \rho U_x U_{xx} + P_{xxx} + (Q^U)_{xxx} \left. \right\} + \Delta t \left\{ \chi_1 \chi^U (2 P_x U)_x + \chi_U \chi^U (2 U (Q^U)_x - \right. \\
 &- \frac{1}{2} (\rho U)_{tt} - \frac{\Delta t \Delta x}{2} \left\{ \chi_1 \chi^U \left[ (U_x P_x)_x + (U P_{xx})_x + \left( \frac{\rho_x U P_x}{\rho} \right)_x \right] + \chi_U \chi^U * \right. \\
 &* \left[ (U_x (Q^U)_x)_x + (U (Q^U)_{xx})_x + \left( \frac{\rho_x U (Q^U)_x}{\rho} \right)_x \right] - \Delta t^2 \left\{ (\chi_1 \chi^U)^2 \frac{(\rho P_x^2)_x}{\rho} + \right. \\
 &+ (\chi_U \chi^U)^2 \frac{(\rho (Q^U)_x^2)_x}{\rho^2} - \\
 &- \frac{(\chi_U \chi^U)^2 (\rho (Q^U)_x (Q^U)_{xx})_x}{2 \rho^2} \Delta x - \frac{(\chi_1 \chi^U)^2 (\rho P_x P_{xx})_x}{2 \rho^2} \Delta x - \\
 &\chi_1 \chi_U (\chi^U)^2 \left[ \frac{2(\rho P_x (Q^U)_x)_x}{\rho^2} - \frac{1}{2} \frac{(\rho P_{xx} (Q^U)_x)_x}{\rho^2} \Delta x - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{2} \frac{(\rho P_x (Q^U)_{zz})_x}{\rho^2} \Delta x \right] + \frac{1}{6} (\rho U)_{ttt} \left. \right\}, \\
 (\rho E)_t + [(P + \rho E)U + Q^E]_x &= \frac{\chi_1}{2} I \Delta t \left( \frac{P P_x}{\rho} \right)_x + \frac{\chi_U}{2} I \Delta t \left( \frac{P Q_x^U}{\rho} \right)_x + \\
 &+ \frac{1}{2} (U (\rho E)_x)_x \Delta x + \Delta t \left[ \chi^U E (\chi_1 P_x + \chi_U Q_x^U) \right]_x + \\
 &+ \Delta t \left[ \chi^E U (\chi_2 (P U)_z + \chi_E Q_x^E) \right]_x - \frac{1}{2} (\rho E)_{tt} \Delta t + \\
 &+ \Delta t \Delta x \left[ - \frac{\chi_1 \chi^U}{2} (E_x P_x)_x - \frac{\chi_U \chi^U}{2} (E_x Q_x^U)_x + \right.
 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

$$\begin{aligned}
& + \chi_2 \chi^E \left\{ -\frac{1}{2} U_x (UP)_{xx} - \frac{1}{2} U (UP_{xxx} + PU_{xxx}) - \frac{3}{2} U (U_x P_x)_x \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \chi_E \chi^E U Q_{xxx} + \frac{1}{4} m \left\{ \chi_1 \left( \left( \frac{PP_{xx}}{\rho} \right)_x + \frac{\rho_x^2}{\rho^2} \left( \frac{PP_x^2}{\rho_x} \right)_x \right) + \chi_U \left( \left( \frac{PQ_{xx}^U}{\rho} \right)_x + \frac{\rho_x^2}{\rho^2} \left( \frac{PQ_x^U}{\rho_x} \right)_x \right) \right\} - \\
& - \frac{1}{4} n \left\{ \chi_1 \left( \frac{P_x^2}{\rho_x} \right) + \chi_U \left( \frac{P_x Q_x^U}{\rho} \right) \right\} - \Delta x^2 \left[ \frac{(\rho_x U E_x)_x}{2} + \frac{\rho (U_x E_x)_x + E (U_x \rho_x)_x}{4} + \right. \\
& + \frac{1}{6} ((P + \rho E) U_{xxx} + U E \rho_{xxx} + \rho U E_{xxx} + U P_{xxx} + Q_{xxx}^E) + \\
& + \frac{1}{4} \{ \chi_2 (1 - \chi_3) + (1 - \chi_2) (1 - \chi_8) \} (P_x U_x)_x \left. \right] - \\
& - \frac{\chi_2 \chi^E}{2} k \left\{ \left[ \chi_1 \left\{ U_x \left( \frac{PP_x}{\rho} \right)_x + U \left( \frac{PP_x}{\rho} \right)_{xx} + 2U \frac{\rho_x}{\rho} \left( \frac{PP_x}{\rho} \right)_x \right\} + \right. \right. \\
& + \chi_U \left. \left\{ U_x \left( \frac{PQ_x^U}{\rho} \right)_x + U \left( \frac{PQ_x^U}{\rho} \right)_{xx} + 2U \frac{\rho_x}{\rho} \left( \frac{PQ_x^U}{\rho} \right)_x \right\} \right] - \\
& - \frac{\chi_2 \chi^U \chi^E}{\rho^2} \Delta t^2 \left\{ \left[ \chi_1 (\rho P_x Q_x^U) \right]_x - \frac{1}{2} [\rho P_x Q_{xx}^E]_x \Delta x + \right. \\
& \left. + \chi_U ([\rho Q_x^U Q_x^E]_x - \frac{1}{2} [\rho Q_x^U Q_x^E] \Delta x) \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
1 & = \chi_2 (1 - \chi_3) (\chi_4 + \chi_5) + (1 - \chi_2) (1 - \chi_9) (\chi_9 + \chi_{10}) + \\
& \chi_2 \chi_3 (\chi_4 + \chi_7) + (1 - \chi_2) \chi_8 (\chi_{11} + \chi_{12}), \\
k & = (1 - \chi_3) (\chi_4 + \chi_5) + \chi_3 (\chi_6 + \chi_7), \\
m & = (1 - \chi_2) (1 - \chi_8) (\chi_9 + \chi_{10}) + \chi_2 (1 - \chi_3) (\chi_4 - \chi_5).
\end{aligned}$$

При  $\chi_1 = \chi_2 = 1$ ,  $\chi_3 = \chi_4 = \chi_5 = 0$ ,  $\chi^U = \chi^E = 1$  (при этом  $1 = k = m = 0$ )

получаем гиперболическую форму второго дифференциального приближения разностной схемы метода Ю.М.Давыдова с  $\Delta t$  первого порядка точности. Для разностной схемы метода FLIC без учета искусственной вязкости имеем  $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = 1$ ,  $\chi_6 = \chi_7 = 0,5$ ,  $\chi^U = \chi^E = 1$ .

Из второго дифференциального приближения (5.3.6) видно влияние расщепления на  $\Gamma$ -форму.

Использование  $\tilde{U}$  на лангранжевом этапе привело к появлению членов



$$\begin{aligned} & \Delta t \chi^U \chi_U \left[ Q_{xx}^U - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_x Q_x^U}{\rho} \right)_x \Delta x \right], \\ & \Delta t \chi^U \chi_U \left[ 2UQ_x^U + \Delta x ((U_x Q_x^U)_x + (UQ_{xx}^U)_x) + \frac{(\rho_x U Q_x^U)_x}{\rho} \right], \\ & \Delta t \chi^U \chi_U \left[ (EQ_x^U)_x - \Delta x \frac{1}{2} (EQ_x^U)_x \right] \end{aligned}$$

В уравнениях неразрывности, импульса, энергии соответственно.

Член  $\Delta t \chi^E \chi_E \left[ (UQ_x^E)_x - \frac{1}{2} \Delta x U Q_{xxx}^E \right]$  возник из-за использования  $\tilde{E}$  при

расчете потоков энергии через границы ячеек на лангранжевом этапе.

В случае  $Q^U = Q^U(\rho, U, E)$ ,  $Q^E = Q^E(\rho, U, E)$  матрица аппроксимационной вязкости имеет вид  $C = a + \Delta a + \Delta C + D$ , где  $a$  представляет собой матрицу аппроксимационной вязкости метода крупных частиц в случае одномерного движения невязкого, нетеплопроводного газа без учета ряда физических эффектов (излучения и т.д.), которые могут оказывать большое влияние на течение. Элементы матрицы аппроксимационной вязкости имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0,5U\Delta x - 0,25U_x\Delta x^2 + 0,5\Delta t(-P_\rho - U^2) + \chi_1\chi^U\Delta tP_1, \\ a_{12} &= -0,25\rho_x\Delta x^2 + 0,5\Delta t(UP_1 - 2\rho U) - \chi_1\chi^U\Delta tP_1, \\ a_{13} &= 0,5\Delta t(-P_y) = \chi_1\chi^U P_1, \\ a_{21} &= 0,5U^2\Delta x - 0,75UU_x\Delta x^2 - 0,5P_{\rho x}\Delta x^2 + \\ &+ 0,5\Delta t(-3UP_\rho - U^3) + 2\chi_1\chi^U\Delta tP_\rho, \\ a_{22} &= 0,5\rho U\Delta x - 0,5\rho U_x\Delta x^2 - 0,75U\rho_x\Delta x^2 + \\ &+ 0,5(UP_{1x} + P_1U_x)\Delta x^2 + 0,5\Delta t(-3\rho U^2 - \rho P_\rho - \\ &- PP_1/\rho + 3P_1U^2) - 2\chi_1\chi^U\Delta tU^2P_1, \\ a_{23} &= -0,5P_{1x}\Delta x^2 + 0,5\Delta t(-3UP_1) + 2\chi_1\chi^U\Delta tUP_1, \\ a_{31} &= 0,5EU\Delta x - 0,5UE_x\Delta x^2 - 0,25EU_x\Delta x^2 - \\ &- 0,25P_\rho U_x\Delta x^2 - 0,5UP_{\rho x}\Delta x^2 + 0,5\Delta t \left[ -P_1 \left( 2U^2 + E + \frac{P}{\rho} \right) - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -EU^2] + \Delta t(\chi_1 \chi^U E + \chi_2 \chi^E U^2)P_\rho, \\
a_{32} = & -0,25(\rho E)_x \Delta x^2 + 0,75UP_1 U_x \Delta x^2 - 0,25P_x \Delta x^2 + \\
& + 0,5U^2 P_{1x} \Delta x^2 + 0,5\Delta t[-2UP - 2\rho UE + 2U^3 P_1 + UEP_1 - \\
& - \rho UP_\rho] - \Delta t(\chi_1 \chi^U E + \chi_2 \chi^E U^2)P_1, \\
a_{33} = & 0,5\rho U \Delta x - 0,25\rho U_x \Delta x^2 - 0,5U\rho_x \Delta x^2 - 0,25P_1 U_x \Delta x^2 - \\
& - 0,5UP_{1x} \Delta x^2 + 0,5\Delta t[-\rho U^2 - 2U^2 P_1 - P_1 E - PP_1 / \rho] + \\
& + \Delta t(\chi_1 \chi^U E + \chi_2 \chi^E U^2)P_1,
\end{aligned}$$

а элементы матрицы  $\Delta a$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta \delta_{ij} &= 0 \quad i=1,2, \quad j=1,2,3, \\
\Delta a_{31} &= -0,25 P \rho U_x \Delta x^2 n_1 + 0,5\Delta t \chi_1 P_\rho P / \rho, \\
\Delta a_{32} &= -0,25(UP_1 U_x - P_x) \Delta x^2 n_1 - 0,5\Delta t \chi_1 UP_1 P / \rho, \\
\Delta a_{33} &= -0,25P_1 U_x \Delta x^2 n_1 + 0,5\Delta t \chi_1 IP_1 P / \rho, \\
n_1 &= \chi_2(1 - \chi_3) + (1 - \chi_2)(1 - \chi_8) - 1.
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Элементы матрицы  $\Delta C$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta P_{11} &= \Delta t \chi_U \chi^U Q_\rho^U, \quad \Delta P_{12} = \Delta t \chi_U \chi^U Q_U^U, \quad \Delta P_{13} = \Delta t \chi_U \chi^U Q_E^U, \\
\Delta C_{21} &= 2UQ_\rho^U \Delta t \chi_U \chi^U - 0,5\Delta x^2 (Q_{\rho\rho}^U \rho_x + Q_{\rho U}^U U_x + Q_{\rho E}^U E_x), \\
\Delta C_{22} &= 2UQ_U^U \Delta t \chi_U \chi^U - 0,5\Delta x^2 (Q_{\rho U}^U \rho_x + Q_{UU}^U U_x + Q_{EU}^U E_x), \\
\Delta C_{23} &= 2UQ_E^U \Delta t \chi_U \chi^U - 0,5\Delta x^2 (Q_{\rho E}^U \rho_x + Q_{UE}^U U_x + Q_{EE}^U E_x), \\
\Delta C_{31} &= EQ_\rho^U \Delta t \chi_U \chi^U = UQ_\rho^E \Delta t \chi_E \chi^E - 0,5\Delta x^2 (Q_{\rho\rho}^E \rho_x + Q_{\rho U}^E U_x + Q_{\rho E}^E E_x), \\
\Delta C_{32} &= EQ_U^U \Delta t \chi_U \chi^U = UQ_U^E \Delta t \chi_E \chi^E - 0,5\Delta x^2 (Q_{\rho U}^E \rho_x + Q_{UU}^E U_x + Q_{EU}^E E_x), \\
\Delta C_{33} &= EQ_E^U \Delta t \chi_U \chi^U = UQ_E^E \Delta t \chi_E \chi^E - 0,5\Delta x^2 (Q_{\rho E}^E \rho_x + Q_{UE}^E U_x + Q_{EE}^E E_x),
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Элементы матрицы  $D$ , являющиеся членами порядка  $\Delta t$ , появляются при  $Q^U \neq 0$ ,  $Q^E \neq 0$  при замене  $\varphi_u$  через  $\psi_{xx}$ , где  $\varphi = \{\rho, \rho U, \rho E\}$ ,  $\psi = \{\rho, U, E\}$ . В качестве примера можно рассмотреть одномерные уравнения Навье-Стокса в случае плоской симметрии для вязкой, теплопроводной жидкости. В этом



случае  $Q^U = -\mu U U_x - Q T_x$ , где  $T = T(\rho, I)$  - температура газа,  $\mu, Q$  - коэффициенты вязкости и теплопроводности.

При использовании метода дифференциальных приближений для исследования различных свойств нелинейных разностных схем в качестве критерия устойчивости используется условия неотрицательности диагональных элементов матрицы аппроксимационной вязкости.

Рассматривая второе дифференциальное приближение (5.3.6), аналогичным образом можно определить элементы матрицы аппроксимационной дисперсии и исследовать дисперсионные свойства разностных схем.

#### **5.4. Применение системы REDUCE-3 в исследовании разностных схем метода Давыдова применительно к задачам инерционной фильтрации.**

Одним из мощных методов современного вычислительного эксперимента является метод Давыдова, с помощью которого успешно решаются сложные задачи механики сплошных и сыпучих сред.

Традиционным уравнением подземной гидромеханики, характеризующим процесс фильтрации жидкости, является линейный закон А. Дарси и его обобщения для турбулентного режима. Как показала практика, совпадения данных опыта и численных расчетов, где в качестве динамического уравнения принимался закон А. Дарси, наблюдались только при медленных изменениях давления во времени.

Фундаментальные исследования в области нефтегазовой подземной гидромеханики выполнены академиком С.А.Христиановичем. Предложенная им модель фильтрации обобщает закон А. Дарси на случай учета сил инерции, больших градиентов пластового давления во времени, больших градиентов пористости.



Математическая модель фильтрации однородной жидкости в пласте  
использовании модели С.А. Христиановича в пласте с переменной  
эффективной толщиной  $h(x, y)$  состоит из уравнения неразрывности, уравнения  
движения С.А. Христиановича и баротропных уравнений состояния для  
жидкости и пористой среды:

$$\begin{aligned} h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho m W h) &= 0, \\ \rho \frac{\partial W}{\partial t} + \varepsilon^2 (\nabla P + \beta P \nabla \ln m) + \frac{\mu m}{\lambda} &= 0, \\ \rho &= \rho(P), m = m(P), \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

где  $W = (u, \vartheta)$ - вектор гидродинамической скорости жидкости ,  $\rho$  - плотность,  
 $P$  - пластовое давление,  $m$  - пористость,  $\beta$  - безразмерная постоянная, величина  
которой зависит от физических параметров пористой среды. Величины  $\varepsilon^2, \lambda$  в  
уравнении С. А. Христиановича связаны с коэффициентом проницаемости  $k$  в  
модели А. Дарси следующим образом:

$$k = \lambda \cdot \varepsilon^2. \quad (5.4.2)$$

Следуя работе [4], приведем алгоритм метода Давыдова для моделирования  
фильтрационного течения жидкости в пласте при использовании модельного  
уравнения С. А. Христиановича. Алгоритм метода Давыдова для расщепления  
системы (1) состоит из трех этапов.

#### 1. Эйлеров этап.

На этом этапе на каждой расчетной ячейки  $(i, j)$  пренебрегаем всеми  
эффектами связанными с ее перемещениями (отсутствует поток массы через  
границы ячейки). Тогда из уравнения неразрывности убирается конвективный  
член, а жидкость предполагается заторможенной. Исходная система уравнений  
сводится, таким образом, к единственному соотношению- уравнению  
Христиановича. Второе уравнение системы (2) для пространственно-  
двумерного случая фильтрации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \frac{P}{m} \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{\mu m}{\lambda} u &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \beta \frac{P}{m} \frac{\partial m}{\partial y} \right) + \frac{\mu m}{\lambda} v &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Аппроксимируя (5.4.3) в момент времени  $t^n$ , получим следующие разностные соотношения для ячейки  $(i, j)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j}^n &= u_{i,j}^n - \Delta t * \left( u_{i,j}^n \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \right) - \\ &- \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[ \varepsilon^2 \frac{P_{i+\frac{1}{2},j}^n - P_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \beta \left( \frac{P}{m} \right)_{i,j}^n \frac{m_{i,j+\frac{1}{2}}^n - m_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n u_{i,j}^n \right], \\ \tilde{g}_{i,j}^n &= g_{i,j}^n - \Delta t * \left( u_{i,j}^n \frac{g_{i+\frac{1}{2},j}^n - g_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{g_{i,j+\frac{1}{2}}^n - g_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \right) - \\ &- \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[ \varepsilon^2 \frac{P_{i,j+\frac{1}{2}}^n - P_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + \beta \left( \frac{P}{m} \right)_{i,j}^n \frac{m_{i,j+\frac{1}{2}}^n - m_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n g_{i,j}^n \right], \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

где величины с дробными индексами относятся к границам ячейки и равны полусуммам значений в смежных ячейках, например для горизонтальной составляющей скорости имеем

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{2}.$$

Таким образом, на первом этапе, в предположении заторможенности поля плотности, по известному на слое  $t = t^n$  распределению гидродинамических величин вычисляются промежуточные значения  $\tilde{u}, \tilde{g}$  для центров крупных частиц (эйлеровых ячеек).

## 2. Лагранжев этап.

На данном этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Здесь находятся потоки массы  $\Delta M^n$  через границы эйлеровых ячеек за время  $\Delta t$ .



При этом предполагается, что вся масса жидкости переносится только за нормальной к границе ячейки составляющей скорости. Уравнение неразрывности системы (5.4.1) в разностной форме можно записать следующим образом (в предположении, что поток жидкости через ячейку  $(i, j)$  направлен слева направо и снизу вверх):

$$(mhp)_{i,j}^{n+1} \Delta x \Delta y = (mhp)_{i,j}^n \Delta x \Delta y + \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + 4\Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n. \quad (5.4.5)$$

Формулы для нахождения потока масс  $\Delta M^n$  имеют, например, для правой границы  $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$  ячейки  $(i, j)$  следующий вид:

$$\Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n = \langle \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle m_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle h_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \Delta y \Delta t. \quad (5.4.6)$$

Знак  $\langle \rangle$  означает значения физических величин на границе ячейки. Выбор этих величин имеет важное значение, так как сильно влияет на устойчивость и точность вычислений.

### 3. Заключительный этап.

На данном этапе происходит перераспределение массы жидкости по эйлеровым ячейкам, и определяются поля давления, и плотности в новый момент времени. Используя разностный аналог уравнения неразрывности (5.4.1), получаем значение плотности для нового временного слоя  $t = t^{n+1}$ :

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x \Delta y (mh)_{i,j}^n}. \quad (5.4.7)$$

Баротропное уравнение состояния  $\rho = \rho(P)$  позволяет вычислить новое значение давления в ячейке:

$$P_{i,j}^{n+1} = P(\rho_{i,j}^{n+1}),$$

где  $P = P(\rho)$  - функция обратная к  $\rho = \rho(P)$ . В конце заключительного этапа вычислений полагаем  $u_{i,j}^n = \tilde{u}_{i,j}^n$ .  $g_{i,j}^n = \tilde{g}_{i,j}^n$ .



Вычислительный цикл, таким образом, закончен. В дальнейшем процедура (эйлеров, лагранжев и заключительный этап метода Давыдова) повторяется по порядку следования этапов для следующего момента времени  $t = t^{n+2}$  и т.д.

Одной из актуальных проблем современного численного моделирования является исследование нелинейных свойств разностных схем (аппроксимации, устойчивости, аппроксимационной вязкости, дисперсии, бивязкости, бидисперсии и т.д.).

Для исследования нелинейных разностных схем метода Давыдова успешно применяется мощный аппарат метода дифференциальных приближений, примененный развитый автором метода численного моделирования Ю. М. Давыдовым.

Математический аппарат метода дифференциальных приближений изложен в [48 и др.]. Дифференциальное приближение занимает промежуточное положение между исходным дифференциальным уравнением и аппроксимирующей его разностной схемой. Дифференциальное приближение имеет структуру дифференциального уравнения, но его коэффициенты зависят от параметров рассматриваемой схемы. Таким образом, нулевое дифференциальное приближение более высоких дифференциальных приближений зависят от свойств разностной схемы. Дифференциальная структура приближения облегчает аналитические исследования свойств разностной схемы (особенно вопросов устойчивости, образования диссипативного механизма и дисперсии).

Вычисление дифференциальных приближений разностных схем требует проведения сложных, громоздких математических выкладок [48 и др.]. Поэтому в целях автоматизации вычислений на ЭВМ в данной работе была использована система аналитических вычислений Reduce-3.

Для вычисления на ЭВМ дифференциальных приближений разностных схем будем рассматривать выражения для потока масс через границы ячеек

$$\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n, \Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n, \Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n, \Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n,$$

которое определяются следующим образом:

$$\Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n = \langle \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle m_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle h_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \Delta y \Delta t. \quad (5.4.7,а)$$

$$\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n = \langle \rho_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle m_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle h_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \Delta y \Delta t. \quad (5.4.7,б)$$

$$\Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \langle \rho_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \langle \tilde{g}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \langle m_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \langle h_{i,j-\frac{1}{2}}^n \rangle \Delta y \Delta t. \quad (5.4.7,в)$$

$$\Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \langle \rho_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \langle \tilde{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \langle m_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \langle h_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \Delta y \Delta t. \quad (5.4.7,г)$$

Будем использовать формулу аппроксимации для промежуточных значений скоростей  $\tilde{u}_{i,j}^n, \tilde{g}_{i,j}^n$ .

$$\text{Определяем поток массы } \Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n.$$

Рассмотрим произведение  $\langle \rho_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle$  на левой границе ячейки  $(i, j)$ .

Подставляя соответствующие выражения, получаем:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle &= \frac{1}{2} \rho_{i-1}^n \left\{ u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n - \Delta t \left( u_{i-1,j}^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-2,j}^n}{2\Delta y} + \right. \right. \\ &+ u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + g_{i-1,j}^n \frac{g_{i-1,j+1}^n - g_{i-1,j-1}^n}{2\Delta y} + g_{i,j}^n \frac{g_{i,j+1}^n - g_{i-1,j}^n}{2\Delta y} \left. \right\} - \\ &- \frac{1}{2} \Delta t \left[ \varepsilon^2 \left( \frac{P_{i,j}^n - P_{i-2,j}^n}{2\Delta x} + \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \beta \left( \frac{P}{m} \right)_{i-1,j}^n \frac{m_{i,j}^n - m_{i-2,j}^n}{2\Delta x} + \right. \right. \\ &+ \left. \left( \frac{P}{m} \right)_{i,j}^n \frac{m_{i+1,j}^n - m_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i-1,j}^n u_{i-1,j}^n + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n u_{i,j}^n \right] + \frac{1}{2} \Delta t \Delta x * \\ &* \left[ \varepsilon^2 \left( \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\beta} \left( \frac{P}{m} \right)_{i,j}^n \frac{m_{i+1,j}^n - m_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n u_{i,j}^n \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

$$\text{Здесь } \frac{\rho_{i-1}}{\rho} = \frac{\rho - \rho_x \Delta x + O(\Delta x^2)}{\rho} = 1 - \frac{\rho_x}{\rho} \Delta x + O(\Delta x^2).$$



Разностные формулы для произведения пористости среды эффективную толщину пласта для потока жидкости, втекающей в ячейку  $(i, j)$  через границу  $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$  в момент времени  $t^n$ , определяются следующим выражением:

$$\langle m_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle h_{i-\frac{1}{2},j}^n \rangle = \frac{1}{4} (m_{i-1,j}^n m_{i,j}^n) (h_{i-1,j}^n h_{i,j}^n). \quad (5.4.9)$$

Отсюда, если учесть выражения (5.4.8) и (5.4.9), то согласно (5.4.7,б) можно определить поток массы жидкости, втекающей в ячейку  $(i, j)$ .

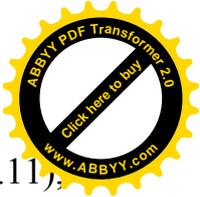
Аналогичным образом рассмотрим поток массы жидкости, вытекающей из ячейки  $(i, j)$  через границу  $\left(i + \frac{1}{2}, j\right)$  в момент времени  $t^n$ .

Произведение плотности на промежуточное значение скорости жидкости, вытекающей из ячейки  $(i, j)$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \rho_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle = & \frac{1}{2} \rho_{i,j-1}^n \left\{ u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n - \Delta t (u_{i+1,j}^n \frac{u_{i+2,j}^n - u_{i,j}^n}{2\Delta x} + \right. \\ & + g_{i+1,j}^n \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{2\Delta y} + u_{i,j}^n \frac{g_{i+1,j}^n - g_{i-1,j-1}^n}{2\Delta x} + g_{i,j}^n \frac{g_{i,j+1}^n - g_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \Delta t \left[ \varepsilon^2 \left( \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{P_{i+2,j}^n - P_{i,j}^n}{2\Delta x} + \beta \left( \frac{P}{m} \right)_{i,j}^n \frac{m_{i+1,j}^n - m_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \right. \right. \\ & + \left. \left. \left( \frac{P}{m} \right)_{i+1,j}^n \frac{m_{i+2,j}^n - m_{i,j}^n}{2\Delta x} \right) \right] + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n u_{i+1,j}^n \left. \right] + \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \frac{\rho_x}{\rho} * \\ & * \left[ \varepsilon^2 \left( \frac{P_{i+2,j}^n - P_{i,j}^n}{2\Delta x} + \beta \left( \frac{P}{m} \right)_{i+1,j}^n \frac{m_{i+2,j}^n - m_{i,j}^n}{2\Delta x} + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

$$\text{Здесь } \frac{\rho_{i,j}^n}{\rho_{i+1,j}^n} = \frac{\rho}{\rho + \rho_x \Delta x + O(\Delta x^2)} = 1 - \frac{\rho_x}{\rho} \Delta x + O(\Delta x^2), \quad (5.4.11)$$

$$\langle m_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle \langle h_{i+\frac{1}{2},j}^n \rangle = \frac{1}{4} (m_{i,j}^n + m_{i+1,j}^n) (h_{i,j}^n + h_{i+1,j}^n).$$



Принимая во внимание разностные выражения (5.4.10) и (5.4.11),  
основе формулы для вычисления потока жидкости (5.4.7,а) можем определить  
 $\Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j}$ .

Теперь рассмотрим поток жидкости через ячейку  $(i, j)$ , направленный  
снизу вверх.

Рассмотрим поток массы жидкости  $\Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}}$ , вытекающей в ячейку  $(i, j)$   
через границу  $(i, j - \frac{1}{2})$ .

По аналогии с рассмотренными выше случаями имеем:

$$\begin{aligned}
 \langle \rho^n_{i,j-\frac{1}{2}} \rangle \langle \tilde{g}^n_{i,j-\frac{1}{2}} \rangle &= \frac{1}{2} \rho^n_{i,j-1} \left\{ g^n_{i,j} + g^n_{i,j} - \Delta t (u^n_{i,j} \frac{g^n_{i+1,j} - g^n_{i-1,j}}{2\Delta x} + \right. \\
 &+ g^n_{i,j} \frac{g^n_{i,j+1} - g^n_{i,j-1}}{2\Delta y} + u^n_{i,j-1} \frac{g^n_{i+1,j-1} - g^n_{i+1,j-1}}{2\Delta x} + g^n_{i,j-1} \frac{g^n_{i,j} - g^n_{i,j-2}}{2\Delta y} \left. \right\} - \\
 &- \frac{1}{2} \Delta t \left[ \varepsilon^2 \left( \frac{P^n_{i,j} - P^n_{i,j-2}}{2\Delta y} + \frac{P^n_{i,j+1} - P^n_{i,j-1}}{2\Delta y} + \beta \left( \frac{P}{m} \right)^n_{i,j-1} \frac{m^n_{i,j} - m^n_{i,j-2}}{2\Delta y} + \right. \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{P}{m} \right)^n_{i,j} \frac{m^n_{i,j+1} - m^n_{i,j-1}}{2\Delta y} + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)^n_{i,j-1} g^n_{i,j-1} + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)^n_{i,j} g^n_{i,j} \right] \frac{\rho_x}{2\rho} \Delta t \Delta y * \\
 &* \left[ \varepsilon^2 \left( \frac{P^n_{i,j+1} - P^n_{i,j-1}}{2\Delta y} + \beta \left( \frac{P}{m} \right)^n_{i,j} \frac{m^n_{i,j+1} - m^n_{i,j-1}}{2\Delta y} + \left( \frac{\mu m}{\lambda} \right)^n_{i,j} g^n_{i,j} \right], \right. \quad (5.4.12)
 \end{aligned}$$

где  $\langle \rho^n_{i,j-\frac{1}{2}} \rangle = \rho^n_{i,j-1}$ .

$$\langle m^n_{i,j-\frac{1}{2}} \rangle \langle h^n_{i,j-\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{4} (m^n_{i,j} + m^n_{i,j-1}) (h^n_{i,j} + h^n_{i,j-1}). \quad (5.4.13)$$

Подставляя формулы (5.4.12), (5.4.13) в (5.4.7,в), можно вычислить поток  
массы жидкости, идущей снизу вверх и вытекающей в ячейку  $(i, j)$  через  
границу  $(i, j - \frac{1}{2})$ .



В случае потока, вытекающего из рассматриваемой ячейки  $(i, j)_{-1, -1}$  границу  $(i, j - \frac{1}{2})$ , имеем следующее:

$$\begin{aligned}
 \langle \rho_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \langle \tilde{g}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle = & \frac{1}{2} \rho_{i,j}^n \{ g_{i,j+1}^n + g_{i,j}^n - \Delta t (u_{i,j+1}^n \frac{g_{i+1,j+1}^n - g_{i-1,j+1}^n}{2\Delta x} + \\
 & + u_{i,j}^n \frac{g_{i+1,j}^n - g_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + g_{i,j+1}^n \frac{g_{i,j+2}^n - g_{i,j}^n}{2\Delta x} + g_{i,j}^n \frac{g_{i,j+1}^n - g_{i,j-1}^n}{2\Delta y}) \} - \\
 & - \frac{1}{2} \Delta t [ \varepsilon^2 ( \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \beta ( (\frac{P}{m})_{i,j+1}^n \frac{m_{i,j+2}^n - m_{i,j}^n}{2\Delta y} + \\
 & + (\frac{P}{m})_{i,j}^n \frac{m_{i,j+1}^n - m_{i,j-1}^n}{2\Delta y} ) ) + (\frac{\mu m}{\lambda})_{i,j+1}^n g_{i,j+1}^n + (\frac{\mu m}{\lambda})_{i,j}^n g_{i,j}^n ] + \frac{1}{2} \Delta t \Delta y \rho_y * \\
 & * [ \varepsilon^2 ( \frac{P_{i,j+2}^n - P_{i,j}^n}{2\Delta y} + \beta ( \frac{P}{m} )_{i,j+1}^n \frac{m_{i,j+2}^n - m_{i,j}^n}{2\Delta y} ) + (\frac{\mu m}{\lambda})_{i,j+1}^n g_{i,j+1}^n ],
 \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

где  $\langle \rho_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle = \rho_{i,j}^n$ ,

$$\langle m_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle \langle h_{i,j+\frac{1}{2}}^n \rangle = \frac{1}{4} (m_{i,j}^n + m_{i,j+1}^n) (h_{i,j}^n + h_{i,j+1}^n). \quad (5.4.15)$$

Учитывая разностные соотношения (5.4.14) и (5.4.15), согласно (5.4.7, г) можно вычислить дифференциальные приближения для потока массы  $\Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ .

Таким образом, для вычисления потока массы жидкости через границы эйлеровых ячеек установлены соотношения  $\Delta M_{i-\frac{1}{2},j}^n$ ,  $\Delta M_{i+\frac{1}{2},j}^n$ ,  $\Delta M_{i,j-\frac{1}{2}}^n$ ,

$\Delta M_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ . Для вычисления дифференциальных приближений разностных схем

необходимо разложить в ряд Тейлора по сеточным параметрам  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  гидродинамические величины  $P$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $g$  и параметры пласта  $m(x, y, t)$ ,  $h(x, y)$ .

Алгоритм символьного вычислительного процесса при использовании мощной системы аналитических вычислений Reduce-3 выглядит следующим образом:



- 1) вначале указывается порядок дифференциального приближения с помощью оператора присваивания;
- 2) описываются процедуры, позволяющие разложить функции в ряд Тейлора по сеточным параметрам  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$ ; здесь используются операторы цикла конструкции FOR...DO, FOR...PRODUCT, FOR...SUM и т.д.;
- 3) в теле программы осуществляется обращение к процедурам и производится разложение необходимых функций в ряд Тейлора;
- 4) вычисляются дифференциальные приближения потоков массы

$$\Delta M^n_{i-\frac{1}{2},j}, \Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j}, \Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}}, \Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}}.$$

Приведем гиперболическую форму первого дифференциального приближения разностных схем метода Давыдова для течений жидкости в горизонтальном пласте в рамках модели фильтрации С.А.Христиановича

$$\begin{aligned} h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \text{div}(\rho m h w) = & \frac{1}{2} (m u \rho_x)_x h \Delta x + \frac{1}{2} h \Delta y (m \vartheta \rho_y)_y + \frac{1}{2} (m u \rho_x h)_x \Delta x + \\ & + \frac{\Delta y}{2} (m \vartheta \rho_y)_y + \beta \varepsilon^2 \Delta t (P h m_x)_x + \beta \varepsilon^2 \Delta t (P h m_y)_y + \varepsilon^2 \Delta t (P_x h m)_x + \\ & + \varepsilon^2 \Delta t (P_y h m)_y + \Delta t (h \rho m u u_x)_x + \Delta t (h \rho m \vartheta \vartheta_y)_y + \frac{\mu}{\lambda} \Delta t (m^2 h u)_x + \\ & + \frac{\mu}{\lambda} \Delta t (m^2 h \vartheta)_y + \Delta t (\rho u_y h m \vartheta) + \Delta t (\rho u m \vartheta_x h)_y - \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \beta \varepsilon^2 \frac{\rho_x}{\rho} (P h m_x)_x + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta t \Delta x \frac{\rho_x}{\rho} (P_x h m)_x + \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \beta \varepsilon^2 \frac{\rho_y}{\rho} (P h m_y)_y - \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \frac{\rho_y}{\rho} (P_y h m)_y - \\ & - \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \frac{\mu}{\lambda} \frac{\rho_x}{\rho} (h u m^2)_x - \frac{1}{2} \Delta t \Delta y \frac{\mu}{\lambda} \frac{\rho_y}{\rho} (h m^2 \vartheta)_y. \end{aligned}$$

Здесь толщина пласта является функцией  $h(x, y)$ . В случае  $h = const$  гиперболическая форма первого дифференциального приближения уравнения неразрывности имеет следующий вид:



$$\begin{aligned} h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + h \operatorname{div}(\rho m w) &= \frac{\Delta x}{2} (m u \rho_x)_x + \frac{\Delta y}{2} (m \vartheta \rho_y)_y + \varepsilon^2 \beta \Delta t (P m_x)_x + \\ &+ \varepsilon^2 \Delta t (m P_x)_x \beta + \beta \varepsilon^2 \Delta t (m P_y)_y + \Delta t (u u_x m \rho)_x + \\ &+ \Delta t (\vartheta \vartheta_y m \rho)_y + \frac{\mu}{\lambda} \Delta t (m^2 u)_x + \frac{\Delta t}{\lambda} \mu (m^2 \vartheta)_y + \Delta t (\vartheta u_y m \rho)_x + \Delta t (u \vartheta_y m \rho)_x - \\ &- \frac{1}{2} \beta \varepsilon^2 \Delta t \Delta x \frac{\rho_x}{\rho} (m_x P)_x - \frac{1}{2} \Delta t \Delta x \varepsilon^2 \frac{\rho_x}{\rho} (P_x m)_x - \frac{1}{2} \beta \varepsilon^2 \Delta t \Delta y \frac{\rho_y}{\rho} (m_y P)_y - \\ &- \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Delta t \Delta x \frac{\rho_y}{\rho} (m P_y)_y - \frac{1}{2} \Delta t \Delta x (u u_x m \rho_x)_x - \frac{1}{2} \Delta t \Delta y (\vartheta \vartheta_y m \rho_y)_y - \\ &- \frac{1}{2} \Delta t \Delta x (u_y \vartheta m \rho_x)_x - \frac{1}{2} \Delta t \Delta x (u \vartheta_x m \rho_y)_y - \frac{1}{2} \Delta t \Delta y \frac{\mu}{\lambda} \frac{\rho_y}{\rho} (m^2 \vartheta)_y. \end{aligned}$$

Далее, используя гиперболическую форму первого дифференциального приближения, можно получить параболическую форму первого дифференциального приближения и найти элементы матриц аппроксимационных вязкости и дисперсии. Составленная и прошедшая тест программа на языке аналитических вычислений Reduce-3 позволяет найти получить дифференциальные приближения метода Давыдова n-го порядка.

### **5.5. Дифференциальные приближения высоких порядков для многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц.**

В связи с потребностями практики все большее значение приобретает исследование глубокой нелинейности рассматриваемых объектов. При численном моделировании задач механики стало необходимым исследовать нелинейные свойства применяемых разностных схем. Для этого с успехом может применяться аппарат дифференциальных приближений [32, 33, 40 и др.]. Разностные схемы метода крупных частиц всегда всесторонне и тщательно исследовались с помощью дифференциальных приближений. Вначале метод дифференциального приближения использовался для анализа диссипативных свойств разностных схем метода крупных частиц [43, 44], исследования их устойчивости [23 и др.] (в том числе в криволинейных системах координат [32]). Была выявлена структура аппроксимационной вязкости [33], исследовались нелинейные колебания, возникающие при решении



эволюционных разностных схем. Далее было введено понятие дифференциального приближения разностных граничных условий и исследована устойчивость на границах расчетной области и в их окрестности с учетом постановки реальных условий (непротекания, вдува, абляции теплозащитного покрытия и др.). Было отмечено существование в вычислительной газовой динамике шести типов матриц аппроксимационной вязкости и найдены связи между ними [33]. В дальнейшем стали рассматриваться матрицы аппроксимационной дисперсии [43].

Для более глубокого изучения разностных схем следует исследовать более высокие дифференциальные приближения. Это было сделано Б.Чечейбаевым под руководством Ю.М. Давыдова. Были рассмотрены дифференциальные приближения высших порядков для многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц в наиболее общем пространственно-трехмерном случае. При этом было также произведено учтывание влияния разностной постановки граничных условий. Матрицы при четвертых по пространству производных от газодинамических функций авторы называли бивязкостью, при пятых производных – бидисперсией, при шестых производных – три вязкостью и т.д. текст § 5 данной главы представляет собой существенно сокращенное изложение результатов, приведенных в [48].

### **Поколение численных методов и поколения ЭВМ.**

В связи с возрастающими потребностями практики и с прогрессом в областях вычислительной математики и вычислительной техники в настоящее время все более активно используется численный эксперимент.

Дадим классификацию вычислительных методов по поколениям в соответствии с принятой классификацией по поколениям вычислительных систем.

В «домашинную» эпоху решались простые задачи с использованием аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, а также аппарата специальных функций (функций Бесселя, полиномов Эрмита и др.).



Затем задачи усложнились и для их решения стали использоваться приближенные вычисления (например, вычисление определенного интеграла методом трапеции). Для этих вычислений достаточно ручных калькуляторов (типа арифмометра Феликс, механических счетных машин Мерседес, Рейнметелл и т.п.). Электронные вычислительные машины здесь еще не нужны, поэтому данное поколение условно назовем нулевым.

1-ое поколение. Практика выдвинула достаточно сложные задачи, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения решаются методами Эйлера, Эйлера с пересчетом. Адамса, Рунге-Кутты и др. Им адекватны первые ламповые ЭВМ (БЭСМ-1, Стрела, Урал-1 и т.п.).

2-ое поколение. Практика потребовала решения более сложных задач, описываемых уравнениями математической физики. В основном эта потребность возникла в аэрогидродинамике. Ввиду слабой разработанности методов математической физики, вычислители двинулись по пути, в основном, упрощения исходных уравнений и сведения их, путем использования известных свойств получаемых решений, используемых физических моделей, исходных дифференциальных уравнений, к задачам, которые можно решать. Для сверхзвуковых сжимаемых течений здесь использовался метод характеристик, для дозвуковых сжимаемых течений – метод интегральных соотношений, для несжимаемых течений – метод дискретных вихрей. Этому поколению методов адекватно 2-ое поколение ЭВМ – транзисторные вычислительные машины (БЭСМ -4, М-220 и т.п.), хотя, конечно, эти методы можно применять и на более совершенной вычислительной технике.

3-е поколение. Практика потребовала в рамках единого алгоритма получения решения во всех областях течения: как в дозвуковой, так и транс- и сверхзвуковой с возможностью расчета всех поверхностей разрыва (ударных волн, контактных поверхностей, волн разрежения). Математически это означает требование получения решения во всех областях (гиперболичности, эллиптичности, параболичности) и на границах между ними. Для этого были



предложены методы сквозного счета: Русанова, распада разрыва (Годун, Лакса, Лакса-Вендроффа и др. Данному 3 –ему поколению методов адекватно 3 –е поколение ЭВМ – вычислительные машины на больших интегральных схемах (БЭСМ-6, ЕС-1060 и т.п.).

4–ое поколение. Так как методы сквозного счета позволяют получать надежные результаты лишь в тех случаях, когда а priori известна структура решения (иначе 3-е поколение методов может давать не только качественные, но и количественные ошибки), возникла необходимость создания принципиально нового, существенно более мощного поколения методов, учитывающего глубокие нелинейные свойства разностных схем. Методы этого поколения могут давать решения, адекватные физике исследуемого процесса, без априорной информации о структуре решения. Ярким представителем методом сквозного счета является методом крупных частиц [8-12 и др.], позволивший решить многие задачи механики сплошных и сыпучих сред, машиностроения, экологии, электроники и др. 4–му поколению численных методов адекватны сверхбыстродействующие супер – ЭВМ (Эльбрус, Крэй и т.п.).

Метод крупных частиц стал в прямом смысле энциклопедическим: он вошел во все математические энциклопедии. Отметим, что современная его трактовка предполагает рассмотрение многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц [23], а также многопараметрического класса разностных граничных условий [48].

Для определения степени адекватности численного решения реальному физическому (аэрогидродинамическому) процессу необходимо знать внутренние свойства разностных схем. Современные разностные схемы, применяемые для решения задач газогидродинамики, являются существенно нелинейными. Традиционный метод Фурье не учитывает нелинейности. Возможность учета нелинейных эффектов дает рассмотрение дифференциальных приближений и представлений. Дифференциальное представление разностной схемы – форма континуальной интерпретации



дискретного объекта (разностной схемы). Оно является асимптотическим случаем дифференциального приближения разностной схемы и получается путем разложения разностного оператора  $\Lambda$  в ряд Тейлора по сеточным параметрам  $h$  с учетом всех членов разложения:

$$\Lambda = \sum_{\alpha=0} P_{\alpha} h^{\alpha}$$

Нулевой член разложения  $P_0$  (при  $\alpha = 0$ ) является исходным дифференциальным оператором, аппроксимируемым разностной схемой. Разложение с точностью до первого члена является первым дифференциальным приближением, оно характеризует диссипативные свойства разностной схемы (определяет аппроксимационную вязкость). Второе дифференциальное приближение определяет дисперсию, третье – бивязкость, четвертое – бидисперсию, пятое – тривязкость. В многопараметрическом классе разностных схем метода крупных частиц изучены все дифференциальные приближения вплоть до 5 –го включительно. Дифференциальные представления граничных условий – форма континуальной интерпретации дискретного объекта (разностных граничных условий). Понятие введено в [48]. Разностные граничные условия, представляющие разностную аппроксимацию континуальных (дифференциальных и др.) граничных условий представляют собой разностную схему. Для нее могут быть найдены дифференциальные представления и дифференциальные приближения путем разложений по сеточным параметрам в ряд Тейлора. Впервые были получены дифференциальные приближения и дифференциальные представления для ряда реальных граничных условий (непротекания, абляции теплозащитного покрытия и др.), используемых в расчетах методом крупных частиц.

Дифференциальные приближения позволяют исследовать аппроксимацию, диссипативные, дисперсионные и другие свойства разностных схем (устойчивость, монотонность, K-свойство, сильное K– свойство, M– свойство и т.п.). Дифференциальные приближения многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц рассмотрены для наиболее общего



случая (пространственно-трехмерного, нестационарного, с учетом многопараметрической разностной постановки реальных граничных условий).

Отметим также проблемы разностных сеток, применяемых для решения задач аэрогидродинамики (ортогональных, неортогональных, криволинейных и т.п.). Адаптивные и криволинейные сетки обладают существенными недостатками, так как сеточный вектор

$$\Delta \vec{r} = \bar{i} \Delta x + \bar{j} \Delta y + \bar{k} \Delta z$$

у них имеет различную величину и направление в разных расчетных точках. Поэтому внутренние свойства нелинейных разностных схем, зависящие от сеточного вектора, различны в разных точках расчетной области. Тем самым эти сетки вводят неоднородную вычислительную среду, которая может существенно исказить решение. Алгоритм метода крупных частиц может быть успешно отображен на архитектуре современных супер – ЭВМ: многопроцессорных, векторно-конвейерных, Data Flow и др. Методология таких отображений и получения высокоэффективных и экономичных алгоритмов с помощью аппарата информационных структур и операционных шаблонов изложена в главе 5.

### **Получение дифференциальных приближений высоких порядков.**

Рассматривая многопараметрический класс разностных схем метода крупных частиц [11] для решения пространственно-трехмерных задач газовой динамики.

Система уравнений газовой динамики для трехмерных нестационарных течений записывается в виде:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z &= 0, \\ (\rho u)_t + p_x + (\rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z &= 0, \\ (\rho v)_t + p_y + (\rho uv)_x + (\rho v^2)_y + (\rho vw)_z &= 0, \\ (\rho w)_t + p_z + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2)_z &= 0, \\ (\rho E)_t + [(p + \rho E)u]_x + [(p + \rho E)v]_y + [(p + \rho E)w]_z &= 0, \\ p = p(\rho, J), \quad J = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2). \end{aligned} \tag{5.5.1}$$



Здесь  $\rho$  – плотность,  $u, v, w$  – составляющие скорости,  $p = p(K, \epsilon)$  – давление,  $E, J = E - 0,5u^2$  – удельные полная и внутренняя энергия. Для построения разностной схемы система уравнений (5.5.1) расщепляется на две:

$$\begin{aligned} \rho_t^{(1)} = 0, \rho^{(1)} u_t^{(1)} + \mathfrak{N}_{u1} p_x^{(1)} = 0, \rho^{(1)} v_t^{(1)} + \mathfrak{N}_{v1} p_y^{(1)} = 0, \\ \rho^{(1)} w_t^{(1)} + \mathfrak{N}_{w1} p_z^{(1)} = 0, \rho^{(1)} E_t^{(1)} + \mathfrak{N}_{u2} (\rho u)_x^{(1)} + \mathfrak{N}_{v2} (\rho v)_y^{(1)} + \mathfrak{N}_{w2} (\rho w)_z^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

и

$$\begin{aligned} \rho_t^{(2)} + (\rho u)_x^{(2)} + (\rho v)_y^{(2)} + (\rho w)_z^{(2)} = 0, \\ (\rho u)_t^{(2)} + (1 - \mathfrak{N}_{u1}) p_x^{(2)} + (\rho u^2)_x^{(2)} + (\rho uv)_y^{(2)} + (\rho uw)_z^{(2)} = 0, \\ (\rho v)_t^{(2)} + (1 - \mathfrak{N}_{v1}) p_y^{(2)} + (\rho uv)_x^{(2)} + (\rho v^2)_y^{(2)} + (\rho vw)_z^{(2)} = 0, \\ (\rho w)_t^{(2)} + (1 - \mathfrak{N}_{w1}) p_z^{(2)} + (\rho uw)_x^{(2)} + (\rho vw)_y^{(2)} + (\rho w^2)_z^{(2)} = 0, \\ (\rho E)_t^{(2)} + (1 - \mathfrak{N}_{u1}) (\rho u)_x^{(2)} + (1 - \mathfrak{N}_{v2}) (\rho v)_y^{(2)} + \\ + (1 + \mathfrak{N}_{w2}) (\rho w)_z^{(2)} + (\rho Eu)_x^{(2)} + (\rho Ev)_y^{(2)} + (\rho Ew)_z^{(2)} = 0 \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

Систему (5.5.1) будем аппроксимировать следующими разностными формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j,k}^n &= u_{i,j,k}^n - \frac{p_{i+1,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n} \mathfrak{N}_{u1}, \\ \tilde{v}_{i,j,k}^n &= v_{i,j,k}^n - \frac{p_{i,j+\bar{1},k}^n - p_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n} \mathfrak{N}_{v1}, \\ \tilde{w}_{i,j,k}^n &= w_{i,j,k}^n - \frac{p_{i,j,k\mp 1}^n - p_{i,j,k}^n}{2\Delta z} \frac{\Delta t}{\rho_{i,j,k}^n} \mathfrak{N}_{w1}, \\ \tilde{E}_{i,j,k}^n &= \mathfrak{N}_{u2} (1 - \mathfrak{N}_{u3}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x \rho_{i,j,k}^n} \left\{ p_{i+1/2,j,k}^n ([u_{i+1,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u4} + [u_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u5}) - p_{i-1/2,j,k}^n ([u_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u4} + \right. \\ &+ [u_{i-1,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u5}) \left. \right\} - \mathfrak{N}_{u2} \mathfrak{N}_{u3} \frac{\Delta t}{2\Delta x \rho_{i,j,k}^n} \left\{ p_{i,j,k}^n [u_{i+1,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u6} + p_{i+1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u7} - \right. \\ &- p_{i-1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u6} - p_{i,j,k}^n [u_{i-1,j,k}^n] \mathfrak{N}_{u7} \left. \right\} - \\ &- \mathfrak{N}_{v2} (1 - \mathfrak{N}_{v3}) - \frac{\Delta t}{2\Delta y \rho_{i,j,k}^n} \left\{ p_{i,j+1/2,k}^n ([v_{i,j+1,k}^n] \mathfrak{N}_{v4} + [v_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{v5}) - p_{i,j-1/2,k}^n ([v_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{v4} + \right. \\ &+ [v_{i,j-1,k}^n] \mathfrak{N}_{v5}) \left. \right\} - \mathfrak{N}_{v2} \mathfrak{N}_{v3} \frac{\Delta t}{2\Delta y \rho_{i,j,k}^n} \left\{ p_{i,j,k}^n [v_{i,j+1,k}^n] \mathfrak{N}_{v6} + p_{i,j+1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{v7} - \right. \\ &- p_{i,j-1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \mathfrak{N}_{v6} - p_{i,j,k}^n [v_{i,j-1,k}^n] \mathfrak{N}_{v7} \left. \right\} - \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

$$\begin{aligned}
 & - \mathfrak{S}_{w2}(1 - \mathfrak{S}_{w3}) - \frac{\Delta t}{2\Delta z \rho_{i,j,k}^n} \left\{ p_{i,j,k+1/2}^n ([w_{i,j,k+1}^n] \mathfrak{S}_{w4} + [w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w5}) - p_{i,j,k-1/2}^n ([w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w4} + \right. \\
 & \left. + [w_{i,j,k-1}^n] \mathfrak{S}_{w5}) \right\} - \mathfrak{S}_{w2} \mathfrak{S}_{w3} \frac{\Delta t}{2\Delta z \rho_{i,j,k}^n} \left\{ p_{i,j,k}^n [v_{i,j,k+1}^n] \mathfrak{S}_{w6} + p_{i,j,k+1}^n [w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w7} - \right. \\
 & \left. - p_{i,j,k-1}^n [w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w6} - p_{i,j,k}^n [w_{i,j,k-1}^n] \mathfrak{S}_{w7} \right\}, \\
 & p_{i+1/2,j,k}^n \frac{1}{2} - (p_{i,j,k}^n + p_{i+1,j,k}^n) \\
 & [\varphi_{i,j,k}^n] \alpha = (1 - \alpha) M_{i,j,k}^n + \alpha \tilde{M}_{i,j,k}^n, \quad \varphi = \{u, v, w, E\}
 \end{aligned}$$

Для аппроксимации уравнений лагранжевого и заключительного этапов используется следующая разностная схема:

$$\begin{aligned}
 & (\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z = \langle \Delta M(\rho u) \rangle_{i-1/2,j,k}^n < \Delta M(\rho u) \rangle_{i+1/2,j,k}^n + \langle \Delta M(\rho \nabla) \rangle_{i,j-1/2,k}^n - \\
 & - \langle \Delta M(\rho v) \rangle_{i,j+1/2,k}^n + \langle \Delta M(\rho w) \rangle_{i,j,k-1/2}^n - \langle \Delta M(\rho w) \rangle_{i,j,k+1/2}^n, \\
 & (\rho_{i,j,k}^{n+1} u_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{u}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z = -(1 - \mathfrak{S}_{u1}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta y \Delta z (p_{i+1,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n + L_{i,j,k}^n(u)), \\
 & (\rho_{i,j,k}^{n+1} v_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{v}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z = -(1 - \mathfrak{S}_{v1}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta z (p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j-1,k}^n + L_{i,j,k}^n(w)), \quad (5.5.5) \\
 & (\rho_{i,j,k}^{n+1} w_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{w}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z = -(1 - \mathfrak{S}_{w1}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta y (p_{i,j,k+1}^n - p_{i,j,k-1}^n + L_{i,j,k}^n(w)), \\
 & (\rho_{i,j,k}^{n+1} E_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n \tilde{E}_{i,j,k}^n) \Delta x \Delta y \Delta z = -(1 - \mathfrak{S}_{u2})(1 - \mathfrak{S}_{u8}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta y \Delta z \cdot \left\{ p_{i+1/2,j,k}^n ([u_{i+1,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u9} + \right. \\
 & \left. + [u_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u10}) - p_{i-1/2,j,k}^n ([u_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u9} + [u_{i-1,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u10}) \right\} - (1 - \mathfrak{S}_{u2}) \mathfrak{S}_{u8} - \frac{\Delta t}{2} \Delta y \Delta z \left\{ p_{i,j,k}^n [u_{i+1,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u11} + \right. \\
 & \left. + p_{i+1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u12} - p_{i-1,j,k}^n [u_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u11} - p_{i,j,k}^n [u_{i-1,j,k}^n] \mathfrak{S}_{u12} \right\} - (1 - \mathfrak{S}_{v2})(1 - \mathfrak{S}_{v8}) - \\
 & - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta z \left\{ p_{i,j+1/2,k}^n ([v_{i,j+1,k}^n] \mathfrak{S}_{v9} + [v_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{v10}) - p_{i,j-1/2,k}^n ([v_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{v9} + [v_{i,j-1,k}^n] \mathfrak{S}_{v10}) \right\} - \\
 & - (1 - \mathfrak{S}_{v2}) \mathfrak{S}_{v8} - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta z \left\{ p_{i,j,k}^n [v_{i,j+1,k}^n] \mathfrak{S}_{v11} + p_{i,j+1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{v12} - p_{i,j-1,k}^n [v_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{v11} - \right. \\
 & \left. - p_{i,j,k}^n [v_{i,j-1,k}^n] \mathfrak{S}_{v12} \right\} - (1 - \mathfrak{S}_{w2})(1 - \mathfrak{S}_{w8}) - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta y \left\{ p_{i,j,k+1/2}^n ([w_{i,j,k+1}^n] \mathfrak{S}_{w9} + [w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w10}) - \right. \\
 & \left. - p_{i,j,k-1/2}^n ([w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w9} + [w_{i,j,k-1}^n] \mathfrak{S}_{w10}) \right\} - (1 - \mathfrak{S}_{w2}) \mathfrak{S}_{w8} - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \Delta y \left\{ p_{i,j,k}^n [w_{i,j,k+1}^n] \mathfrak{S}_{w11} + \right. \\
 & \left. + p_{i,j,k+1}^n [w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w12} - p_{i,j,k-1}^n [w_{i,j,k}^n] \mathfrak{S}_{w11} - p_{i,j,k}^n [w_{i,j,k-1}^n] \mathfrak{S}_{w12} \right\} + L_{i,j,k}^n(E)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 & L_{i,j,k}^n(\varphi) = \langle \Delta M(\rho u \varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n < \Delta M(\rho u \varphi) \rangle_{i+1/2,j,k}^n + \langle \Delta M(\rho v \varphi) \rangle_{i,j-1/2,k}^n + \\
 & + \langle \Delta M(\rho v \varphi) \rangle_{i,j+1/2,k}^n + \langle \Delta M(\rho w \varphi) \rangle_{i,j,k-1/2}^n + \langle \Delta M(\rho w \varphi) \rangle_{i,j,k+1/2}^n, \quad (5.5.6) \\
 & \varphi = \{u, v, w, E\}
 \end{aligned}$$

“Потоки” записываем в виде:



$$\langle \Delta M(\rho u) \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \langle \rho(1) \rangle_{i-1/2,j,k}^n \langle u(1) \rangle_{i-1/2,j,k} \Delta t \Delta y \Delta z,$$

$$\langle \Delta M(\rho u \varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \langle \rho(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n \langle u(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k} \langle \varphi \rangle_{i-1/2,j,k} \Delta t \Delta y \Delta z, \varphi = \{u, v, w, E\}$$

где:

$$\langle u(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \frac{1}{2} ([u_{i-1,j,k}^n] \aleph_5^\varphi + [u_{i,j,k}^n] \aleph_6^\varphi), \quad \varphi = \{1, u, v, w, E\}$$

$$\langle \rho(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \aleph_{u1}^\varphi \rho_{i-2,j,k}^n + (1 - \aleph_{u1}^\varphi - \aleph_{u2}^\varphi) \rho_{i-1,j,k}^n + \aleph_{u2}^\varphi \rho_{i,j,k}^n,$$

если:

$$\langle u(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n \geq 0;$$

$$\langle \varphi \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \aleph_{u3}^\varphi [\varphi_{i-2,j,k}^n] \aleph_{u7}^\varphi + (1 - \aleph_{u3}^\varphi - \aleph_{u4}^\varphi) [\varphi_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u8}^\varphi + \aleph_{u4}^\varphi [\varphi_{i,j,k}^n] \aleph_{u9}^\varphi,$$

если:  $\langle u(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n \geq 0;$

$$\langle \rho(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \aleph_{u1}^\varphi \rho_{i+1,j,k}^n + (1 - \aleph_{u1}^\varphi - \aleph_{u2}^\varphi) \rho_{i,j,k}^n + \aleph_{u2}^\varphi \rho_{i-1,j,k}^n$$

если:  $\langle u(\varphi) \rangle_{i-1/2,j,k}^n < 0;$

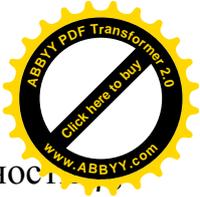
$$\langle \varphi \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \aleph_{u3}^\varphi [\varphi_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u7}^\varphi + (1 - \aleph_{u3}^\varphi - \aleph_{u4}^\varphi) [\varphi_{i,j,k}^n] \aleph_{u8}^\varphi + \aleph_{u4}^\varphi [\varphi_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u9}^\varphi,$$

если:  $\langle u(M) \rangle_{i-1/2,j,k}^n < 0.$

Аналогично определяются  $\Delta M_{i,j-1/2,k}^n$  и  $\Delta M_{i,j,k-1/2}$

(при этом нижний индекс при параметрах "s" принимает значения v и w соответственно).

Исследование диссипативных, дисперсионных и других свойств многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц для трехмерных течений газовой динамики проводится методом дифференциальных приближений. Вычисление дифференциальных приближений более высоких порядков является трудоемким. Поэтому была использована система аналитических вычислений REDUCE-3: На ЭВМ было вычислено 5 дифференциальных приближений. Результаты аналитических вычислений на ЭВМ ЕС-1061, ЕС-1037 для первого дифференциального приближения полностью соответствуют результатам, полученным в [48]. Приведем здесь порядок выполнения действий при аналитических вычислениях на ЭВМ.



1. Вводятся как операторы произвольная функция  $F(x,y,z,t)$  плотности компоненты скорости  $u, v, w$ , энергия  $E$ , а также другие функции, через которые обозначаются разложения в ряд Тейлора выше названных величин, характеризующие состояние газа.

2. Составляются процедуры для разложения произвольной функции  $F(x+i\Delta x, y+j\Delta y, z+k\Delta z, t+k_1\Delta t)$  в ряд Тейлора по сеточным параметрам  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$ .  $i, j, k_1$  – целые константы.

3. С помощью оператора подставки LET величины  $\rho, u, v, w, E$  в точках, расположенных в окрестности точки, с координатами соответствующими индексам  $I, j, k$ , разлагаются в ряд Тейлора. При этом используются выше составленные процедуры.

4. Проводится вычисление потоков массы, импульсов и энергии, то есть:

$$\begin{aligned} &< \Delta M(\rho u) >_{i-1/2, j, k}^n, < \Delta M(\rho u) >_{i+1/2, j, k}^n, < \Delta M(\rho v) >_{i, j-1/2, k}^n, \\ &< \Delta M(\rho v) >_{i, j+1/2, k}^n, < \Delta M(\rho w) >_{i, j, k-1/2}^n, < \Delta M(\rho w) >_{i, j, k+1/2}^n, \\ &L_{i, j, k}^n(M) = < \Delta M(\rho u \varphi) >_{i-1/2, j, k}^n - < \Delta M(\rho u \varphi) >_{i+1/2, j, k}^n + < \Delta M(\rho u \varphi) >_{i, j-1/2, k}^n - \\ &- < \Delta M(\rho v \varphi) >_{i, j+1/2, k}^n + < \Delta M(\rho w \varphi) >_{i, j, k-1/2}^n - < \Delta M(\rho w \varphi) >_{i, j, k+1/2}^n. \end{aligned}$$

где  $\varphi = \{u, v, w, E\}$ .

следует отметить, что при вычислении членов, возникающих из-за расщепления, создается нежесткий блок.

5. Рассматриваются разностные схемы, аппроксимирующие уравнения лагранжева и заключительного этапов (5.5.5).

При этом дифференциальные приближения уравнений неразрывности количества движения и энергии вычисляются в отдельности.

Выпишем первое и последующие дифференциальные приближения многопараметрического класса разностных схем расщепления в общем виде для пространственно-трехмерного нестационарного случая.

Рассматриваются разностные схемы (4), (5), в которых

$$\begin{aligned} < u(\varphi) >_{i+1/2, j, k}^n = \aleph_{u10}^\varphi [u_{i-1, j, k}^n] \aleph_{u12}^\varphi + (1 - \aleph_{u10}^\varphi - \aleph_{u11}^\varphi) [u_{i, j, k}^n] \aleph_{u13}^\varphi + \aleph_{u11}^\varphi [u_{i+1, j, k}^n] \aleph_{u14}^\varphi, \\ < v(\varphi) >_{i, j+1/2, k}^n = \aleph_{v10}^\varphi [v_{i, j-1, k}^n] \aleph_{v12}^\varphi + (1 - \aleph_{v10}^\varphi - \aleph_{v11}^\varphi) [v_{i, j, k}^n] \aleph_{v13}^\varphi + \aleph_{v11}^\varphi [v_{i, j+1, k}^n] \aleph_{v14}^\varphi, \\ < w(\varphi) >_{i, j, k+1/2}^n = \aleph_{w10}^\varphi [w_{i, j, k-1}^n] \aleph_{w12}^\varphi + (1 - \aleph_{w10}^\varphi - \aleph_{w11}^\varphi) [w_{i, j, k}^n] \aleph_{w13}^\varphi + \aleph_{w11}^\varphi [w_{i, j, k+1}^n] \aleph_{w14}^\varphi. \end{aligned} \quad (5.5.7)$$



Гиперболическая форма первого и последующих дифференциаль-  
приближений имеет вид (в случае  $u, v, w > 0$ ,

следует заменить  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  на  $-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z$ );

$$\begin{aligned} \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y + (w\rho)_z = & \Delta x(u\rho_x)_x (\aleph_{u1}^1 - \aleph_{u2}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x\rho)_x (\aleph_{u10}^1 - \aleph_{u11}^1 + \\ & + \frac{1}{2}) + \Delta y(v\rho_y)_y (\aleph_{v1}^1 - \aleph_{v2}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta y(v_y\rho)_y (\aleph_{v10}^1 - \aleph_{v11}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta z(w\rho_z)_z (\aleph_{w1}^1 - \\ & - \aleph_{w2}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta z(w_z\rho)_z (\aleph_{w10}^1 - \aleph_{w11}^1 + \frac{1}{2}) + \Delta t \{ \aleph_{u1}^1 [\aleph_{u10}^1 \aleph_{u12}^1 + (1 - \aleph_{u10}^1 - \aleph_{u11}^1) \aleph_{u13}^1 + \\ & + \aleph_{u11}^1 \aleph_{u14}^1] p_{xx} + \aleph_{v1}^1 [\aleph_{v10}^1 \aleph_{v12}^1 + (1 - \aleph_{v10}^1 - \aleph_{v11}^1) \aleph_{v13}^1 + \aleph_{v11}^1 \aleph_{v14}^1] p_{yy} + \\ & + \aleph_{w1}^1 [\aleph_{w10}^1 \aleph_{w12}^1 + (1 - \aleph_{w10}^1 - \aleph_{w11}^1) \aleph_{w13}^1 + \aleph_{w11}^1 \aleph_{w14}^1] p_{zz} - \frac{1}{2} \rho_{tt} \} + D_2^p + D_3^p + D_4^p; \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

$$\begin{aligned} (\rho u)_t + (p + \rho u^2)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = & \Delta x(uu_x\rho)_x (\aleph_{u3}^u - \aleph_{u4}^u + \frac{1}{2}) + \\ & + \Delta x(uu\rho_x)_x (\aleph_{u1}^u - \aleph_{u2}^u + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x u\rho)_x (\aleph_{u10}^u - \aleph_{u11}^u + \frac{1}{2}) + \Delta y(uv_y\rho)_y (\aleph_{v3}^u - \\ & - \aleph_{v4}^u + \frac{1}{2}) + \Delta y(uv\rho_y)_y (\aleph_{v1}^u - \aleph_{v2}^u + \frac{1}{2}) + \Delta y(u_y v\rho)_y (\aleph_{v10}^u - \aleph_{v11}^u + \frac{1}{2}) + \\ & + \Delta z(uw_z\rho)_z (\aleph_{w3}^u - \aleph_{w4}^u + \frac{1}{2}) + \Delta z(uw\rho_z)_z (\aleph_{w1}^u - \aleph_{w2}^u + \frac{1}{2}) + \Delta z(u_z w\rho)_z (\aleph_{w10}^u - \\ & - \aleph_{w11}^u + \frac{1}{2}) + \Delta t \{ \aleph_{u1}^u [\aleph_{u3}^u \aleph_{u7}^u + (1 - \aleph_{u3}^u \aleph_{u4}^u) \aleph_{u8}^u + \aleph_{u4}^u \aleph_{u9}^u + \aleph_{u10}^u \aleph_{u12}^u + (1 - \\ & - \aleph_{u10}^u \aleph_{u11}^u) \aleph_{u13}^u + \aleph_{u11}^u \aleph_{u14}^u] (up_x)_x + \aleph_{v1}^u [\aleph_{v3}^u \aleph_{v7}^u + (1 - \aleph_{v3}^u \aleph_{v4}^u) \aleph_{v8}^u + \aleph_{v4}^u \aleph_{v9}^u] (up_y)_y + \\ & + \aleph_{u1}^u [\aleph_{v10}^u \aleph_{v12}^u + (1 - \aleph_{v10}^u - \aleph_{v11}^u) \aleph_{v13}^u + \aleph_{v11}^u \aleph_{v14}^u] (vp_x)_y + \aleph_{w1}^u [\aleph_{w3}^u \aleph_{w7}^u + (1 - \aleph_{w3}^u - \\ & - \aleph_{w4}^u) \aleph_{w8}^u + \aleph_{w4}^u \aleph_{w9}^u] (up_z)_z + \aleph_{u1}^u [\aleph_{w10}^u \aleph_{w12}^u + (1 - \aleph_{w10}^u - \aleph_{w11}^u) \aleph_{w13}^u + \aleph_{w11}^u \aleph_{w14}^u] (wp_x)_z - \\ & - \frac{1}{2} (\rho u)_{tt} \} + D_p^{2x} + D_p^{3x} + D_p^{4x}; \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

$$\begin{aligned} (\rho v)_t + (p + \rho v^2)_y + (\rho uv)_x + (\rho vw)_z = & \Delta x(uv_x\rho)_x (\aleph_{u10}^v - \aleph_{u11}^v + \frac{1}{2}) + \\ & + \Delta x(uv\rho_x)_x (\aleph_{u1}^v - \aleph_{u2}^v + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x v\rho)_x (\aleph_{u3}^v - \aleph_{u4}^v + \frac{1}{2}) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \Delta y(vv_y \rho)_y (\mathfrak{N}_{v10}^v - \mathfrak{N}_{v11}^v + \frac{1}{2}) + \Delta y(vv \rho_y)_y (\mathfrak{N}_{v1}^v - \mathfrak{N}_{v2}^v + \frac{1}{2}) + \Delta y(u_y v \rho)_y (\mathfrak{N}_{v3}^v - \mathfrak{N}_{v4}^v + \\
& + \frac{1}{2}) + \Delta z(wv_z \rho)_z (\mathfrak{N}_{w10}^v - \mathfrak{N}_{w11}^v + \frac{1}{2}) + \Delta z(wv \rho_z)_z (\mathfrak{N}_{w1}^v - \mathfrak{N}_{w2}^v + \frac{1}{2}) + \Delta z(w_z v \rho)_z (\mathfrak{N}_{w3}^v - \\
& - \mathfrak{N}_{w4}^v + \frac{1}{2}) + \Delta t \{ \mathfrak{N}_{u1}^v [\mathfrak{N}_{u3}^v \mathfrak{N}_{u7}^v + (1 - \mathfrak{N}_{u3}^v \mathfrak{N}_{u4}^v) \mathfrak{N}_{v8}^v + \mathfrak{N}_{u4}^v \mathfrak{N}_{u9}^v] (u p_x)_x + \mathfrak{N}_{v1}^v [\mathfrak{N}_{u10}^v \mathfrak{N}_{u12}^v + \\
& + (1 - \mathfrak{N}_{u10}^v - \mathfrak{N}_{u11}^v) \mathfrak{N}_{u13}^v + \mathfrak{N}_{u11}^v \mathfrak{N}_{u14}^v] (v p_y)_x + \mathfrak{N}_{v1}^v [\mathfrak{N}_{v3}^v \mathfrak{N}_{v7}^v + (1 - \mathfrak{N}_{v3}^v \mathfrak{N}_{v4}^v) \mathfrak{N}_{v8}^v + \mathfrak{N}_{v4}^v \mathfrak{N}_{v9}^v + \\
& + \mathfrak{N}_{v10}^v \mathfrak{N}_{v12}^v + (1 - \mathfrak{N}_{v10}^v - \mathfrak{N}_{v11}^v) \mathfrak{N}_{v13}^v + \mathfrak{N}_{v11}^v \mathfrak{N}_{v14}^v] (v p_y)_y + \mathfrak{N}_{w1}^v [\mathfrak{N}_{w3}^v \mathfrak{N}_{w7}^v + (1 - \\
& - \mathfrak{N}_{w3}^v \mathfrak{N}_{w4}^v) \mathfrak{N}_{w8}^v + \mathfrak{N}_{w4}^v \mathfrak{N}_{w9}^v] (w p_z)_z + \mathfrak{N}_{v1}^v [\mathfrak{N}_{w10}^v \mathfrak{N}_{w12}^v + (1 - \mathfrak{N}_{w10}^v - \mathfrak{N}_{w11}^v) \mathfrak{N}_{w13}^v + \\
& + \mathfrak{N}_{w11}^v \mathfrak{N}_{w14}^v] (v p_y)_z - \frac{1}{2} (\rho u)_u \} + D_p^{2y} + D_p^{3y} + D_p^{4y}; \tag{5.5.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho w)_t + (\rho u w)_x + (\rho v w)_y + (p + \rho w^2)_z = \Delta x(uw_x \rho)_x (\mathfrak{N}_{u10}^w - \mathfrak{N}_{u11}^w + \frac{1}{2}) + \\
& + \Delta x(uw \rho_x)_x (\mathfrak{N}_{u1}^w - \mathfrak{N}_{u2}^w + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x w \rho)_x (\mathfrak{N}_{u3}^w - \mathfrak{N}_{u4}^w + \frac{1}{2}) + \\
& + \Delta y(vw_y \rho)_y (\mathfrak{N}_{v10}^w - \mathfrak{N}_{v11}^w + \frac{1}{2}) + \Delta y(vw \rho_y)_y (\mathfrak{N}_{v1}^w - \mathfrak{N}_{v2}^w + \frac{1}{2}) + \\
& + \Delta y(v_y w \rho)_y (\mathfrak{N}_{v3}^w - \mathfrak{N}_{v4}^w + \frac{1}{2}) + \Delta z(w w_z \rho)_z (\mathfrak{N}_{w10}^w - \mathfrak{N}_{w11}^w + \frac{1}{2}) + \\
& + \Delta z(vw \rho_z)_z (\mathfrak{N}_{w1}^w - \mathfrak{N}_{w2}^w + \frac{1}{2}) + \Delta z(v_z w \rho)_z (\mathfrak{N}_{w3}^w - \mathfrak{N}_{w4}^w + \frac{1}{2}) + \\
& + \Delta t \{ \mathfrak{N}_{u1}^w [\mathfrak{N}_{u3}^w \mathfrak{N}_{u7}^w + (1 - \mathfrak{N}_{u3}^w - \mathfrak{N}_{u4}^w) \mathfrak{N}_{u8}^w + \mathfrak{N}_{u4}^w \mathfrak{N}_{u9}^w] (u p_x)_x + \\
& + \mathfrak{N}_{w1}^w [\mathfrak{N}_{u10}^w \mathfrak{N}_{u12}^w + (1 - \mathfrak{N}_{u10}^w - \mathfrak{N}_{u11}^w) \mathfrak{N}_{u13}^w + \mathfrak{N}_{u11}^w \mathfrak{N}_{u14}^w] (w p_z)_z + \\
& + \mathfrak{N}_{v1}^w [\mathfrak{N}_{v3}^w \mathfrak{N}_{v7}^w + (1 - \mathfrak{N}_{v3}^w - \mathfrak{N}_{v4}^w) \mathfrak{N}_{v8}^w + \mathfrak{N}_{v4}^w \mathfrak{N}_{v9}^w] (v p_y)_y + \\
& + \mathfrak{N}_{w1}^w [\mathfrak{N}_{v10}^w \mathfrak{N}_{v12}^w + (1 - \mathfrak{N}_{v10}^w - \mathfrak{N}_{v11}^w) \mathfrak{N}_{v13}^w + \mathfrak{N}_{v11}^w \mathfrak{N}_{v14}^w] (w p_z)_y + \\
& + \mathfrak{N}_{w1}^w [\mathfrak{N}_{w3}^w \mathfrak{N}_{w7}^w + (1 - \mathfrak{N}_{w3}^w - \mathfrak{N}_{w4}^w) \mathfrak{N}_{w8}^w + \mathfrak{N}_{w4}^w \mathfrak{N}_{w9}^w + \mathfrak{N}_{w10}^w \mathfrak{N}_{w12}^w + \\
& + (1 - \mathfrak{N}_{w10}^w - \mathfrak{N}_{w11}^w) \mathfrak{N}_{w13}^w + \mathfrak{N}_{w11}^w \mathfrak{N}_{w14}^w] (w p_z)_z - \frac{1}{2} (\rho w)_u \} + D_p^{2z} D_p^{3z} D_p^{4z}; \tag{5.5.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho E)_t + [(p + \rho E)u]_x + [(p + \rho E)v]_y + [(p + \rho E)w]_z = \Delta x(uE_x \rho)_x (\mathfrak{N}_{u3}^E - \mathfrak{N}_{u4}^E + \\
& + \frac{1}{2}) + \Delta x(uE \rho_x)_x (\mathfrak{N}_{u1}^E - \mathfrak{N}_{u2}^E + \frac{1}{2}) + \Delta x(u_x E \rho)_x (\mathfrak{N}_{u10}^E - \mathfrak{N}_{u11}^E + \frac{1}{2}) + \Delta y(uE_y \rho)_y (\mathfrak{N}_{v3}^E - \\
& - \mathfrak{N}_{v4}^E + \frac{1}{2}) + \Delta y(uE \rho_y)_y (\mathfrak{N}_{v1}^E - \mathfrak{N}_{v2}^E + \frac{1}{2}) + \Delta y(u_y E \rho)_y (\mathfrak{N}_{v10}^E - \mathfrak{N}_{v11}^E + \frac{1}{2}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Delta z(uE_z \rho)_z (\aleph_{w3}^E - \aleph_{w4}^E + \frac{1}{2}) + \Delta z(uE \rho_z)_z (\aleph_{w1}^E - \aleph_{w2}^E + \frac{1}{2}) + \Delta z(u_z E \rho)_z (\aleph_{w10}^E - \\
 & - \aleph_{w11}^E + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \Delta t(\frac{pp}{\rho} x)_{x^1 u^s u^1} + \frac{1}{2} \Delta t(\frac{pp}{\rho} y)_{y^1 v^s v^1} + \frac{1}{2} \Delta t(\frac{pp}{\rho} z)_{z^1 w^s w^1} + \Delta t \{ \aleph_{u1} [\aleph_{u10}^E \aleph_{u12}^E + \\
 & + (1 - \aleph_{u10}^E - \aleph_{u11}^E) \aleph_{u13}^E + \aleph_{u11}^E \aleph_{u14}^E] (Ep_x)_x + \aleph_{v1} [\aleph_{u10}^E \aleph_{u12}^E + (1 - \aleph_{v10}^E - \aleph_{v11}^E) \aleph_{v13}^E + \\
 & + \aleph_{v11}^E \aleph_{v14}^E] (Ep_y)_y + \aleph_{w1} [\aleph_{w10}^E \aleph_{w12}^E + (1 - \aleph_{w10}^E - \aleph_{w11}^E) \aleph_{w13}^E + \aleph_{w11}^E \aleph_{w14}^E] (Ep_z)_z + \\
 & + [\aleph_{u3}^E \aleph_{u7}^E + (1 - \aleph_{u3}^E - \aleph_{u4}^E) \aleph_{u8}^E + \aleph_{u4}^E \aleph_{u9}^E] (um)_x + [\aleph_{v3}^E \aleph_{v7}^E + (1 - \aleph_{v3}^E - \aleph_{v4}^E) \aleph_{v8}^E + \\
 & + \aleph_{v4}^E \aleph_{v9}^E] (vm)_y + [\aleph_{w3}^E \aleph_{w7}^E + (1 - \aleph_{w3}^E - \aleph_{w4}^E) \aleph_{w8}^E + \aleph_{w4}^E \aleph_{w9}^E] (wm)_z - \frac{1}{2} (\rho E)_u \} + \\
 & + D_2^E + D_3^E + D_4^E;
 \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

где:  $l_\varphi = \aleph_{\varphi 2} (1 - \aleph_{\varphi 3}) (\aleph_{\varphi 4} + \aleph_{\varphi 5}) + (1 - \aleph_{\varphi 2}) (1 - \aleph_{\varphi 8}) (\aleph_{\varphi 9} + \aleph_{\varphi 10}) +$   
 $+ \aleph_{\varphi 2} \aleph_{\varphi 3} (\aleph_{\varphi 6} + \aleph_{\varphi 7}) + (1 - \aleph_{\varphi 2}) \aleph_{\varphi 8} (\aleph_{\varphi 11} + \aleph_{\varphi 12}), \quad \varphi = \{u, v, w\}$   
 $m = \aleph_{u2} (pu)_x + \aleph_{v2} (pv)_y + \aleph_{w2} (pw)_z$

Здесь члены:

$$\Delta x(u\rho_x)_x (\aleph_{u1}^1 \aleph_{u2}^1 + \frac{1}{2}), \quad \Delta y(u\rho_y)_y (\aleph_{v1}^1 \aleph_{v2}^1 + \frac{1}{2}), \quad \Delta z(w\rho_z)_z (\aleph_{w1}^1 \aleph_{w2}^1 + \frac{1}{2})$$

появились при использовании формул (5.5.13)

$$\begin{aligned}
 < \rho(\varphi) >_{i-1/2, j, k}^n = \aleph_{u1}^\varphi \rho_{i-2, j^+ k}^n (1 - \aleph_{u1}^\varphi - \aleph_{u2}^\varphi) \rho_{i-1, j, k}^n + \aleph_{u2}^\varphi \rho_{i, j, k}^n, \\
 < \rho(\varphi) >_{i, j-1/2, k}^n = \aleph_{v1}^\varphi \rho_{i, j-2^+ k}^n (1 - \aleph_{v1}^\varphi - \aleph_{v2}^\varphi) \rho_{i, j-1, k}^n + \aleph_{v2}^\varphi \rho_{i, j, k}^n, \\
 < \rho(\varphi) >_{i, j, k-1/2}^n = \aleph_{w1}^\varphi \rho_{i, j, k \pm 2}^n (1 - \aleph_{w1}^\varphi - \aleph_{w2}^\varphi) \rho_{i, j, k-1}^n + \aleph_{w2}^\varphi \rho_{i, j, k}^n,
 \end{aligned}$$

в уравнении неразрывности, при  $\varphi = \{1, u, v, E\}$

Члены  $\Delta x(uu\rho_x)_x (\aleph_{u1}^u - \aleph_{u2}^u + \frac{1}{2}), \quad \Delta y(uv\rho_y)_y (\aleph_{v1}^u - \aleph_{v2}^u + \frac{1}{2}),$

$\Delta z(uw\rho_z)_z (\aleph_{w1}^u - \aleph_{w2}^u + \frac{1}{2}), \quad \Delta x(uv\rho_x)_x (\aleph_{u1}^v - \aleph_{u2}^v + \frac{1}{2}),$

$\Delta y(vv\rho_y)_y (\aleph_{v1}^v - \aleph_{v2}^v + \frac{1}{2}), \quad \Delta z(wv\rho_z)_z (\aleph_{w1}^v - \aleph_{w2}^v + \frac{1}{2}),$

$\Delta x(uw\rho_x)_x (\aleph_{u1}^w - \aleph_{u2}^w + \frac{1}{2}), \quad \Delta y(vw\rho_y)_y (\aleph_{v1}^w - \aleph_{v2}^w + \frac{1}{2}),$

$\Delta z(ww\rho_z)_z (\aleph_{w1}^w - \aleph_{w2}^w + \frac{1}{2}),$  возникли в уравнениях импульсов при

использовании формулы (5.5.13)

Члены  $\Delta x(uE\rho_x)_x (\aleph_{u1}^E - \aleph_{u2}^E + \frac{1}{2}), \quad \Delta y(vE\rho_y)_y (\aleph_{v1}^E - \aleph_{v2}^E + \frac{1}{2}),$

$\Delta z(wE\rho_z)_z (\aleph_{w1}^E - \aleph_{w2}^E + \frac{1}{2})$  получается из уравнения энергии с учетом формулы

(5.5.13) если индекс  $\varphi = E$ .

2. Члены  $\Delta x(uu_x\rho)_x (\aleph_{u3}^u - \aleph_{u4}^u + \frac{1}{2})$ ,  $\Delta y(uv_y\rho)_y (\aleph_{v3}^u - \aleph_{v4}^u + \frac{1}{2})$ ,

$\Delta z(uw_z\rho)_z (\aleph_{w3}^u - \aleph_{w4}^u + \frac{1}{2})$ ,  $\Delta x(u_x v\rho)_x (\aleph_{u3}^v - \aleph_{u4}^v + \frac{1}{2})$ ,

$\Delta y(u_y v\rho)_y (\aleph_{v3}^v - \aleph_{v4}^v + \frac{1}{2})$ ,  $\Delta z(w_z v\rho)_z (\aleph_{w3}^v - \aleph_{w4}^v + \frac{1}{2})$ ,

$\Delta x(u_x w\rho)_x (\aleph_{u3}^w - \aleph_{u4}^w + \frac{1}{2})$ ,  $\Delta y(v_y w\rho)_y (\aleph_{v3}^w - \aleph_{v4}^w + \frac{1}{2})$ ,

$\Delta z(w_z w\rho)_z (\aleph_{w3}^w - \aleph_{w4}^w + \frac{1}{2})$ ,  $\Delta y(vE_y\rho)_y (\aleph_{v3}^E - \aleph_{v4}^E + \frac{1}{2})$ ,

$\Delta x(uE_x\rho)_x (\aleph_{u3}^E - \aleph_{u4}^E + \frac{1}{2})$ ,  $\Delta z(wE_z\rho)_z (\aleph_{w3}^E - \aleph_{w4}^E + \frac{1}{2})$

возникли в уравнениях импульса и энергии из-за использования формул

(5.5.14):

$$\langle \varphi \rangle_{i-1/2,j,k}^n = \aleph_{u3}^\varphi [\varphi_{i-2,j,k}^n] \aleph_{u7}^\varphi + (1 - \aleph_{u3}^\varphi - \aleph_{u4}^\varphi) [\varphi_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u8}^\varphi + \aleph_{u4}^\varphi [\aleph_{i,j,k}^n] \aleph_{u9}^\varphi,$$

$$\langle \varphi \rangle_{i,j-1/2,k}^n = \aleph_{v3}^\varphi [\varphi_{i,j-2,k}^n] \aleph_{v7}^\varphi + (1 - \aleph_{v3}^\varphi - \aleph_{v4}^\varphi) [\varphi_{i,j-1,k}^n] \aleph_{v8}^\varphi + \aleph_{v4}^\varphi [\aleph_{i,j,k}^n] \aleph_{v9}^\varphi,$$

$$\langle \varphi \rangle_{i,j,k-1/2}^n = \aleph_{w3}^\varphi [\varphi_{i,j,k}^n - 2] \aleph_{w7}^\varphi + (1 - \aleph_{w3}^\varphi - \aleph_{w4}^\varphi) [\varphi_{i,j,k-1}^n] \aleph_{w8}^\varphi + \aleph_{w4}^\varphi [\aleph_{i,j,k}^n] \aleph_{w9}^\varphi,$$

$$\langle \varphi \rangle_{i+1,j,k}^n = \aleph_{u3}^\varphi [\varphi_{i-1,j,k}^n] \aleph_{u7}^\varphi + (1 - \aleph_{u3}^\varphi - \aleph_{u4}^\varphi) [\varphi_{i,j,k}^n] \aleph_{u8}^\varphi +$$

$$+ \aleph_{u4}^\varphi [\aleph_{i+1,j,k}^n] \aleph_{u9}^\varphi, \quad \text{и.т.д.}$$

где:

$$\varphi = \{u, v, w, E\}$$

3. Члены

$$\Delta t [\aleph_{u3}^E \aleph_{u7}^E + (1 - \aleph_{u3}^E - \aleph_{u4}^E) \aleph_{u8}^E + \aleph_{u4}^E \aleph_{u9}^E] (um)_x,$$

$$\Delta t [\aleph_{v3}^E \aleph_{v7}^E + (1 - \aleph_{v3}^E - \aleph_{v4}^E) \aleph_{v8}^E + \aleph_{v4}^E \aleph_{v9}^E] (vm)_y,$$

$$\Delta t [\aleph_{w3}^E \aleph_{w7}^E + (1 - \aleph_{w3}^E - \aleph_{w4}^E) \aleph_{w8}^E + \aleph_{w4}^E \aleph_{w9}^E] (wm)_z,$$

появились из-за использования формул (14) для расчета

$$\langle u \rangle_{i+1/2,j,k}^n, \langle u \rangle_{i-1/2,j,k}^n, \langle v \rangle_{i,j+1/2,k}^n, \langle v \rangle_{i,j-1/2,k}^n, \langle w \rangle_{i,j,k-1/2}^n, \langle w \rangle_{i,j,k+1/2}^n.$$

4. Члены

$$\frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{pp}{\rho} x \right)_x l_u \aleph_{u1}, \quad \frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{pp}{\rho} y \right)_y l_v \aleph_{v1}, \quad \frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{pp}{\rho} z \right)_z l_w \aleph_{w1}$$

ВОЗНИКЛИ ИЗ-ЗА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ



$$[u_{i,j,k}^n]_\alpha, [u_{i+1,j,k}^n]_\alpha, [v_{i,j,k}^n]_\alpha, [v_{i,j-1,k}^n]_\alpha, [v_{i,j+1,k}^n]_\alpha, \\ [w_{i,j,k-1}^n]_\alpha, [w_{i,j,k}^n]_\alpha, [w_{i,j,k+1}^n]_\alpha$$

при вычислении  $\tilde{E}_{i,j,k}^n$  на эйлеровом этапе;

5. Члены  $\{-0,5\Delta t(\rho\varphi)_u\}$ ,  $\varphi = \{1, u, v, w, E\}$

появились из-за аппроксимации  $[(\rho\varphi)_i^{n+1} - (\rho\varphi)_i^n]/\Delta t$  производных по времени  $(\rho\varphi)_t$ .

В гиперболической форме дифференциальных приближений (5.5.8) через  $\check{A}_2^\rho, \check{A}_3^\rho, \check{A}_4^\rho$  обозначены члены, появляющиеся во втором, третьем и четвертом приближениях уравнения неразрывности.

$$\check{A}_p^{2x}, \check{A}_p^{3x}, \check{A}_p^{4x} \text{ в (9), } \check{A}_p^{2y}, \check{A}_p^{3y}, \check{A}_p^{4y}, \text{ в (10), } \check{A}_p^{2z}, \check{A}_p^{3z}, \check{A}_p^{4z}$$

в (II) означает членов второго, третьего, четвертого дифференциальных приближений уравнения импульса соответственно в проекциях на оси  $ox, oy, oz$ . Через  $\check{A}_2^E, \check{A}_3^E, \check{A}_4^E$  обозначены члены, появляющиеся также во втором, третьем, четвертом дифференциальном приближениях уравнения энергии.

Члены, появляющиеся во втором дифференциальном приближении в уравнении неразрывности, будут иметь вид:

$$D_2^\rho = -\Delta x^2 (u_x \rho_x)_x (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 - \frac{1}{2})(\aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1 - \frac{1}{2}) - \Delta x^2 (\rho u_{xx})_x \aleph_{u10}^1 - \Delta x^2 (u \rho_{xx})_x \aleph_u^1 - \\ - \frac{1}{6} \Delta x^2 (\rho u_{xxx} + u \rho_{xxx}) - \Delta y^2 (\rho_y v_y)_y (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{v1}^1 - \frac{1}{2}) * (\aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1 - \frac{1}{2}) - \Delta y^2 (v \rho_{yy})_y - \\ - (\rho v_{yy})_y \Delta y^2 \aleph_{v10}^1 - \frac{1}{6} \Delta y^2 (\rho v_{yyy} + v \rho_{yyy}) - (\rho_z w_z)_z (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 - \frac{1}{2})(\aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1 - \frac{1}{2}) \Delta z^2 - \\ - \Delta z^2 (w \rho_{zz})_z \aleph_{w1}^1 - \Delta z^2 (\rho w_{zz})_z \aleph_{w10}^1 - \frac{1}{6} \Delta z^2 (\rho w_{zzz} + w \rho_{zzz}) - \Delta x^3 (\rho_{xx} u_x)_x \aleph_{u1}^1 (\aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1 - \frac{1}{2}) - \\ - \Delta x^3 (\rho_x u_{xx})_x \aleph_{u10}^1 (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{6} \Delta x^3 (\aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1 - \aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1) (\rho_x u_{xxx} + \\ + u_x \rho_{xxx}) + \frac{1}{2} \Delta x^3 (u_x \rho_{xxx} \aleph_{u1}^1 + \rho_x u_{xxx} \aleph_{u10}^1) - \frac{1}{4} \Delta x^3 (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 + \aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1) \rho_{xx} u_{xx} - \\ - \Delta y^3 (v_y \rho_{yy})_y \aleph_{v1}^1 (\aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1 - \frac{1}{2}) - \Delta y^3 (\rho_y v_{yy})_y \aleph_{v10}^1 (\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{6} \Delta y^3 (v_y \rho_{yyy} + \\ + \rho_y v_{yyy}) (\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 + \aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1 - 1) + \frac{1}{2} \Delta y^3 (v_y \rho_{yyy} \aleph_{v1}^1 + \rho_y v_{yyy} \aleph_{v10}^1) - \frac{1}{4} \Delta y^3 \rho_{yy} v_{yy} (\aleph_{v2}^1 - \\ - \aleph_{v1}^1 + \aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1 - 1) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\Delta z^3 (w_z \rho_{zz})_z \aleph_{w1}^1 (\aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1 - \frac{1}{2}) - \Delta z^3 (\rho_z w_{zz})_z \aleph_{w10}^1 (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{6} \Delta z^3 (w_z \rho_{zzz} + \\
 & + \rho_z v_{zzz}) (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 + \aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1 - 1) + \frac{1}{2} \Delta z^3 (w_z \rho_{zzz} \aleph_{w1}^1 + \rho_z w_{zzz} \aleph_{w10}^1) - \frac{1}{4} \Delta z^3 \rho_{zz} w_{zz} (\aleph_{w2}^1 - \\
 & - \aleph_{w1}^1 + \aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1 - 1) + \frac{1}{2} \Delta t \Delta x p_{xxx} \aleph_{u1}^1 (\aleph_{u14}^1 \aleph_{u11}^1 + \aleph_{u13}^1 (\aleph_{u11}^1 + \aleph_{u10}^1 - 1) - 3 \aleph_{u12}^1 \aleph_{u10}^1) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta t \Delta y p_{yyy} \aleph_{v1}^1 (\aleph_{v14}^1 \aleph_{v11}^1 + \aleph_{v13}^1 (\aleph_{v11}^1 + \aleph_{v10}^1 - 1) - 3 \aleph_{v12}^1 \aleph_{v10}^1) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta t \Delta z p_{zzz} \aleph_{w1}^1 (\aleph_{w14}^1 \aleph_{w11}^1 + \aleph_{w13}^1 (\aleph_{w11}^1 + \aleph_{w10}^1 - 1) - 3 \aleph_{w12}^1 \aleph_{w10}^1) - \Delta t \Delta x \aleph_{u1}^1 \left( \frac{p_{xx} \rho_x}{\rho} l_{1u}^{2\rho} + \right. \\
 & + \frac{p_x \rho_{xx}}{\rho} l_{2u}^{2\rho} + 2 \frac{p_x \rho_x^2}{\rho^2} - l_{2u}^{2\rho} \Big) - \Delta t \Delta y \aleph_{v1}^1 \left( \frac{p_{yy} \rho_y}{\rho} l_{1v}^{2\rho} + \frac{p_y \rho_{yy}}{\rho} l_{2v}^{2\rho} + 2 \frac{p_y \rho_y^2}{\rho^2} - l_{2v}^{2\rho} \right) - \\
 & - \Delta t \Delta z \aleph_{w1}^1 \left( \frac{p_{zz} \rho_z}{\rho} l_{1w}^{2\rho} + \frac{p_z \rho_{zz}}{\rho} l_{2w}^{2\rho} + 2 \frac{p_z \rho_z^2}{\rho^2} - l_{2w}^{2\rho} \right);
 \end{aligned}$$

где коэффициенты  $l_{1u}^{2\rho}, l_{2u}^{2\rho}, l_{1v}^{2\rho}, l_{2v}^{2\rho}, l_{1w}^{2\rho}, l_{2w}^{2\rho}$ ,

содержащиеся в (II) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 l_{1\varphi}^{2\rho} &= \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + 1) + (1 - \aleph_{\varphi 11}^1 - \aleph_{\varphi 10}^1) \aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + 3) + \\
 & + \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + 5), \\
 l_{2\varphi}^{2\rho} &= \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + \frac{1}{2}) + (1 - \aleph_{\varphi 10}^1 - \aleph_{\varphi 11}^1) \aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + \frac{3}{2}) + \\
 & + \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + \frac{5}{2}),
 \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

Здесь  $\varphi = \{u, v, w\}$ .

Выпишем коэффициенты при третьих производных:

$$\rho_{xxx}, u_{xxx}, E_{xxx}, \rho_{yyy}, v_{yyy}, E_{yyy}, \rho_{zzz}, w_{zzz}, E_{zzz},$$

которые являются элементами матрицы аппроксимационной дисперсии и соответственно записываются в следующем виде

$$\begin{aligned}
 b_{11}^x &= -\Delta x^2 u \left( \frac{1}{6} + \aleph_{u1}^1 \right) - \Delta x^3 u_x [\aleph_{u1}^1 (\aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1 - 1) + \frac{1}{6} (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 + \aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1 - 1)], \\
 b_{12}^x &= -\Delta x^2 \rho \left( \frac{1}{6} + \aleph_{u10}^1 \right) - \Delta x^3 \rho_x [\aleph_{u10}^1 (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 - 1) + \frac{1}{6} (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 + \aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1 - 1)], \\
 b_{13}^x &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11}^y &= -\Delta y^2 v \left( \frac{1}{6} + \aleph_{v1}^1 \right) - \Delta y^3 v_y \left[ \aleph_{v1}^1 (\aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1 - 1) + \frac{1}{6} (\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 + \aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1 - 1) \right], \\
 b_{12}^y &= -\Delta y^2 \rho \left( \frac{1}{6} + \aleph_{v10}^1 \right) - \Delta y^3 \rho_y \left( \aleph_{v10}^1 (\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 - 1) + \frac{1}{6} (\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 + \aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1 - 1) \right), \\
 b_{13}^y &= 0, \\
 b_{11}^z &= -\Delta z^2 w \left( \frac{1}{6} + \aleph_{w1}^1 \right) - \Delta z^3 w_z \left( \aleph_{w1}^1 (\aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1 - 1) + \frac{1}{6} (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 + \aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1 - 1) \right), \\
 b_{12}^z &= -\Delta z^2 \rho \left( \frac{1}{6} + \aleph_{w10}^1 \right) - \Delta z^3 \rho_z \left( \aleph_{w10}^1 (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 - 1) + \frac{1}{6} (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 + \aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1 - 1) \right), \\
 b_{13}^z &= 0.
 \end{aligned}$$

Члены, возникающие в третьем дифференциальном приближении в уравнении неразрывности, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 D_3^\rho &= -\frac{1}{12} \left[ \Delta x^3 \rho u_{xxx} (\aleph_{u11}^1 - 7\aleph_{u10}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta y^3 \rho v_{yyy} (\aleph_{v11}^1 - 7\aleph_{v10}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta z^3 \rho w_{zzz} (\aleph_{w11}^1 - \right. \\
 &- 7\aleph_{w10}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta x^3 u \rho_{xxx} (\aleph_{u2}^1 - 7\aleph_{u1}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta y^3 v \rho_{yyy} (\aleph_{v2}^1 - 7\aleph_{v1}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta z^3 w \rho_{zzz} (\aleph_{w2}^1 - \\
 &- 7\aleph_{w1}^1 - \frac{1}{2}) \left. \right] - \frac{1}{12} \Delta x^4 (u_x \rho_{xxx} K_{1u}^{3\rho} + 2u_{xx} \rho_{xxx} K_{2u}^{3\rho} + 2\rho_{xx} u_{xxx} K_{3u}^{3\rho} + \rho_x u_{xxx} K_{4u}^{3\rho}) - \\
 &- \frac{1}{12} \Delta y^4 (v_y \rho_{yyy} K_{1v}^{3\rho} + 2v_{yy} \rho_{yyy} K_{2v}^{3\rho} + 2\rho_{yy} v_{yyy} K_{3v}^{3\rho} + \rho_y v_{yyy} K_{4v}^{3\rho}) - \frac{1}{12} \Delta z^4 (w_z \rho_{zzz} K_{1w}^{3\rho} + \\
 &+ 2w_{zz} \rho_{zzz} K_{2w}^{3\rho} + 2\rho_{zz} w_{zzz} K_{3w}^{3\rho} + \rho_z w_{zzz} K_{4w}^{3\rho}) - \frac{1}{2\rho} \Delta t \Delta x^2 \aleph_{u1} (\rho_x p_{xxx} l_{1u}^{3\rho} + \rho_{xx} p_{xx} l_{2u}^{3\rho} + \rho_{xxx} p_x l_{3u}^{3\rho}) - \\
 &- \frac{1}{2\rho} \Delta t \Delta y^2 \aleph_{v1} (\rho_y p_{yyy} l_{1v}^{3\rho} + \rho_{yy} p_{yy} l_{2v}^{3\rho} + \rho_{yyy} p_y l_{3v}^{3\rho}) - \frac{1}{3} \Delta t \Delta x^2 p_{xxx} \aleph_{u1} (\aleph_{u14}^1 \aleph_{u11}^1 + \\
 &+ \aleph_{u13}^1 (1 - \aleph_{u10}^1 - \aleph_{u11}^1) + 4\aleph_{u12}^1 \aleph_{u10}^1) + \frac{1}{3} \Delta t \Delta y^2 p_{yyy} \aleph_{v1} (\aleph_{v14}^1 \aleph_{v11}^1 + \aleph_{v13}^1 (1 - \aleph_{v10}^1 - \aleph_{v11}^1) + \\
 &+ 4\aleph_{v12}^1 \aleph_{v10}^1) + \frac{1}{3} \Delta t \Delta z^2 p_{zzz} \aleph_{w1} (\aleph_{w14}^1 \aleph_{w11}^1 + \aleph_{w13}^1 (1 - \aleph_{w10}^1 - \aleph_{w11}^1) + 4\aleph_{w12}^1 \aleph_{w10}^1) - \\
 &- \Delta t \Delta x^2 \aleph_{u1} \left( \frac{1}{\rho} 2(p_{xx} \rho_x^2 n_{1u}^{3\rho} + p_x \rho_{xx} \rho_x n_{2u}^{3\rho}) + x_3^{\frac{p}{\rho}} x^3 n_{3u}^{3\rho} \right) - \Delta t \Delta y^2 \aleph_{v1} \left( \frac{1}{\rho} 2(p_{yy} \rho_y^2 n_{1v}^{3\rho} + \right. \\
 &+ p_y \rho_{yy} \rho_y n_{2v}^{3\rho}) + y_3^{\frac{p}{\rho}} y^3 n_{3v}^{3\rho} \left. \right) - \Delta t \Delta z^2 \aleph_{w1} \left( \frac{1}{\rho} 2(p_{zz} \rho_z^2 n_{1w}^{3\rho} + p_z \rho_{zz} \rho_z n_{2w}^{3\rho}) + z_3^{\frac{p}{\rho}} z^3 n_{3w}^{3\rho} \right) - \\
 &- \frac{1}{2\rho} \Delta t \Delta z^2 \aleph_{w1} (\rho_z p_{zzz} l_{1w}^{3\rho} + \rho_{zz} p_{zz} l_{2w}^{3\rho} + \rho_{zzz} p_z l_{3w}^{3\rho}) - \frac{\rho}{24} tttt \Delta t^3;
 \end{aligned}$$

Коэффициенты:  $K_{j\varphi}^{3\rho}, l_{i\varphi}^{3\rho}, n_{i\varphi}^{3\rho}$ ,

где:  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\varphi = \{u, v, w\}$

определяется из выражений:  $n_{3\varphi}^{3\rho} = 2\aleph_{\varphi14}^1 \aleph_{\varphi11}^1 (\aleph_{\varphi2}^1 - \aleph_{\varphi1}^1 - 1) +$



$$\aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1) * (1 - \aleph_{\varphi 10}^1 - \aleph_{\varphi 11}^1),$$

$$K_{1\varphi}^{3\rho} = (\aleph_{\varphi 2}^1 - 7\aleph_{\varphi 1}^1 - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 11}^1 - \aleph_{\varphi 10}^1) - \frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 2}^1 - 15\aleph_{\varphi 1}^1 - 1),$$

$$K_{2\varphi}^{3\rho} = \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - 4\aleph_{\varphi 1}^1 - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 10}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - 10\aleph_{\varphi 1}^1 - \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 2}^1 - 7\aleph_{\varphi 1}^1 - 1),$$

$$K_{3\varphi}^{3\rho} = \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1 - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 10}^1 (4\aleph_{\varphi 2}^1 - 10\aleph_{\varphi 1}^1 - \frac{7}{2}) - \frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 2}^1 - 3\aleph_{\varphi 1}^1 - 1),$$

$$K_{4\varphi}^{3\rho} = \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1 - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 10}^1 (7\aleph_{\varphi 2}^1 - 7\aleph_{\varphi 1}^1 - \frac{15}{2}) - \frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1 - 1),$$

$$l_{1\varphi}^{3\rho} = \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1) + \aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + 4)(\aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 10}^1 - 1) +$$

$$+ \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (3\aleph_{\varphi 2}^1 - 3\aleph_{\varphi 1}^1 - 10),$$

$$l_{2\varphi}^{3\rho} = -\aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 + \aleph_{\varphi 2}^1 + 1) + \aleph_{\varphi 13}^1 (3\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + 5)(\aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 10}^1 - 1) +$$

$$+ \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (3\aleph_{\varphi 2}^1 - 5\aleph_{\varphi 1}^1 - 3),$$

$$l_{3\varphi}^{3\rho} = -(2\aleph_{\varphi 1}^1 + 3)(\aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 - \aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 10}^1 - 1)) + \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (2\aleph_{\varphi 1}^1 + 1),$$

$$n_{1\varphi}^{3\rho} = \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1) + 2\aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1 - 1)(1 - \aleph_{\varphi 11}^1 - \aleph_{\varphi 10}^1) +$$

$$+ \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (3\aleph_{\varphi 2}^1 - 3\aleph_{\varphi 1}^1 - 2),$$

$$n_{2\varphi}^{3\rho} = -\aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (4\aleph_{\varphi 2}^1 - 6\aleph_{\varphi 1}^1 - 7) + \aleph_{\varphi 13}^1 (2\aleph_{\varphi 2}^1 - 4\aleph_{\varphi 1}^1 - 3)(1 - \aleph_{\varphi 11}^1 - \aleph_{\varphi 10}^1) -$$

$$- \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (2\aleph_{\varphi 1}^1 + 1),$$

$$n_{3\varphi}^{3\rho} = 2\aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1 - 1) + \aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 - \aleph_{\varphi 1}^1)(1 - \aleph_{\varphi 10}^1 - \aleph_{\varphi 11}^1);$$

Выпишем коэффициенты при производных четвертого порядка:

$$\rho_{xxxx}, u_{xxxx}, E_{xxxx}, \rho_{yyyy}, v_{yyyy}, E_{yyyy}, \rho_{zzzz}, w_{zzzz}, E_{zzzz},$$

Принимаем получаемые выражения для коэффициентов за элементы первой строки бидиссипативной матрицы аппроксимации в третьем приближении. Тогда имеем:

$$c_{11}^x = -\frac{1}{12}[\Delta x^3 u (\aleph_{u2}^1 - 7\aleph_{u1}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta x^4 u_x (\aleph_{u2}^1 - 7\aleph_{u1}^1 - \frac{1}{2})(\aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1) - \frac{1}{2}(\aleph_{u2}^1 - 15\aleph_{u1}^1 - 1)],$$

$$c_{12}^x = -\frac{1}{12}[\Delta x^3 \rho (\aleph_{u11}^1 - 7\aleph_{u10}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta x^4 \rho_x (\aleph_{u11}^1 (\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 - \frac{1}{2}) - \aleph_{u10}^1 (7\aleph_{u2}^1 - 7\aleph_{u1}^1 - \frac{15}{2}) - \frac{1}{2}(\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 - 1)],$$

$$c_{13}^x = 0,$$



$$c_{11}^y = -\frac{1}{12} [\Delta y^3 v (\aleph_{v2}^1 - 7\aleph_{v1}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta y^4 v_y (\aleph_{v2}^1 - 7\aleph_{v1}^1 - \frac{1}{2}) (\aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1) - \frac{1}{2} (\aleph_{v2}^1 - 15\aleph_{v1}^1 - 1)],$$

$$c_{12}^y = -\frac{1}{12} [\Delta y^3 \rho (\aleph_{v11}^1 - 7\aleph_{v10}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta y^4 \rho_y (\aleph_{v11}^1 (\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 - \frac{1}{2}) - \aleph_{v10}^1 (7\aleph_{v2}^1 - 7\aleph_{v1}^1 - \frac{15}{2}) - \frac{1}{2} (\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 - 1)],$$

$$c_{13}^y = 0,$$

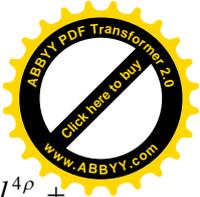
$$c_{11}^z = -\frac{1}{12} [\Delta z^3 w (\aleph_{w2}^1 - 7\aleph_{w1}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta z^4 w_x (\aleph_{w2}^1 - 7\aleph_{w1}^1 - \frac{1}{2}) (\aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1) - \frac{1}{2} (\aleph_{w2}^1 - 15\aleph_{w1}^1 - 1)],$$

$$c_{12}^z = -\frac{1}{12} [\Delta z^3 \rho (\aleph_{w11}^1 - 7\aleph_{w10}^1 - \frac{1}{2}) + \Delta z^4 \rho_z (\aleph_{w11}^1 (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 - \frac{1}{2}) - \aleph_{w10}^1 (7\aleph_{w2}^1 - 7\aleph_{w1}^1 - \frac{15}{2}) - \frac{1}{2} (\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 - 1)],$$

$$c_{13}^z = 0;$$

Члены, появляющиеся в четвертом дифференциальном приближении в уравнении неразрывности, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} D_4^{\rho} = & -\frac{1}{120} [\Delta x^4 \rho u_{xxxx} (30\aleph_{u10}^1 + 1) + \Delta y^4 \rho v_{yyyy} (30\aleph_{v10}^1 + 1) + \\ & + \Delta z^4 \rho w_{zzzz} (30\aleph_{w10}^1 + 1) + \Delta x^4 u \rho_{xxxx} (30\aleph_{u1}^1 + 1) + \\ & + \Delta x^5 u_x \rho_{xxxx} ((30\aleph_{u1}^1 + 1)(\aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1) + \aleph_{u2}^1 - 31\aleph_{u1}^1 - 1) + \\ & + \Delta x^5 \rho_x u_{xxxx} (\aleph_{u11}^1 + \aleph_{u10}^1 (30(\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1) - 31) + \aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 - 1) + \\ & + \Delta y^5 v_y \rho_{yyyy} ((30\aleph_{v1}^1 + 1)(\aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1) + \aleph_{v2}^1 - 31\aleph_{v1}^1 - 1) + \\ & + \Delta y^5 \rho_y v_{yyyy} (\aleph_{v11}^1 + \aleph_{v10}^1 (30(\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1) - 31) + \aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 - 1) + \\ & + \Delta z^5 w_z \rho_{zzzz} ((30\aleph_{w1}^1 + 1)(\aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1) + \aleph_{w2}^1 - 31\aleph_{w1}^1 - 1) + \\ & + \Delta z^5 \rho_z w_{zzzz} (\aleph_{w11}^1 + \aleph_{w10}^1 (30(\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1) - 31) + \aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 - 1)] - \\ & - \frac{1}{48} [\Delta x^5 \rho_{xxx} u_{xx} (\aleph_{u11}^1 (16\aleph_{u1}^1 + 1) + \aleph_{u10}^1 (4\aleph_{u2}^1 - 44\aleph_{u1}^1 - 3) + \aleph_{u2}^1 - 15\aleph_{u1}^1 - 1) + \\ & + \Delta x^5 \rho_{xx} u_{xxx} (\aleph_{u11}^1 (4\aleph_{u1}^1 + 1) + \aleph_{u10}^1 (16\aleph_{u2}^1 - 44\aleph_{u1}^1 - 15) + \aleph_{u2}^1 - 3\aleph_{u1}^1 - 1) + \\ & + \Delta y^5 \rho_{yyy} v_{yy} (\aleph_{v11}^1 (16\aleph_{v1}^1 + 1) + \aleph_{v10}^1 (4\aleph_{v2}^1 - 44\aleph_{v1}^1 - 3) + \aleph_{v2}^1 - 15\aleph_{v1}^1 - 1) + \\ & + \Delta y^5 \rho_{yy} v_{yyy} (\aleph_{v11}^1 (4\aleph_{v1}^1 + 1) + \aleph_{v10}^1 (16\aleph_{v2}^1 - 44\aleph_{v1}^1 - 15) + \aleph_{v2}^1 - 3\aleph_{v1}^1 - 1) + \\ & + \Delta z^5 \rho_{zzz} w_{zz} (\aleph_{w11}^1 (16\aleph_{w1}^1 + 1) + \aleph_{w10}^1 (4\aleph_{w2}^1 - 44\aleph_{w1}^1 - 3) + \aleph_{w2}^1 - 15\aleph_{w1}^1 - 1) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \Delta z^5 \rho_{zz} w_{zzzz} (\aleph_{w11}^1 (4\aleph_{w1}^1 + 1) + \aleph_{w10}^1 (16\aleph_{w2}^1 - 44\aleph_{w1}^1 - 15) + \aleph_{w2}^1 p_{xxx} \rho_{xx} l_{2u}^{4\rho} + \frac{1}{6} \bar{\rho}^1 p_{xx} \rho_{xxx} l_{3u}^{4\rho} + \\
& + \frac{1}{12} \bar{\rho}^1 p_x \rho_{xxx} l_{4u}^{4\rho} + \frac{1}{6} \bar{\rho}^2 p_{xxx} \rho_x^2 k_{1u}^{4\rho} + \frac{1}{3} \bar{\rho}^2 p_x \rho_{xxx} \rho_x k_{2u}^{4\rho} + \\
& + \bar{\rho}^2 p_x \rho_{xx} \rho_{xx} k_{3u}^{4\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho}^2 p_x \rho_{xx}^2 k_{4u}^{4\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho}^3 p_x \rho_{xx} \rho_x k_{5u}^{4\rho} - \frac{1}{8} p_{xxxx} k_{6u}^{4\rho} \} - \\
& - \aleph_{v1} \Delta t \Delta y^3 \left\{ \frac{1}{3} \bar{\rho}^1 p_{yyyy} \rho_y l_{1v}^{4\rho} + \frac{1}{12} \bar{\rho}^1 p_{yyy} \rho_{yy} l_{2v}^{4\rho} + \frac{1}{6} \bar{\rho}^1 p_{yy} \rho_{yyy} l_{3v}^{4\rho} + \right. \\
& + \frac{1}{12} \bar{\rho}^1 p_y \rho_{yyy} l_{4v}^{4\rho} + \frac{1}{6} \bar{\rho}^2 p_{yyy} \rho_y^2 k_{1v}^{4\rho} + \frac{1}{3} \bar{\rho}^2 p_y \rho_{yyy} \rho_y k_{2v}^{4\rho} + \\
& + \bar{\rho}^2 \rho_y p_{yy} \rho_{yy} k_{3v}^{4\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho}^2 p_y \rho_{yy}^2 k_{4v}^{4\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho}^3 p_y \rho_{yy} \rho_y k_{5v}^{4\rho} - \left. \frac{1}{8} p_{yyyy} k_{6v}^{4\rho} \right\} - \\
& - \aleph_{w1} \Delta t \Delta z^3 \left\{ \frac{1}{3} \bar{\rho}^1 p_{zzzz} \rho_z l_{1w}^{4\rho} + \frac{1}{12} \bar{\rho}^1 p_{zzz} \rho_{zz} l_{2w}^{4\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho}^1 p_{zz} \rho_{zzz} l_{3w}^{4\rho} + \right. \\
& + \frac{1}{12} \bar{\rho}^1 p_z \rho_{zzzz} l_{4w}^{4\rho} + \frac{1}{6} \bar{\rho}^2 p_{zzz} \rho_z^2 k_{1w}^{4\rho} + \frac{1}{3} \bar{\rho}^2 p_z \rho_{zzz} \rho_z k_{2w}^{4\rho} + \\
& + \bar{\rho}^2 \rho_z p_{zz} \rho_{zz} k_{3w}^{4\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho}^2 p_{zz}^2 k_{4w}^{4\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho}^3 p_z \rho_{zz} \rho_z^2 k_{5w}^{4\rho} - \left. \frac{1}{8} p_{zzzz} k_{6w}^{4\rho} \right\} - \\
& - \rho_{uuu} / 120 \Delta t^4 \cdot
\end{aligned}$$

Коэффициенты, содержащиеся в вышенаписанном четвертом приближении зависят от многочисленных параметров и определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned}
l_{1\varphi}^{4\rho} &= \aleph_{\varphi14}^1 \aleph_{\varphi11}^1 (\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi2}^1 + 1) - \aleph_{\varphi13}^1 (\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi3}^1 + 3)(\aleph_{\varphi11}^1 + \aleph_{\varphi10}^1 - 1) + \\
& + \aleph_{\varphi12}^1 \aleph_{\varphi10}^1 (4\aleph_{\varphi1}^1 - 4\aleph_{\varphi2}^1 + 11), \\
l_{2\varphi}^{4\rho} &= \aleph_{\varphi14}^1 \aleph_{\varphi11}^1 (2 - 5\aleph_{\varphi2}^1 - \aleph_{\varphi1}^1) - \aleph_{\varphi13}^1 (11\aleph_{\varphi1}^1 - 5\aleph_{\varphi5}^1 + 18)(\aleph_{\varphi11}^1 + \aleph_{\varphi10}^1 - 1) + \\
& + \aleph_{\varphi12}^1 \aleph_{\varphi10}^1 (35\aleph_{\varphi1}^1 - 17\aleph_{\varphi2}^1 + 28), \\
l_{3\varphi}^{4\rho} &= \aleph_{\varphi14}^1 \aleph_{\varphi11}^1 (\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi2}^1 + 1) - \aleph_{\varphi13}^1 (7\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi2}^1 + 9)(\aleph_{\varphi11}^1 + \aleph_{\varphi10}^1 - 1) + \\
& + \aleph_{\varphi12}^1 \aleph_{\varphi10}^1 (13\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi2}^1 + 5), \\
l_{4\varphi}^{4\rho} &= \aleph_{\varphi14}^1 \aleph_{\varphi11}^1 (7\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi2}^1 + \frac{17}{2}) - \aleph_{\varphi13}^1 (7\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi2}^1 + \frac{15}{2})(\aleph_{\varphi11}^1 + \aleph_{\varphi10}^1 - 1) + \\
& + \aleph_{\varphi12}^1 \aleph_{\varphi10}^1 (7\aleph_{\varphi1}^1 - \aleph_{\varphi2}^1 + \frac{1}{2}), \\
K_{1\varphi}^{4\rho} &= \aleph_{\varphi14}^1 \aleph_{\varphi11}^1 (\aleph_{\varphi2}^1 - \aleph_{\varphi1}^1 + 5) - \aleph_{\varphi13}^1 (8(\aleph_{\varphi2}^1 - \aleph_{\varphi1}^1) - 9)(\aleph_{\varphi11}^1 + \aleph_{\varphi10}^1 - 1) - \\
& - \aleph_{\varphi12}^1 \aleph_{\varphi10}^1 (79\aleph_{\varphi2}^1 - \aleph_{\varphi1}^1) - 13), \\
K_{2\varphi}^{4\rho} &= \aleph_{\varphi14}^1 \aleph_{\varphi11}^1 (14\aleph_{\varphi1}^1 - 5\aleph_{\varphi2}^1 + 11) - \aleph_{\varphi13}^1 (11\aleph_{\varphi1}^1 - 5\aleph_{\varphi2}^1 + 6)(\aleph_{\varphi11}^1 + \aleph_{\varphi10}^1 - 1) + \\
& + \aleph_{\varphi12}^1 \aleph_{\varphi10}^1 (5\aleph_{\varphi1}^1 - 2\aleph_{\varphi2}^1 + 1),
\end{aligned}$$



$$K_{3\varphi}^{4\rho} = \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 \aleph_{\varphi 1}^1 + \aleph_{\varphi 13}^1 (3\aleph_{\varphi 2}^1 - 5\aleph_{\varphi 1}^1 - 3)(\aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 10}^1 - 1) + \\ + \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (4\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + 2),$$

$$K_{4\varphi}^{4\rho} = \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (7\aleph_{\varphi 1}^1 - 3\aleph_{\varphi 2}^1 + \frac{9}{2}) - \aleph_{\varphi 13}^1 (5\aleph_{\varphi 1}^1 - 3\aleph_{\varphi 2}^1 + \frac{3}{2})(\aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 10}^1 - 1) + \\ + \aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1 (\aleph_{\varphi 1}^1 - \aleph_{\varphi 2}^1 + \frac{1}{2}),$$

$$K_{5\varphi}^{4\rho} = \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 (12\aleph_{\varphi 1}^1 - 8\aleph_{\varphi 2}^1 + 8) - \aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 2}^1 + \aleph_{\varphi 1}^1)(\aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 10}^1 - 1),$$

$$K_{6\varphi}^{4\rho} = \aleph_{\varphi 14}^1 \aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 13}^1 (\aleph_{\varphi 11}^1 + \aleph_{\varphi 10}^1 - 1) - 7\aleph_{\varphi 12}^1 \aleph_{\varphi 10}^1,$$

Здесь, также  $\varphi = \{u, v, w\}$ .

Составили из коэффициентов при производных пятого порядка:

$$\rho_{xxxxx}, u_{xxxxx}, E_{xxxxx}, \rho_{yyyyy}, v_{yyyyy}, E_{yyyyy}, \rho_{zzzzz}, w_{zzzzz}, E_{zzzzz}$$

элементы первой строки матрицы:

$$d_{11}^x = -\frac{1}{120} [\Delta x^4 u (30\aleph_{u1}^1 + 1) + \Delta x^4 u_x (30\aleph_{u1}^1 + 1)(\aleph_{u11}^1 - \aleph_{u10}^1) + \aleph_{u2}^1 - 31\aleph_{u1}^1 - 1],$$

$$d_{12}^x = -\frac{1}{120} [\Delta x^4 \rho (30\aleph_{u10}^1 + 1) + \Delta x^5 \rho_x (\aleph_{u11}^1 + \aleph_{u10}^1 (30(\aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1) - 31) + \aleph_{u2}^1 - \aleph_{u1}^1 - 1)],$$

$$d_{13}^x = 0,$$

$$d_{11}^y = -\frac{1}{120} [\Delta y^4 v (30\aleph_{v1}^1 + 1) + \Delta y^4 v_y (30\aleph_{v1}^1 + 1)(\aleph_{v11}^1 - \aleph_{v10}^1) + \aleph_{v2}^1 - 31\aleph_{v1}^1 - 1],$$

$$d_{12}^y = -\frac{1}{120} [\Delta y^4 \rho (30\aleph_{v10}^1 + 1) + \Delta y^5 \rho_y (\aleph_{v11}^1 + \aleph_{v10}^1 (30(\aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1) - 31) + \aleph_{v2}^1 - \aleph_{v1}^1 - 1)],$$

$$d_{13}^y = 0,$$

$$d_{11}^z = -\frac{1}{120} [\Delta z^4 w (30\aleph_{w1}^1 + 1) + \Delta z^4 w_z (30\aleph_{w1}^1 + 1)(\aleph_{w11}^1 - \aleph_{w10}^1) + \aleph_{w2}^1 - 31\aleph_{w1}^1 - 1],$$

$$d_{12}^z = -\frac{1}{120} [\Delta z^4 \rho (30\aleph_{w10}^1 + 1) + \Delta z^5 \rho_z (\aleph_{w11}^1 + \aleph_{w10}^1 (30(\aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1) - 31) + \aleph_{w2}^1 - \aleph_{w1}^1 - 1)],$$

$$d_{13}^z = 0$$

Переходим к рассмотрению дифференциальных приближений разностных схем уравнений закона сохранения количества движения.

Члены дифференциальных приближений, появляющиеся во втором дифференциальном приближении в уравнении импульса (проекция на ось OX), будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{A}_p^{2x} = & -\left\{ \rho u u_{xxx} (\mathfrak{N}_{u3}^u + \mathfrak{N}_{u10}^u + \frac{1}{3}) \Delta x^2 + \Delta y^2 \rho u v_{yyy} (\mathfrak{N}_{v10}^u + \frac{1}{6}) + \right. \\
 & + \Delta z^2 \rho u w_{zzz} (\mathfrak{N}_{w10}^u + \frac{1}{6}) + \Delta y^2 \rho v u_{yyy} (\mathfrak{N}_{v3}^u + \frac{1}{6}) + \Delta z^2 \rho w u_{zzz} (\mathfrak{N}_{w3}^u + \frac{1}{6}) + \\
 & + \Delta x^2 u^2 \rho_{xxx} (\mathfrak{N}_{u1}^u + \frac{1}{6}) + \Delta y^2 v u \rho_{yyy} (\mathfrak{N}_{v1}^u + \frac{1}{6}) + \Delta z^2 w u \rho_{zzz} (\mathfrak{N}_{w1}^u + \frac{1}{6}) + \\
 & \Delta x^2 (l_{1u}^{2u} \rho u_{xx} u_x + l_{4u}^{2u} u \rho_{xx} u_x + l_{5u}^{2u} u \rho_x u_{xx} + l_{10u}^{2u} \rho_x u_x^2) + \\
 & + \Delta y^2 (l_{2v}^{2u} \rho u_{yy} v_y + l_{3v}^{2u} \rho u_y v_{yy} + l_{6v}^{2u} u \rho_{yy} v_y + l_{7v}^{2u} u \rho_y v_{yy} + l_{8v}^{2u} v \rho_{yy} u_y + \\
 & + l_{9v}^{2u} v \rho_y u_{yy} + l_{10v}^{2u} \rho_y u_y v_y) + \\
 & + \Delta z^2 (l_{2w}^{2u} \rho u_{zz} w_z + l_{3w}^{2u} \rho u_z w_{zz} + l_{6w}^{2u} u \rho_{zz} w_z + l_{7w}^{2u} u \rho_z w_{zz} + l_{8w}^{2u} w \rho_{zz} u_z + \\
 & + l_{9w}^{2u} w \rho_z u_{zz} + l_{10w}^{2u} \rho_z u_z w_z) + \\
 & + \Delta t \Delta x \mathfrak{N}_{u1} [l_{11u}^{2u} u p_{xx} \rho_x \rho^{-1} + l_{12u}^{2u} \rho^{-1} u p_x \rho_{xx} + (l_{17u}^{2u} + l_{18u}^{2u}) \rho^{-1} p_x \rho_x u_x + \\
 & + (l_{21u}^{2u} + l_{20u}^{2u}) \rho^{-2} u p_x \rho_x^2 + (l_{22u}^{2u} + l_{23u}^{2u}) u p_{xxx} + (l_{24u}^{2u} + l_{25u}^{2u}) p_{xx} u_x + \\
 & + (l_{26u}^{2u} + l_{27u}^{2u}) p_x u_{xx}] + \Delta t \Delta y [\mathfrak{N}_{v1} (l_{13v}^{2u} \rho^{-1} u p_{yy} \rho_y + l_{14v}^{2u} \rho^{-1} u p_y \rho_{yy} + \\
 & + l_{19v}^{2u} \rho^{-1} p_y \rho_y u_y + \rho^{-2} u p_y \rho_y^2 l_{20v}^{2u} + l_{22v}^{2u} u p_{yyy} + l_{25v}^{2u} p_{yy} u_y + l_{26v}^{2u} p_y u_{yy}) + \\
 & + \mathfrak{N}_u (l_{15v}^{2u} \bar{\rho}^{-1} p_{xy} \rho_y v + l_{16v}^{2u} \bar{\rho}^{-1} v p_x \rho_{yy} + l_{17v}^{2u} \bar{\rho}^{-1} p_x \rho_y v_y + l_{21v}^{2u} \bar{\rho}^{-2} v p_x \rho_y^2 + \\
 & + l_{23v}^{2u} v p_{xyy} + l_{24v}^{2u} p_{xy} v_y + l_{27v}^{2u} p_x v_{yy})] + \Delta t \Delta z [\mathfrak{N}_{w1} (l_{13w}^{2u} \rho^{-1} u p_{zz} \rho_z + l_{14w}^{2u} \rho^{-1} u p_z \rho_{zz} + \\
 & + l_{19z}^{2u} \rho^{-1} p_z \rho_z u_z + \rho^{-2} u p_z \rho_z^2 l_{20w}^{2u} + l_{22w}^{2u} u p_{zzz} + l_{25w}^{2u} p_{zz} u_z + l_{26w}^{2u} p_z u_{zz}) + \\
 & + \mathfrak{N}_u (l_{15w}^{2u} \bar{\rho}^{-1} p_{xz} \rho_z w + l_{16w}^{2u} \bar{\rho}^{-1} w p_x \rho_{zz} + l_{17w}^{2u} \bar{\rho}^{-1} p_x \rho_z w_z + l_{21w}^{2u} \bar{\rho}^{-2} w p_x \rho_z^2 + \\
 & + l_{23w}^{2u} w p_{xzz} + l_{24w}^{2u} p_{xz} w_z + l_{27w}^{2u} p_x w_{zz})] + \frac{(\rho u)}{6} t t t \Delta t^2 + \frac{p}{6} x x x \Delta x^2 \}
 \end{aligned}$$

Члены дифференциальных приближений, появляющиеся во втором дифференциальном приближении в уравнении импульса (проекция на ось OY) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_p^{2y} = & -\left\{ \rho u v_{xxx} (\mathfrak{N}_{u3}^v + \frac{1}{6}) \Delta x^2 + \Delta x^2 \rho v u_{xxx} (\mathfrak{N}_{u10}^v + \frac{1}{6}) + \Delta y^2 \rho v v_{yyy} (\mathfrak{N}_{v3}^v + \mathfrak{N}_{v10}^v + \frac{1}{3}) + \right. \\
 & + \Delta z^2 \rho v w_{zzz} (\mathfrak{N}_{w10}^v + \frac{1}{6}) + \Delta z^2 \rho w v_{zzz} (\mathfrak{N}_{w3}^v + \frac{1}{6}) + \Delta x^2 u v \rho_{xxx} (\mathfrak{N}_{u1}^v + \frac{1}{6}) + \\
 & + \Delta y^2 v^2 \rho_{yyy} (\mathfrak{N}_{v1}^v + \frac{1}{6}) + \Delta z^2 w v \rho_{zzz} (\mathfrak{N}_{w1}^v + \frac{1}{6}) + \Delta x^2 (l_{2u}^{2v} \rho v_{xx} u_x + l_{3u}^{2v} \rho u_{xx} v_x + l_{6u}^{2v} v \rho_{xx} u_x +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + l_{7u}^{2v} v \rho_x u_{xx} + l_{8u}^{2v} u \rho_{xx} v_x + l_{9u}^{2v} u \rho_x v_{xx} + l_{10u}^{2v} \rho_x u_x v_x + \Delta y^2 (l_{1v}^{2v} \rho v_{yy} v_y + l_{4v}^{2v} v \rho_{yy} v_y + \\
 & + l_{5v}^{2v} v \rho_y v_{yy} + l_{10v}^{2v} \rho_y v_y^2) + \Delta z^2 (l_{2w}^{2v} \rho v_{zz} w_z + l_{3w}^{2v} \rho v_z w_{zz} + l_{6w}^{2v} v \rho_{zz} w_z + l_{7w}^{2v} v \rho_z w_{zz} + l_{8w}^{2v} w \rho_{zz} v_z + \\
 & + l_{9w}^{2v} w \rho_z v_{zz} + l_{10w}^{2v} \rho_z v_z w_z) + \Delta t \Delta x [\mathfrak{N}_{u1} (l_{13u}^{2v} v p_{xx} \rho_x \rho^{-1} + l_{14u}^{2v} \rho^{-1} v p_x \rho_{xx} + l_{19u}^{2v} \rho^{-1} p_x \rho_x v_x + \\
 & + l_{20u}^{2v} \rho^{-2} v p_x \rho_x^2 + l_{22u}^{2v} v p_{xxx} + l_{25u}^{2v} p_x v_x + l_{26u}^{2v} p_x v_{xx}) + \mathfrak{N}_{v1} (l_{15u}^{2v} u p_{yx} \rho_x \rho^{-1} + l_{16u}^{2v} \rho^{-1} u p_y \rho_{xx} + \\
 & + l_{17u}^{2v} \rho^{-1} p_y \rho_x u_x + l_{21u}^{2v} \rho^{-2} u p_y \rho_x^2 + l_{23u}^{2v} u p_{xy} + l_{24u}^{2v} p_{xy} u_x + l_{27u}^{2v} p_y u_{xx})] + \\
 & + \Delta t \Delta y \mathfrak{N}_{v1} [l_{11v}^{2v} \rho^{-1} v p_{yy} \rho_y + l_{12v}^{2v} \rho^{-1} v p_y \rho_{yy} + (l_{17v}^{2v} + l_{18v}^{2v}) \rho^{-1} p_y \rho_y u_y + (l_{21v}^{2v} + l_{20v}^{2v}) \rho^{-2} v p_y \rho_y^2 + \\
 & + (l_{22v}^{2v} + l_{23v}^{2v}) v p_{yyy} + (l_{24v}^{2v} + l_{25v}^{2v}) p_{yy} v_y + (l_{26v}^{2v} + l_{27v}^{2v}) p_y v_{yy}] + \\
 & + \Delta t \Delta z [\mathfrak{N}_{w1} (l_{13w}^{2v} \rho^{-1} v p_{zz} \rho_z + l_{14w}^{2v} \rho^{-1} v p_z \rho_{zz} + l_{19w}^{2v} \rho^{-1} p_z \rho_z v_z + \rho^{-2} v p_z \rho_z^2 l_{20w}^{2v} + \\
 & + l_{22w}^{2v} v p_{zzz} + l_{25w}^{2v} p_{zz} v_z + l_{26w}^{2v} p_z v_{zz}) + \mathfrak{N}_{v1} (l_{15w}^{2v} \rho^{-1} p_{yz} \rho_z w + l_{16w}^{2v} \rho^{-1} w p_y \rho_{zz} + \\
 & + l_{17w}^{2v} \rho^{-1} p_y \rho_z w_z + l_{21w}^{2v} \rho^{-2} w p_y \rho_z^2 + l_{23w}^{2v} w p_{yzz} + l_{24w}^{2v} p_{yz} w_z + l_{27w}^{2v} p_y w_{zz})] + \\
 & + \frac{(\rho v)}{6} t t t \Delta t^2 + \frac{p}{6} y y y \Delta y^2 \}
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом выпишем члены второго дифференциального приближения уравнения импульса (проекция на ось OZ):

$$\begin{aligned}
 D_p^{2y} = & - \left\{ \rho u w_{xxx} (\mathfrak{N}_{u3}^w + \frac{1}{6}) \Delta x^2 + \Delta y^2 \rho v w_{yyy} (\mathfrak{N}_{v3}^w + \frac{1}{6}) + \Delta x^2 \rho w u_{xxx} (\mathfrak{N}_{u10}^w + \frac{1}{6}) + \right. \\
 & + \Delta y^2 \rho w v_{yyy} (\mathfrak{N}_{v10}^w + \frac{1}{6}) + \Delta z^2 \rho w w_{zzz} (\mathfrak{N}_{w3}^w + \mathfrak{N}_{w10}^w + \frac{1}{3}) + \\
 & + \Delta x^2 u w \rho_{xxx} (\mathfrak{N}_{u1}^w + \frac{1}{6}) + \Delta y^2 v w \rho_{yyy} (\mathfrak{N}_{v1}^w + \frac{1}{6}) + \Delta z^2 w^2 \rho_{zzz} (\mathfrak{N}_{w1}^w + \frac{1}{6}) + \\
 & + \Delta x^2 (l_{2u}^{2w} \rho w_{xx} u_x + l_{3u}^{2w} \rho u_{xx} w_x + l_{6u}^{2w} w \rho_{xx} u_x + l_{7u}^{2w} w \rho_x u_{xx} + l_{8u}^{2w} u \rho_{xx} w_x + \\
 & + l_{9u}^{2w} u \rho_x w_{xx} + l_{10u}^{2w} \rho_x u_x w_x) + \Delta y^2 (l_{2v}^{2w} \rho w_{yy} v_y + l_{3v}^{2w} \rho v_{yy} w_y + l_{6v}^{2w} w \rho_{yy} v_y + \\
 & + l_{7v}^{2w} w \rho_y v_{yy} + l_{8v}^{2w} w \rho_{yy} w_y + l_{9v}^{2w} v \rho_y w_{yy} + l_{10v}^{2w} \rho_y v_y w_y) + \Delta z^2 (l_{1w}^{2w} \rho w_{zz} w_z + \\
 & + l_{4w}^{2w} w \rho_{zz} w_z + l_{5w}^{2w} w \rho_z w_{zz} + l_{7w}^{2w} v \rho_z w_{zz} + l_{8w}^{2w} w \rho_{zz} v_z + l_{9w}^{2w} w \rho_z v_{zz} + l_{10w}^{2w} \rho_z w_z^2) + \\
 & + \Delta t \Delta x [\mathfrak{N}_{u1} (l_{13u}^{2w} w p_{xx} \rho_x \rho^{-1} + l_{14u}^{2w} \rho^{-1} w p \rho_{xx} + l_{19u}^{2w} \rho^{-1} p_x \rho_x w_x + l_{20u}^{2w} \rho^{-2} w p_x \rho_x^2 + \\
 & + l_{22u}^{2w} w p_{xxx} + l_{25u}^{2w} p_{xx} w_x + l_{26u}^{2w} p_x w_{xx}) + \mathfrak{N}_{w1} (l_{15u}^{2w} u p_{zx} \rho_x \rho^{-1} + l_{16u}^{2w} \rho^{-1} u p_z \rho_{xx} + \\
 & + l_{17u}^{2w} \rho^{-1} p_z \rho_x u_x + l_{21u}^{2w} \rho^{-2} u p_z \rho_x^2 + l_{23u}^{2w} u p_{xz} + l_{24u}^{2w} p_{xz} u_x + l_{27u}^{2w} p_z u_{xx})] + \\
 & + \Delta t \Delta y [\mathfrak{N}_{v1} (l_{13v}^{2w} \rho^{-1} w p_{yy} \rho_y + l_{14v}^{2w} \rho^{-1} w p_y \rho_{yy} + l_{19v}^{2w} \rho^{-1} p_y \rho_y w_y + l_{20v}^{2w} \rho^{-2} w p_y \rho_y^2 + \\
 & + l_{22v}^{2w} w p_{yyy} + l_{25v}^{2w} p_{yy} w_y + l_{26v}^{2w} p_y w_{yy}) + \mathfrak{N}_{w1} (l_{15v}^{2w} \rho^{-1} p_{yz} \rho_y + l_{16v}^{2w} \rho^{-1} v p_z \rho_{yy} + \\
 & + l_{17v}^{2w} \rho^{-1} p_z \rho_y v_y + \rho^{-2} v p_z \rho_y^2 l_{21v}^{2w} + l_{23v}^{2w} v p_{yzz} + l_{24v}^{2w} p_{yz} v_y + l_{27v}^{2w} p_z v_{yy})] + \\
 & + \mathfrak{N}_{w1} \Delta t \Delta z (l_{11w}^{2w} \rho^{-1} p_{zz} \rho_z w + l_{12w}^{2w} \rho^{-1} w p_z \rho_{zz} + (l_{17w}^{2w} + l_{18w}^{2w}) \rho^{-1} p_z \rho_z w_z + \\
 & + (l_{21w}^{2w} + l_{20w}^{2w}) \rho^{-2} w p_z \rho_z^2 + (l_{23w}^{2w} + l_{22w}^{2w}) w p_{zzz} + (l_{24w}^{2w} + l_{25w}^{2w}) p_{zz} w_z + \\
 & + (l_{27w}^{2w} + l_{26w}^{2w}) p_z w_{zz}) + \frac{(\rho w)}{6} t t t \Delta t^2 + \frac{p}{2} z z z \Delta z^2 \}
 \end{aligned}$$



Коэффициенты, входящие во второе дифференциальное приближение разностных схем уравнений импульсов, определяется из нижеследующих формул:

$$\begin{aligned}
 l_{1\varphi}^{2\phi} &= 2(\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1)(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}, \\
 l_{2\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 l_{3\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 l_{4\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + 2\mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} + \frac{1}{2}, \\
 l_{5\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + \frac{1}{2}(\mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}), \\
 l_{6\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 l_{7\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 l_{8\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 l_{9\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 l_{10\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi})(\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}), \\
 l_{11\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 3)(\mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1)) - \\
 &\quad - (\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi})(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 1) - (\mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi})(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 5), \\
 l_{12\varphi}^{2\phi} &= \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1)(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{3}{2}) - \\
 &\quad - (\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi})(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{5}{2}) - (\mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi})(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}), \\
 l_{13\varphi}^{2\phi} &= \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} + 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1)(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 3) - \\
 &\quad - \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 5), \\
 l_{14\varphi}^{2\phi} &= \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1)(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{3}{2}) - \mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{5}{2}) - \\
 &\quad - \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}), \\
 l_{15\varphi}^{2\phi} &= \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1)(\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 3) - \mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 1) - \\
 &\quad - \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 5),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l_{16\varphi}^{2\phi} &= \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{3}{2}) - \mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{5}{2}) - \\
 &- \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}), \\
 l_{17\varphi}^{2\phi} &= -3(\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}) (\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi}) + \\
 &+ \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 3) - \mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 4) - \\
 &- \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 2), \\
 l_{18\varphi}^{2\phi} &= -3(\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi}) (\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}) + \\
 &+ \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 3) - (\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}) (\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 2) + \\
 &+ 2\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi}, \\
 l_{19\varphi}^{2\phi} &= l_{18\varphi}^{2\phi}, \\
 l_{20\varphi}^{2\phi} &= -(\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}) (2\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - 2\mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 1) + \\
 &+ \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) (2\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - 2\mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 3) + 4\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi}, \\
 l_{21\varphi}^{2\phi} &= -(\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi}) (2\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - 2\mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 1) + 4\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \\
 &+ \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) (2\mathfrak{N}_{\varphi 2}^{\phi} - 2\mathfrak{N}_{\varphi 1}^{\phi} - 3), \\
 l_{22\varphi}^{2\phi} &= \frac{1}{2} (-(\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + 3\mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}) (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) + 3\mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi}), \\
 l_{24\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + 1) (\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi}) - \\
 &- (\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi}), \\
 l_{25\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}) (\mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi}) - \\
 &- \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + 2\mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}, \\
 l_{26\varphi}^{2\phi} &= (\mathfrak{N}_{\varphi 14}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 13}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 12}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi}) (\mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \frac{1}{2}), \\
 l_{27\varphi}^{2\phi} &= -(\mathfrak{N}_{\varphi 10}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 11}^{\phi} - \frac{1}{2}) (\mathfrak{N}_{\varphi 9}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} - \mathfrak{N}_{\varphi 8}^{\phi} (\mathfrak{N}_{\varphi 4}^{\phi} + \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi} - 1) + \mathfrak{N}_{\varphi 7}^{\phi} \mathfrak{N}_{\varphi 3}^{\phi}).
 \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi = \{u, v, w\}$ ,  $\phi = \{u, v, w\}$

Члены, возникающие в третьем дифференциальном приближении в уравнении импульса (проекция на ось OX), будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_p^{3x} &= -\frac{1}{12} \{ \rho u u_{xxx} \Delta x^3 (\mathfrak{N}_{u4}^u - 7\mathfrak{N}_{u3}^u + \mathfrak{N}_{u11}^u - 7\mathfrak{N}_{u10}^u - 1) + \Delta y^3 \rho u v_{yyy} (\mathfrak{N}_{v11}^u - 7\mathfrak{N}_{v10}^u - \frac{1}{2}) + \\
 &+ \rho u w_{zzz} \Delta z^3 (\mathfrak{N}_{w11}^u - 7\mathfrak{N}_{w10}^u - \frac{1}{2}) + \rho v u_{yyy} \Delta y^3 (\mathfrak{N}_{v4}^u - 7\mathfrak{N}_{v3}^u - \frac{1}{2}) + \rho w u_{zzz} \Delta z^3 (\mathfrak{N}_{w4}^u - \mathfrak{N}_{w3}^u - \frac{1}{2}) + \\
 &+ \Delta x^3 u^3 \rho_{xxx} (\mathfrak{N}_{u2}^u - 7\mathfrak{N}_{u1}^u - \frac{1}{2}) + \Delta y^3 u v \rho_{yyy} (\mathfrak{N}_{v2}^u - 7\mathfrak{N}_{v1}^u - \frac{1}{2}) + \Delta x^3 u^3 \rho_{xxx} (\mathfrak{N}_{u2}^u - 7\mathfrak{N}_{u1}^u - \frac{1}{2}) + \\
 &+ \Delta y^3 u v \rho_{yyy} (\mathfrak{N}_{v2}^u - 7\mathfrak{N}_{v1}^u - \frac{1}{2}) + \Delta z^3 u w \rho_{zzz} (\mathfrak{N}_{w2}^u - 7\mathfrak{N}_{w1}^u - \frac{1}{2}) \} - \frac{\Delta x^4}{12} (2K_{1u}^{3u} \rho u_{xxx} u_{xx} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2K_{2u}^{3u} \rho u_x u_{xxx} + 4K_{3u}^{3u} \rho_x u_{xxx} u_x + 12K_{4u}^{3u} \rho_{xx} u_{xx} u_x + (l_{5u}^{3u} + K_{5u}^{3u}) u \rho_{xxx} u_x + (l_{6u}^{3u} + K_{6u}^{3u}) u \rho_{xxx} u_{xx} + \\
 & + (l_{7u}^{3u} + K_{7u}^{3u}) u \rho_{xx} u_{xxx} + (l_{8u}^{3u} + K_{8u}^{3u}) u \rho_x u_{xxx} + 3l_{17u}^{3u} \rho_x u_{xx}^2 + 2l_{13u}^{3u} \rho_{xxx} u_x^2 + \frac{1}{10} p_{xxxx} - \\
 & - \frac{\Delta y^4}{12} (l_{1v}^{3u} \rho u_{yyyy} v_y + l_{2v}^{3u} \rho u_{yyy} v_{yy} + l_{3v}^{3u} \rho u_{yy} v_{yyy} + l_{4v}^{3u} \rho u_y v_{yyy} + l_{5v}^{3u} u \rho_{yyy} v_y + l_{6v}^{3u} u \rho_{yyy} v_{yy} + \\
 & + l_{7v}^{3u} u \rho_{yy} v_{yyy} + l_{8v}^{3u} u \rho_y v_{yyy} + l_{9v}^{3u} v \rho_{yyy} u_y + l_{10v}^{3u} v \rho_{yy} u_{yyy} + l_{11v}^{3u} v \rho_{yyy} u_{yy} + l_{12v}^{3u} v \rho_y u_{yyy} + \\
 & + 2l_{13v}^{3u} \rho_{yyy} u_y v_y + 3l_{14v}^{3u} \rho_{yy} u_{yy} v_y + 3l_{15v}^{3u} \rho_{yy} u_y v_{yy} + 2l_{16v}^{3u} \rho_y u_{yyy} v_y + 3l_{17v}^{3u} \rho_y u_{yy} v_{yy} + 2l_{18v}^{3u} \rho_y u_y v_{yyy} ) - \\
 & - \frac{\Delta z^4}{12} (l_{1w}^{3u} \rho u_{zzzz} w_z + l_{2w}^{3u} \rho u_{zzz} w_{zz} + l_{3w}^{3u} \rho u_{zz} w_{zzz} + l_{4w}^{3u} \rho u_z w_{zzz} + l_{5w}^{3u} u \rho_{zzzz} w_z + l_{6w}^{3u} u \rho_{zzz} w_{zz} + \\
 & + l_{7w}^{3u} u \rho_{zz} w_{zzz} + l_{8w}^{3u} u \rho_z w_{zzz} + l_{9w}^{3u} w \rho_{zzzz} u_z + l_{10w}^{3u} w \rho_{zz} u_{zzz} + l_{11w}^{3u} w \rho_{zzz} u_{zz} + l_{12w}^{3u} w \rho_z u_{zzz} + \\
 & + 2l_{13w}^{3u} \rho_{zzz} u_z w_z + 3l_{14w}^{3u} \rho_{zz} u_{zz} w_z + 3l_{15w}^{3u} \rho_{zz} u_z w_{zz} + 2l_{16w}^{3u} \rho_z u_{zzz} w_z + 3l_{17w}^{3u} \rho_z u_{zz} w_{zz} + \\
 & + 2l_{18w}^{3u} \rho_z u_z w_{zz} ) - \frac{1}{24} (\rho u)_{iiii} \Delta t^3.
 \end{aligned}$$

Члены, возникающие в третьем дифференциальном приближении в уравнении импульса (проекция на ось OY), будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 D_p^{3y} = & - \frac{1}{12} \left\{ \rho u v_{xxxx} \Delta x^3 (\mathfrak{N}_{u4}^v - 7\mathfrak{N}_{u3}^v - \frac{1}{2}) + \Delta x^3 \rho v u_{yyyy} (\mathfrak{N}_{u11}^v - 7\mathfrak{N}_{u10}^v - \frac{1}{2}) + \rho v w_{zzzz} \Delta z^3 (\mathfrak{N}_{w11}^v - \right. \\
 & - 7\mathfrak{N}_{w10}^v - \frac{1}{2}) + \rho v v_{yyyy} \Delta y^3 (\mathfrak{N}_{v4}^v - 7\mathfrak{N}_{v3}^v + \mathfrak{N}_{v11}^v - 7\mathfrak{N}_{v10}^v - 1) + \rho v w_{zzzz} \Delta z^3 (\mathfrak{N}_{w4}^v - 7\mathfrak{N}_{w3}^v - \frac{1}{2}) + \\
 & \left. + \Delta y^3 v^2 \rho_{yyyy} (\mathfrak{N}_{v2}^v - 7\mathfrak{N}_{v1}^v - \frac{1}{2}) + \Delta z^3 w v \rho_{zzzz} ((\mathfrak{N}_{w2}^v - 7\mathfrak{N}_{w1}^v - \frac{1}{2}) + \Delta x^3 u v \rho_{xxxx} (\mathfrak{N}_{u2}^v - 7\mathfrak{N}_{u1}^v - \frac{1}{2})) \right\} - \\
 & - \frac{\Delta x^4}{12} (l_{1u}^{3v} \rho u_x v_{xxxx} + l_{2u}^{3v} \rho u_{xx} v_{xxx} + l_{3u}^{3v} \rho u_{xxx} v_{xx} + l_{4u}^{3v} \rho u_{xxxx} v_x + l_{5u}^{3v} v \rho_{xxxx} u_x + l_{6u}^{3v} v \rho_{xxx} u_{xx} + \\
 & + l_{7u}^{3v} v \rho_{xx} u_{xxx} + l_{8u}^{3v} v \rho_x u_{xxxx} + l_{9u}^{3v} u \rho_{xxxx} v_x + l_{10u}^{3v} u \rho_{xx} v_{xxx} + l_{11u}^{3v} u \rho_{xxx} v_{xx} + l_{12u}^{3v} u \rho_x v_{xxxx} + \\
 & + 2l_{13u}^{3v} \rho_{xxx} u_x v_x + 3l_{14u}^{3v} \rho_{xx} u_x v_{xx} + 3l_{15u}^{3v} \rho_{xx} u_{xx} v_x + 2l_{16u}^{3v} \rho_x u_x v_{xxx} + 3l_{17u}^{3v} \rho_x u_{xx} v_{xx} + 2l_{18u}^{3v} \rho_x u_{xxx} v_x ) - \\
 & - \frac{\Delta y^4}{12} (2K_{1v}^{3v} \rho v_{yyy} v_{yy} + 2K_{2v}^{3v} \rho v_{yyy} v_y + 4K_{3v}^{3v} \rho_y v_y v_{yyy} + 12K_{4v}^{3v} \rho_{yy} v_y v_{yy} + (l_{5v}^{3v} + K_{5v}^{3v}) v \rho_{yyy} v_y + \\
 & + (l_{6v}^{3v} + K_{6v}^{3v}) v \rho_{yy} v_{yy} + (l_{7v}^{3v} + K_{7v}^{3v}) v \rho_{yy} v_{yyy} + (l_{8v}^{3v} + K_{8v}^{3v}) v \rho_y v_{yyy} + 2l_{13v}^{3v} \rho_{yyy} v_y^2 + 3l_{17v}^{3v} \rho_y v_{yy}^2 ) - \\
 & - \frac{\Delta z^4}{12} (l_{1w}^{3v} \rho u_z w_{zzzz} + l_{2w}^{3v} \rho u_{zz} w_{zzz} + l_{3w}^{3v} \rho u_{zzz} w_{zz} + l_{4w}^{3v} \rho u_{zzzz} w_z + l_{5w}^{3v} w \rho_{zzzz} u_z + l_{6w}^{3v} w \rho_{zz} u_{zz} + l_{7w}^{3v} w \rho_{zz} u_{zzz} + \\
 & + l_{8w}^{3v} w \rho_z u_{zzz} + l_{9w}^{3v} u \rho_{zzzz} w_z + l_{10w}^{3v} u \rho_{zz} w_{zzz} + l_{11w}^{3v} u \rho_{zzz} w_{zz} + l_{12w}^{3v} u \rho_z w_{zzz} + 2l_{13w}^{3v} \rho_{zzz} u_z w_z + 3l_{14w}^{3v} \rho_{zz} u_z w_{zz} + \\
 & + 3l_{15w}^{3v} \rho_{zz} u_{zz} w_z + 2l_{16w}^{3v} \rho_z u_z w_{zz} + 3l_{17w}^{3v} \rho_z u_{zz} w_{zz} + 2l_{18w}^{3v} \rho_z u_{zzz} w_z ) - \frac{1}{24} (\rho v)_{iiii} \Delta t^3
 \end{aligned}$$

Члены, возникающие в третьем дифференциальном приближении в уравнении импульса (проекция на ось OZ), будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta_p^{3z} = & -\frac{1}{12} \left\{ \rho u w_{xxxx} \Delta x^3 (\aleph_{u4}^w - 7\aleph_{u3}^w - \frac{1}{2}) + \Delta y^3 \rho v w_{yyyy} (\aleph_{v4}^w - 7\aleph_{v3}^w - \frac{1}{2}) + \rho w u_{xxxx} \Delta x^3 (\aleph_{u11}^w - \right. \\
 & - 7\aleph_{u10}^w - \frac{1}{2}) + \rho w v_{yyyy} \Delta y^3 (\aleph_{v11}^w - 7\aleph_{v10}^w - \frac{1}{2}) + \rho w w_{zzzz} \Delta z^3 (\aleph_{w4}^w - 7\aleph_{w3}^w + \aleph_{w11}^w - 7\aleph_{w10}^w - 1) + \\
 & \left. + \Delta y^3 v w \rho_{yyyy} (\aleph_{v2}^w - 7\aleph_{v1}^w - \frac{1}{2}) + \Delta z^3 w^3 \rho_{zzzz} (\aleph_{w2}^w - 7\aleph_{w1}^w - \frac{1}{2}) + \Delta x^3 u w \rho_{xxxx} (\aleph_{u2}^w - 7\aleph_{u1}^w - \frac{1}{2}) \right\} - \\
 & - \frac{\Delta x^4}{12} (l_{1u}^{3w} \rho u_x w_{xxxx} + l_{2u}^{3w} \rho u_{xx} w_{xxx} + l_{3u}^{3w} \rho u_{xxx} w_{xx} + l_{4u}^{3w} \rho u_{xxxx} w_x + l_{5u}^{3w} w \rho_{xxxx} u_x + l_{6u}^{3w} w \rho_{xxx} u_{xx} + l_{7u}^{3w} w \rho_{xx} u_{xxx} + \\
 & + l_{8u}^{3w} w \rho_x u_{xxxx} + l_{9u}^{3w} u \rho_{xxx} w_x + l_{10u}^{3w} u \rho_{xx} w_{xxx} + l_{11u}^{3w} u \rho_{xx} w_{xx} + l_{12u}^{3w} u \rho_x w_{xxxx} + 2l_{13u}^{3w} \rho_{xxx} u_x w_x + 3l_{14u}^{3w} \rho_{xx} u_x w_{xx} + \\
 & + 3l_{15u}^{3w} \rho_{xx} u_{xx} w_x + 2l_{16u}^{3w} \rho_x u_x w_{xxx} + 3l_{17u}^{3w} \rho_x u_{xx} w_{xx} + 2l_{18u}^{3w} \rho_x u_{xxx} w_x) - \frac{\Delta y^4}{12} (l_{1v}^{3w} \rho v_y w_{yyyy} + l_{2v}^{3w} \rho v_{yy} w_{yyy} + \\
 & + l_{3v}^{3w} \rho v_{yy} w_{yy} + l_{4v}^{3w} \rho v_{yyy} w_y + l_{5v}^{3w} w \rho_{yyyy} v_y + l_{6v}^{3w} w \rho_{yyy} v_{yy} + l_{7v}^{3w} w \rho_{yy} v_{yyy} + l_{8v}^{3w} w \rho_y v_{yyy} + l_{9v}^{3w} v \rho_{yyy} w_y + \\
 & + l_{10v}^{3w} v \rho_{yy} w_{yyy} + l_{11v}^{3w} v \rho_{yyy} w_{yy} + l_{12v}^{3w} v \rho_y w_{yyy} + 2l_{13v}^{3w} \rho_{yyy} v_y w_y + 3l_{14v}^{3w} \rho_{yy} v_y w_{yy} + 3l_{15v}^{3w} \rho_{yy} v_{yy} w_y + \\
 & + 2l_{16v}^{3w} \rho_y v_y w_{yyy} + 3l_{17v}^{3w} \rho_y v_{yy} w_{yy} + 2l_{18v}^{3w} \rho_y v_{yyy} w_y) - \frac{\Delta z^4}{12} (2K_{1w}^{3w} \rho w_{zzz} w_{zz} + 2K_{2w}^{3w} \rho w_{zzzz} w_z + 4K_{3w}^{3w} \rho_z w_{zzz} w_z + \\
 & + 12K_{4w}^{3w} \rho_{zz} w_{zz} w_z + (l_{5w}^{3w} + K_{5w}^{3w}) w \rho_{zzzz} w_z + (l_{6w}^{3w} + K_{6w}^{3w}) w \rho_{zzz} w_{zz} + (l_{7w}^{3w} + K_{7w}^{3w}) w \rho_{zz} w_{zzz} + \\
 & + (l_{8w}^{3w} + K_{8w}^{3w}) w \rho_z w_{zzzz} + 2l_{13w}^{3w} \rho_{zzz} w_z^2 + 3l_{17w}^{3w} \rho_z w_{zz}^2 + \frac{1}{10} p_{zzzz}) - \frac{1}{24} (\rho w)_{uuu} \Delta t^3.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты, содержащиеся в третьем дифференциальном приближении в уравнении импульса, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 K_{1\phi}^{3\phi} &= \aleph_{\phi 4}^{\phi} (2\aleph_{\phi 11}^{\phi} - 5\aleph_{\phi 10}^{\phi} - 1) - 5\aleph_{\phi 3}^{\phi} (\aleph_{\phi 11}^{\phi} - 4\aleph_{\phi 10}^{\phi} - 1) - (\aleph_{\phi 11}^{\phi} - 5\aleph_{\phi 10}^{\phi} - 1), \\
 K_{2\phi}^{3\phi} &= \aleph_{\phi 4}^{\phi} (\aleph_{\phi 11}^{\phi} - 4\aleph_{\phi 10}^{\phi} - \frac{1}{2}) - \aleph_{\phi 3}^{\phi} (4\aleph_{\phi 11}^{\phi} - 7\aleph_{\phi 10}^{\phi} - 4) - 1/2 (\aleph_{\phi 11}^{\phi} - 8\aleph_{\phi 10}^{\phi} - 1), \\
 K_{3\phi}^{3\phi} &= (\aleph_{\phi 4}^{\phi} \aleph_{\phi 10}^{\phi} + \aleph_{\phi 3}^{\phi} \aleph_{\phi 11}^{\phi} - 2\aleph_{\phi 3}^{\phi} \aleph_{\phi 10}^{\phi}) (3\aleph_{\phi 2}^{\phi} - 3\aleph_{\phi 1}^{\phi} - 4) - \aleph_{\phi 3}^{\phi} \aleph_{\phi 10}^{\phi} + \aleph_{\phi 4}^{\phi} \aleph_{\phi 11}^{\phi} + \\
 & + (\aleph_{\phi 4}^{\phi} - \aleph_{\phi 3}^{\phi} + \aleph_{\phi 11}^{\phi} - 4\aleph_{\phi 10}^{\phi} - 1) (\aleph_{\phi 2}^{\phi} - \aleph_{\phi 1}^{\phi} - 1), \\
 K_{4\phi}^{3\phi} &= (\aleph_{\phi 2}^{\phi} - 3\aleph_{\phi 1}^{\phi} - 1) (\aleph_{\phi 4}^{\phi} (\aleph_{\phi 10}^{\phi} + \frac{1}{2}) + \aleph_{\phi 3}^{\phi} (\aleph_{\phi 11}^{\phi} - \aleph_{\phi 10}^{\phi} - 1) + \frac{1}{2} \aleph_{\phi 11}^{\phi} - \aleph_{\phi 10}^{\phi} - \frac{1}{2}) + \\
 & + \aleph_{\phi 4}^{\phi} \aleph_{\phi 11}^{\phi} (2\aleph_{\phi 1}^{\phi} + 1), \\
 K_{5\phi}^{3\phi} &= (\aleph_{\phi 4}^{\phi} - \aleph_{\phi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) (\aleph_{\phi 2}^{\phi} - 7\aleph_{\phi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) + 4\aleph_{\phi 1}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 K_{6\phi}^{3\phi} &= 2\aleph_{\phi 4}^{\phi} (\aleph_{\phi 2}^{\phi} - 4\aleph_{\phi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) - 2\aleph_{\phi 3}^{\phi} (\aleph_{\phi 2}^{\phi} - 10\aleph_{\phi 1}^{\phi} - \frac{3}{2}) - \aleph_{\phi 2}^{\phi} + 7\aleph_{\phi 1}^{\phi} + 1, \\
 K_{7\phi}^{3\phi} &= 2\aleph_{\phi 4}^{\phi} (\aleph_{\phi 2}^{\phi} - \aleph_{\phi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) - 2\aleph_{\phi 3}^{\phi} (8\aleph_{\phi 2}^{\phi} - 20\aleph_{\phi 1}^{\phi} - 7) - \aleph_{\phi 2}^{\phi} + 3\aleph_{\phi 1}^{\phi} + 1, \\
 K_{8\phi}^{3\phi} &= (\aleph_{\phi 4}^{\phi} - 7\aleph_{\phi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) (\aleph_{\phi 2}^{\phi} - \aleph_{\phi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) + 4\aleph_{\phi 3}^{\phi} + \frac{1}{4}, \\
 l_{1\phi}^{3\phi} &= (\aleph_{\phi 11}^{\phi} - 4\aleph_{\phi 10}^{\phi}) (\aleph_{\phi 4}^{\phi} - 7\aleph_{\phi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} (\aleph_{\phi 4}^{\phi} - 15\aleph_{\phi 3}^{\phi} - 1),
 \end{aligned}$$

$$l_{2\varphi}^{3\phi} = 2\aleph_{\varphi 11}^{\phi} (\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) - 2\aleph_{\varphi 10}^{\phi} (\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 10\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{3}{2}) - \aleph_{\varphi 4}^{\phi} + 7\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1,$$

$$l_{3\varphi}^{3\phi} = 2\aleph_{\varphi 11}^{\phi} (\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} (8\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 20\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 7) - \aleph_{\varphi 4}^{\phi} + 3\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1,$$

$$l_{4\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + 4\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \frac{1}{4},$$

$$l_{5\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) + 4\aleph_{\varphi 1}^{\phi} + \frac{1}{4},$$

$$l_{6\varphi}^{3\phi} = 2\aleph_{\varphi 11}^{\phi} (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) - 2\aleph_{\varphi 10}^{\phi} (8\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 10\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{3}{2}) - \aleph_{\varphi 2}^{\phi} + 7\aleph_{\varphi 1}^{\phi} + 1,$$

$$l_{7\varphi}^{3\phi} = 2\aleph_{\varphi 11}^{\phi} (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} (8\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 20\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 7) - \aleph_{\varphi 2}^{\phi} + 3\aleph_{\varphi 1}^{\phi} + 1,$$

$$l_{8\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) + 4\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \frac{1}{4},$$

$$l_{9\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + 4\aleph_{\varphi 1}^{\phi} + \frac{1}{4},$$

$$l_{10\varphi}^{3\phi} = 2\aleph_{\varphi 2}^{\phi} (\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) - 2\aleph_{\varphi 1}^{\phi} (\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 10\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{3}{2}) - \aleph_{\varphi 4}^{\phi} + 7\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1,$$

$$l_{11\varphi}^{3\phi} = 2\aleph_{\varphi 2}^{\phi} (\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} (8\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 20\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 7) - \aleph_{\varphi 4}^{\phi} + 3\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1,$$

$$l_{12\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) + 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + \frac{1}{4},$$

$$l_{13\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 10}^{\phi})\aleph_{\varphi 2}^{\phi} + (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 10}^{\phi})\aleph_{\varphi 1}^{\phi} (6\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 6\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 7) +$$

$$+ (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1),$$

$$l_{14\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi})(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} (4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1) + \aleph_{\varphi 1}^{\phi} (4\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 8\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 3)) +$$

$$+ (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1),$$

$$l_{15\varphi}^{3\phi} = \aleph_{\varphi 11}^{\phi} \aleph_{\varphi 2}^{\phi} + (\aleph_{\varphi 1}^{\phi} \aleph_{\varphi 11}^{\phi} + \aleph_{\varphi 10}^{\phi} \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 2\aleph_{\varphi 10}^{\phi} \aleph_{\varphi 1}^{\phi})(4\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 3) +$$

$$+ 2\aleph_{\varphi 10}^{\phi} \aleph_{\varphi 1}^{\phi} + (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1),$$

$$l_{16\varphi}^{3\phi} = (6\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1)(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi})(\aleph_{\varphi 11}^{\phi} + \aleph_{\varphi 10}^{\phi}) + (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1),$$

$$l_{17\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi})\aleph_{\varphi 11}^{\phi} (4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1) + (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1) +$$

$$+ \aleph_{\varphi 10}^{\phi} (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi})(4\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 8\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 3),$$

$$l_{18\varphi}^{3\phi} = (\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1) + \aleph_{\varphi 11}^{\phi} (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi}) +$$

$$+ \aleph_{\varphi 10}^{\phi} (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi})(6\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 6\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 7).$$

Четвертое дифференциальное приближение разностных схем уравнения импульса (проекция на ось OX):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_p^{4x} = & -\frac{1}{12} \left\{ \rho u u_{xxxx} \Delta x^4 (30 \mathfrak{N}_{u3}^u + 30 \mathfrak{N}_{u10}^u + 2) + \Delta y^4 \rho u v_{yyyy} (30 \mathfrak{N}_{v10}^u + 1) + \rho u w_{zzzz} * \right. \\
 & * \Delta z^4 (30 \mathfrak{N}_{w10}^u + 1) + \rho v u_{yyyy} \Delta y^4 (30 \mathfrak{N}_{v3}^u + 1) + \rho w u_{zzzz} \Delta z^4 (30 \mathfrak{N}_{w3}^u + 1) + \Delta x^4 u^2 \rho_{xxxx} (30 \mathfrak{N}_{u1}^u + \\
 & + 1) + \Delta y^4 u v \rho_{yyyy} (30 \mathfrak{N}_{v1}^u + 1) + \Delta z^4 u w \rho_{zzzz} (30 \mathfrak{N}_{w1}^u + 1) + p_{xxxx} \Delta x^4 + (\rho u)_{uuu} \Delta t^4 \left. \right\} - \\
 & - \Delta y^5 \left( \frac{1}{120} l_{4v}^{4u} \rho u_{yyyy} v_y + \frac{1}{48} l_{5v}^{4u} \rho v_{yy} u_{yyy} + \frac{1}{36} l_{6v}^{4u} \rho u_{yyy} v_{yy} + \frac{1}{48} l_{8v}^{4u} u_y \rho v_{yyyy} + \frac{1}{120} l_{9v}^{4u} u \rho_{yyyy} v_y + \right. \\
 & + \frac{1}{48} l_{10v}^{4u} u \rho_{yyy} v_{yy} + \frac{1}{36} l_{11v}^{4u} u \rho_{yy} v_{yy} + \frac{1}{48} l_{12v}^{4u} u \rho_{yy} v_{yyy} + \frac{1}{120} l_{13v}^{4u} u \rho_y v_{yyyy} + \frac{1}{120} l_{14v}^{4u} v \rho_{yyyy} u_y + \\
 & + \frac{1}{48} l_{15v}^{4u} v \rho_{yyy} u_{yy} + \frac{1}{36} l_{16v}^{4u} v \rho_{yy} u_{yy} + \frac{1}{48} l_{17v}^{4u} v \rho_{yy} u_{yyy} + \frac{1}{120} l_{18v}^{4u} v \rho_y u_{yyyy} + \frac{1}{12} l_{19v}^{4u} \rho_{yyy} u_y v_y + \\
 & + \frac{1}{6} l_{20v}^{4u} \rho_{yy} u_y v_y + \frac{1}{6} l_{21v}^{4u} \rho_{yy} u_y v_{yy} + \frac{1}{6} l_{22v}^{4u} \rho_{yy} u_{yy} v_y + \frac{1}{4} l_{23v}^{4u} \rho_{yy} u_y v_{yy} + \frac{1}{6} l_{24v}^{4u} \rho_{yy} u_y v_{yyy} + \\
 & + \frac{1}{12} l_{25v}^{4u} \rho_y u_{yyy} v_y + \frac{1}{6} l_{26v}^{4u} \rho_y u_{yy} v_{yy} + \frac{1}{6} l_{27v}^{4u} \rho_y u_{yy} v_{yyy} + \frac{1}{12} l_{28v}^{4u} \rho_y u_y v_{yyy} \left. \right) - \Delta z^5 \left( \frac{1}{120} l_{4w}^{4u} \rho u_{zzzz} w_z + \right. \\
 & + \frac{1}{48} l_{5w}^{4u} \rho w_{zz} u_{zzz} + \frac{1}{36} l_{6w}^{4u} \rho u_{zzz} w_{zz} + \frac{1}{48} l_{7w}^{4u} \rho u_{zz} w_{zzz} + \frac{1}{120} l_{8w}^{4u} u_z \rho w_{zzzz} + \frac{1}{120} l_{9w}^{4u} u \rho_{zzzz} w_z + \\
 & \frac{1}{48} l_{10w}^{4u} u \rho_{zzz} w_{zz} + \frac{1}{36} l_{11w}^{4u} u \rho_{zz} w_{zz} + \frac{1}{48} l_{12w}^{4u} u \rho_{zz} w_{zzz} + \frac{1}{120} l_{13w}^{4u} u \rho_z w_{zzzz} + \frac{1}{120} l_{14w}^{4u} w \rho_{zzzz} u_z + \\
 & + \frac{1}{48} l_{15w}^{4u} w \rho_{zzz} u_{zz} + \frac{1}{36} l_{16w}^{4u} w \rho_{zz} u_{zzz} + \frac{1}{48} l_{17w}^{4u} w \rho_{zz} u_{zzz} + \frac{1}{120} l_{18w}^{4u} w \rho_z u_{zzzz} + \frac{1}{12} l_{19w}^{4u} \rho_{zzzz} u_z w_z + \\
 & + \frac{1}{6} l_{20w}^{4u} \rho_{zz} u_{zzz} w_z + \frac{1}{6} l_{21w}^{4u} \rho_{zz} u_z w_{zz} + \frac{1}{6} l_{22w}^{4u} \rho_{zz} u_{zz} w_z + \frac{1}{4} l_{23w}^{4u} \rho_{zz} u_{zz} w_{zz} + \frac{1}{6} l_{24w}^{4u} \rho_{zz} u_z w_{zz} + \\
 & + \frac{1}{12} l_{25w}^{4u} \rho_z u_{zzz} w_z + \frac{1}{6} l_{26w}^{4u} \rho_z u_{zz} w_{zz} + \frac{1}{6} l_{27w}^{4u} \rho_z u_{zz} w_{zz} + \frac{1}{12} l_{28w}^{4u} \rho_z u_z w_{zzz} \left. \right) - \Delta x^5 \left( \frac{1}{60} l_{1u}^{4u} \rho u_{xxxx} u_x + \right. \\
 & + \frac{1}{24} l_{2u}^{4u} \rho u_{xx} u_{xxx} + \frac{1}{36} l_{6u}^{4u} \rho u_{xx}^2 + \frac{1}{120} (l_{14u}^{4u} + l_{9u}^{4u}) u \rho_{xxxx} u_x + \frac{1}{48} (l_{10u}^{4u} + l_{15u}^{4u}) u \rho_{xxx} u_{xx} + \frac{1}{36} (l_{11u}^{4u} + \\
 & + l_{16u}^{4u}) u \rho_{xxx} u_{xxx} + \\
 & + \frac{1}{48} (l_{12u}^{4u} + l_{17u}^{4u}) u \rho_{xx} u_{xxx} + \frac{1}{120} l_{13u}^{4u} u \rho_x u_{xxxx} + \frac{1}{12} K_{1u}^{4u} \rho_{xxx} u_x^2 + \frac{1}{6} K_{2u}^{4u} \rho_{xxx} u_{xx} u_x + \\
 & + \frac{1}{6} K_{3u}^{4u} \rho_{xx} u_{xxx} u_x + \frac{1}{4} K_{4u}^{4u} \rho_{xx} u_{xx}^2 + \frac{1}{6} K_{5u}^{4u} \rho_x u_{xxx} u_x + \frac{1}{6} K_{6u}^{4u} \rho_x u_{xxx} u_{xx} \left. \right)
 \end{aligned}$$

Четвертое дифференциальное приближение разностных схем уравнения импульса (проекция на ось OY):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_p^{4y} = & -\frac{1}{120} \left\{ \rho v u_{xxxxx} \Delta x^4 (30\mathfrak{N}_{u10}^v + 1) + \Delta y^4 \rho v v_{yyyyy} (30\mathfrak{N}_{v3}^u + 30\mathfrak{N}_{v10}^u + 2) + \right. \\
 & + \rho v w_{zzzzz} \Delta z^4 (30\mathfrak{N}_{w10}^v + 1) + \rho w v_{zzzzz} \Delta z^4 (30\mathfrak{N}_{w3}^v + 1) + \rho u v_{xxxxx} \Delta x^4 (30\mathfrak{N}_{u3}^v + 1) + \\
 & + v u \rho_{xxxxx} \Delta x^4 (30\mathfrak{N}_{u1}^v + 1) + v w \rho_{zzzzz} \Delta z^4 (30\mathfrak{N}_{w1}^v + 1) + v^2 \rho_{yyyyy} \Delta y^4 (30\mathfrak{N}_{v1}^v + 1) + \\
 & + p_{yyyyy} \Delta y^4 + (\rho v)_{uuu} \Delta t^4 \left. \right\} - \Delta x^5 \left( \frac{1}{120} l_{4u}^{4v} \rho u_x v_{xxxxx} + \frac{1}{48} l_{5u}^{4v} \rho u_{xx} v_{xxxx} + \frac{1}{36} l_{6u}^{4v} \rho u_{xxx} v_{xxx} + \right. \\
 & + \frac{1}{48} l_{7u}^{4v} \rho u_{xxxx} v_{xx} + \frac{1}{120} l_{8u}^{4v} \rho u_{xxxxx} v_x + \frac{1}{120} l_{9u}^{4v} v \rho_{xxxxx} u_x + \frac{1}{48} l_{10u}^{4v} v \rho_{xxxx} u_{xx} + \frac{1}{36} l_{11u}^{4v} v \rho_{xxx} u_{xxx} + \\
 & + \frac{1}{48} l_{12u}^{4v} v \rho_{xx} u_{xxxx} + \frac{1}{120} l_{13u}^{4v} v \rho_x u_{xxxxx} + \frac{1}{120} l_{14u}^{4v} u \rho_{xxxxx} v_x + \frac{1}{48} l_{15u}^{4v} u \rho_{xxxx} v_{xx} + \frac{1}{36} l_{16u}^{4v} u \rho_{xxx} v_{xxx} + \\
 & + \frac{1}{48} l_{17u}^{4v} u \rho_{xx} v_{xxxx} + \frac{1}{120} l_{18u}^{4v} u \rho_x v_{xxxxx} + \frac{1}{12} l_{19u}^{4v} \rho_{xxxx} v_x u_x + \frac{1}{6} l_{20u}^{4v} \rho_{xxx} u_x v_{xx} + \\
 & + \frac{1}{6} l_{21u}^{4v} \rho_{xx} v_x u_{xx} + \frac{1}{6} l_{22u}^{4v} \rho_{xx} v_{xxx} u_x + \frac{1}{4} l_{23u}^{4v} \rho_{xx} u_{xx} v_{xx} + \frac{1}{6} l_{24u}^{4v} \rho_{xx} v_x u_{xxx} + \frac{1}{12} l_{25u}^{4v} \rho_x v_{xxxx} u_x + \\
 & + \frac{1}{6} l_{26u}^{4v} \rho_x u_{xx} v_{xxx} + \frac{1}{6} l_{27u}^{4v} \rho_x v_{xx} u_{xxx} + \frac{1}{12} l_{28u}^{4v} \rho_x v_x u_{xxxx} \left. \right) + \Delta y^5 \left( \frac{1}{60} l_{1v}^{4v} \rho v_{yyyyy} v_y + \frac{1}{24} l_{2v}^{4v} \rho v_{yyyy} v_{yy} + \right. \\
 & + \frac{1}{36} l_{6v}^{4v} \rho v^2_{yyy} + \frac{1}{120} (l_{14v}^{4v} + l_{9v}^{4v}) v \rho_{yyyyy} v_y + \frac{1}{48} (l_{15v}^{4v} + l_{10v}^{4v}) v \rho_{yyyy} v_{yy} + \frac{1}{36} (l_{16v}^{4v} + l_{11v}^{4v}) v \rho_{yyy} v_{yyy} + \\
 & + \frac{1}{48} (l_{17v}^{4v} + l_{12v}^{4v}) v \rho_{yy} v_{yyy} + \frac{1}{120} l_{3v}^{4v} v \rho_y v_{yyyy} + \frac{1}{12} K_{1v}^{4v} \rho_{yyyy} v_y^2 + \frac{1}{6} K_{2v}^{4v} \rho_{yyy} v_{yy} v_y + \\
 & + \frac{1}{6} K_{3v}^{4v} \rho_{yy} v_{yyy} v_y + \frac{1}{4} K_{4v}^{4v} \rho_{yy} v_{yy}^2 + \frac{1}{6} K_{5v}^{4v} \rho_y v_{yyy} v_y + \frac{1}{6} K_{6v}^{4v} \rho_y v_{yyy} v_{yy} \left. \right) - \\
 & - \Delta z^5 \left( \frac{1}{120} l_{4w}^{4v} \rho v_{zzzzz} w_z + \frac{1}{48} l_{5w}^{4v} \rho v_{zz} w_{zz} + \frac{1}{36} l_{6w}^{4v} \rho v_{zzz} w_{zzz} + \frac{1}{48} l_{7w}^{4v} \rho v_{zz} w_{zzzz} + \frac{1}{120} l_{8w}^{4v} \rho v_z w_{zzzz} + \right. \\
 & + \frac{1}{120} l_{9w}^{4v} v \rho_{zzzzz} w_z + \frac{1}{48} l_{10w}^{4v} v \rho_{zzzz} w_{zz} + \frac{1}{36} l_{11w}^{4v} v \rho_{zzz} w_{zzz} + \frac{1}{48} l_{12w}^{4v} v \rho_{zz} w_{zzzz} + \frac{1}{120} l_{13w}^{4v} v \rho_z w_{zzzz} + \\
 & + \frac{1}{120} l_{14w}^{4v} w \rho_{zzzzz} v_z + \frac{1}{48} l_{15w}^{4v} w \rho_{zzzz} v_{zz} + \frac{1}{36} l_{16w}^{4v} w \rho_{zzz} v_{zzz} + \frac{1}{48} l_{17w}^{4v} w \rho_{zz} v_{zzzz} + \frac{1}{120} l_{18w}^{4v} w \rho_z v_{zzzz} + \\
 & + \frac{1}{12} l_{19w}^{4v} \rho_{zzzz} v_z w_z + \frac{1}{6} l_{20w}^{4v} \rho_{zzz} v_{zz} w_z + \frac{1}{6} l_{21w}^{4v} \rho_{zzz} v_z w_{zz} + \frac{1}{6} l_{22w}^{4v} \rho_{zz} v_{zzz} w_z + \frac{1}{4} l_{23w}^{4v} \rho_{zz} v_{zz} w_{zz} + \\
 & + \frac{1}{6} l_{24w}^{4v} \rho_{zz} v_z w_{zzz} + \frac{1}{12} l_{25w}^{4v} \rho_z v_{zzzz} w_z + \frac{1}{6} l_{26w}^{4v} \rho_z v_{zzz} w_{zz} + \frac{1}{6} l_{27w}^{4v} \rho_z v_{zz} w_{zzz} + \frac{1}{12} l_{28w}^{4v} \rho_z v_z w_{zzzz} \left. \right)
 \end{aligned}$$

Четвертое дифференциальное приближение разностных схем уравнения импульса (проекция на ось OZ):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_p^{4z} = & -\frac{1}{120} \left\{ \rho v w_{yyyyy} \Delta y^4 (30\mathfrak{N}_{v3}^w + 1) + \Delta x^4 \rho u w_{xxxxx} (30\mathfrak{N}_{u3}^w + 1) + \right. \\
 & + \rho w v_{yyyyy} \Delta y^4 (30\mathfrak{N}_{v10}^w + 1) + \rho w w_{zzzzz} \Delta z^4 (30\mathfrak{N}_{w3}^w + 30\mathfrak{N}_{w10}^w + 2) + \\
 & + \rho w u_{xxxxx} \Delta x^4 (30\mathfrak{N}_{u10}^w + 1) + u w \rho_{xxxxx} \Delta x^4 (30\mathfrak{N}_{u1}^w + 1) + v w \rho_{yyyyy} \Delta y^4 (30\mathfrak{N}_{v1}^w + 1) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + w^2 \rho_{zzzz} \Delta z^4 (30 \aleph_{w1}^w + 1) + p_{zzzz} \Delta z^4 + (\rho w)_{uuuu} \Delta t^4 \} - \Delta x^5 \left( \frac{1}{120} l_{4u}^{4w} \rho u_x w_{xxxx} + \frac{1}{48} l_{5u}^{4w} \rho u_{xx} w_{xxxx} + \right. \\
 & + \frac{1}{36} l_{6u}^{4w} \rho u_{xxx} w_{xxx} + \frac{1}{120} l_{7u}^{4w} \rho u_{xxxx} w_{xx} + \frac{1}{120} l_{8u}^{4w} \rho u_{xxxx} w_x + \frac{1}{120} l_{9u}^{4w} w \rho_{xxxx} u_x + \frac{1}{48} l_{10u}^{4w} w \rho_{xxxx} u_{xx} + \\
 & + \frac{1}{36} l_{11u}^{4w} w \rho_{xxx} u_{xxx} + \frac{1}{48} l_{12u}^{4w} w \rho_{xx} u_{xxxx} + \frac{1}{120} l_{13u}^{4w} w \rho_x u_{xxxx} + \frac{1}{120} l_{14u}^{4w} u \rho_{xxxx} w_x + \frac{1}{48} l_{15u}^{4w} u \rho_{xxxx} w_{xx} + \\
 & + \frac{1}{36} l_{16u}^{4w} u \rho_{xxx} w_{xxx} + \frac{1}{48} l_{17u}^{4w} u \rho_{xx} w_{xxxx} + \frac{1}{120} l_{18u}^{4w} u \rho_x w_{xxxx} + \frac{1}{12} l_{19u}^{4w} \rho_{xxxx} w_x u_x + \frac{1}{12} l_{20u}^{4w} \rho_{xxx} u_x w_{xx} + \\
 & + \frac{1}{6} l_{21u}^{4w} \rho_{xxx} w_x u_{xx} + \frac{1}{6} l_{22u}^{4w} \rho_{xx} w_{xxx} u_x + \frac{1}{4} l_{23u}^{4w} \rho_{xx} u_{xx} w_{xx} + \frac{1}{6} l_{24u}^{4w} \rho_{xx} w_x u_{xxx} + \frac{1}{12} l_{25u}^{4w} \rho_x w_{xxxx} u_x + \\
 & + \frac{1}{6} l_{26u}^{4w} \rho_x u_{xx} w_{xxx} + \frac{1}{6} l_{27u}^{4w} \rho_x w_{xx} u_{xxx} + \frac{1}{12} l_{28u}^{4w} \rho_x w_x u_{xxxx} \left. \right) - \Delta y^5 \left( \frac{1}{120} l_{4v}^{4w} \rho w_{yyyy} v_y + \frac{1}{48} l_{5v}^{4w} \rho u_{xx} w_{xxxx} + \right. \\
 & + \frac{1}{36} l_{6v}^{4w} \rho v_{yyy} w_{yyy} + \frac{1}{48} l_{7v}^{4w} \rho v_{yyy} w_{yy} + \frac{1}{120} l_{8v}^{4w} \rho v_{yyy} w_y + \frac{1}{120} l_{9v}^{4w} w \rho_{yyyy} v_y + \frac{1}{48} l_{10v}^{4w} w \rho_{yyyy} v_{yy} + \\
 & + \frac{1}{36} l_{11v}^{4w} w \rho_{yy} v_{yyy} + \frac{1}{48} l_{12v}^{4w} w \rho_{yy} v_{yyy} + \frac{1}{120} l_{13v}^{4w} w \rho_y v_{yyy} + \frac{1}{120} l_{14v}^{4w} v \rho_{yyyy} w_y + \frac{1}{48} l_{15v}^{4w} v \rho_{yyy} w_{yy} + \\
 & + \frac{1}{36} l_{16v}^{4w} v \rho_{yy} w_{yyy} + \frac{1}{48} l_{17v}^{4w} v \rho_{yy} w_{yyy} + \frac{1}{120} l_{18v}^{4w} v \rho_y w_{yyy} + \frac{1}{12} l_{19v}^{4w} \rho_{yyy} w_y v_y + \frac{1}{12} l_{20v}^{4w} \rho_{yy} v_y w_{yy} + \\
 & + \frac{1}{6} l_{21v}^{4w} \rho_{yy} w_y v_{yy} + \frac{1}{6} l_{22v}^{4w} \rho_{yy} v_y w_{yyy} + \frac{1}{4} l_{23v}^{4w} \rho_{yy} v_{yy} w_{yy} + \frac{1}{6} l_{24v}^{4w} \rho_y v_{yyy} w_y + \frac{1}{12} l_{25v}^{4w} \rho_y v_y w_{yyy} + \\
 & + \frac{1}{6} l_{26v}^{4w} \rho_y v_{yy} w_{yyy} + \frac{1}{6} l_{27v}^{4w} \rho_y v_{yyy} w_{yy} + \frac{1}{12} l_{28v}^{4w} \rho_y v_{yyy} w_y \left. \right) - \Delta z^5 \left( \frac{1}{60} l_{1w}^{4w} \rho w_{zzzz} w_z + \frac{1}{24} l_{2w}^{4w} \rho w_{zzzz} w_{zz} + \right. \\
 & + \frac{1}{36} l_{6w}^{4w} \rho w_{zzz}^2 + \frac{1}{120} (l_{14w}^{4w} + l_{9w}^{4w}) \rho w_{zzzz} w_z + \frac{1}{48} (l_{10w}^{4w} + l_{15w}^{4w}) \rho w_{zzzz} w_{zz} + \frac{1}{36} (l_{11w}^{4w} + l_{16w}^{4w}) \rho w_{zzz} w_{zz} + \\
 & + \frac{1}{48} (l_{12w}^{4w} + l_{17w}^{4w}) \rho w_{zz} w_{zzz} + \frac{1}{120} l_{3w}^{4w} w \rho_z w_{zzzz} + \frac{1}{12} K_{1w}^{4w} \rho_{zzzz} w_z^2 + \frac{1}{6} K_{2w}^{4w} \rho_{zzz} w_{zz} w_z + \\
 & \left. + \frac{1}{6} K_{3w}^{4w} \rho_{zz} w_{zzz} w_z + \frac{1}{4} K_{4w}^{4w} \rho_{zz} w_{zz}^2 + \frac{1}{6} K_{5w}^{4w} \rho_z w_{zzzz} w_z + \frac{1}{6} K_{6w}^{4w} \rho_z w_{zzz} w_{zz} \right).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты, содержащиеся в четвертом дифференциальном приближении в уравнении импульса, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 l_{1\phi}^{4\phi} &= \aleph_{\phi 4}^{\phi} (15 \aleph_{\phi 10}^{\phi} + 1) + \aleph_{\phi 3}^{\phi} (15 \aleph_{\phi 11}^{\phi} - 30 \aleph_{\phi 10}^{\phi} - 16) - 16 \aleph_{\phi 10}^{\phi} + \aleph_{\phi 11}^{\phi} - 1, \\
 l_{2\phi}^{4\phi} &= \aleph_{\phi 4}^{\phi} (10 \aleph_{\phi 10}^{\phi} + 1) + \aleph_{\phi 3}^{\phi} (10 \aleph_{\phi 11}^{\phi} - 44 \aleph_{\phi 10}^{\phi} - 9) + \aleph_{\phi 11}^{\phi} - 9 \aleph_{\phi 10}^{\phi} - 1, \\
 l_{3\phi}^{4\phi} &= \aleph_{\phi 11}^{\phi} + \aleph_{\phi 4}^{\phi} + (\aleph_{\phi 3}^{\phi} - \aleph_{\phi 10}^{\phi}) (30 \aleph_{\phi 2}^{\phi} - 30 \aleph_{\phi 1}^{\phi} - 31) + \aleph_{\phi 2}^{\phi} - 2 \aleph_{\phi 1}^{\phi} - 2, \\
 l_{4\phi}^{4\phi} &= (\aleph_{\phi 11}^{\phi} - \aleph_{\phi 10}^{\phi}) (30 \aleph_{\phi 3}^{\phi} + 1) - \aleph_{\phi 4}^{\phi} - 3 \aleph_{\phi 3}^{\phi} - 1, \\
 l_{5\phi}^{4\phi} &= \aleph_{\phi 11}^{\phi} (16 \aleph_{\phi 3}^{\phi} + 1) + \aleph_{\phi 10}^{\phi} (4 \aleph_{\phi 4}^{\phi} - 44 \aleph_{\phi 3}^{\phi} - 3) + \aleph_{\phi 4}^{\phi} - 15 \aleph_{\phi 3}^{\phi} - 1, \\
 l_{6\phi}^{4\phi} &= \aleph_{\phi 11}^{\phi} (6 \aleph_{\phi 3}^{\phi} + 1) + \aleph_{\phi 10}^{\phi} (6 \aleph_{\phi 4}^{\phi} - 4 \aleph_{\phi 3}^{\phi} - 7) + \aleph_{\phi 4}^{\phi} - 7 \aleph_{\phi 3}^{\phi} - 1, \\
 l_{7\phi}^{4\phi} &= \aleph_{\phi 11}^{\phi} (4 \aleph_{\phi 3}^{\phi} + 1) + \aleph_{\phi 10}^{\phi} (16 \aleph_{\phi 4}^{\phi} - 44 \aleph_{\phi 3}^{\phi} - 15) + \aleph_{\phi 4}^{\phi} - 3 \aleph_{\phi 3}^{\phi} - 1,
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 15\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1), \\
l_{26\varphi}^{4\phi} &= (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi})(\aleph_{\varphi 11}^{\phi}(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 10}^{\phi}(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 10\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{3}{2})) - \\
& -\frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1), \\
l_{27\varphi}^{4\phi} &= (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi})(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2})\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi}(4\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 10\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{7}{2}) - \\
& -\frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1), \\
l_{28\varphi}^{4\phi} &= (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi})(\aleph_{\varphi 11}^{\phi}(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{1}{2}) - \aleph_{\varphi 10}^{\phi}(7\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - \frac{15}{2})) - \\
& -\frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 15\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 1), \\
K_{1\varphi}^{4\phi} &= \aleph_{\varphi 4}^{\phi}(\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi})(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1) - \\
& -\frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 15\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - \frac{1}{2} + (2\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1)(\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - \aleph_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2})), \\
K_{2\varphi}^{4\phi} &= \aleph_{\varphi 4}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi}(2\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 8\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1) - (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)\aleph_{\varphi 4}^{\phi}(2\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + 1) + \\
& + \aleph_{\varphi 11}^{\phi}(2\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + 1) - 2\aleph_{\varphi 3}^{\phi} - 2\aleph_{\varphi 10}^{\phi} - 1), \\
K_{3\varphi}^{4\phi} &= \aleph_{\varphi 4}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi}(2\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 2\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1) - (\aleph_{\varphi 4}^{\phi}\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi})(5\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 11\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 4) - \\
& - (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + \aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + \aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 10}^{\phi}(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 20\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 7), \\
K_{4\varphi}^{4\phi} &= \aleph_{\varphi 4}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi}(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1) - (\aleph_{\varphi 4}^{\phi}\aleph_{\varphi 10}^{\phi} + \aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi})(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 5\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{3}{2}) + \\
& + \aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 10}^{\phi}(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 13\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{9}{2}) - \frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + \aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 3\aleph_{\varphi 10}^{\phi} - 1), \\
K_{5\varphi}^{4\phi} &= \aleph_{\varphi 4}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi}(\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{1}{2}) - (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(4\aleph_{\varphi 10}^{\phi}\aleph_{\varphi 4}^{\phi} + 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi}) + \\
& + \frac{1}{2}\aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + \frac{1}{2}\aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 4\aleph_{\varphi 10}^{\phi} - \frac{1}{2} - \aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 10}^{\phi}(7\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 7\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - \frac{15}{2}), \\
K_{6\varphi}^{4\phi} &= \aleph_{\varphi 4}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi}(2\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 2\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1) - (\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - \aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 1)(5\aleph_{\varphi 10}^{\phi}\aleph_{\varphi 4}^{\phi} + 5\aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 11}^{\phi} + \\
& + \aleph_{\varphi 4}^{\phi} - 5\aleph_{\varphi 3}^{\phi} + \aleph_{\varphi 11}^{\phi} - 5\aleph_{\varphi 10}^{\phi} - 1) + \aleph_{\varphi 3}^{\phi}\aleph_{\varphi 10}^{\phi}(20\aleph_{\varphi 2}^{\phi} - 20\aleph_{\varphi 1}^{\phi} - 21).
\end{aligned}$$

Рассмотрим дифференциальные приближения разностных схем уравнения энергии. Второе дифференциальное приближение  $\dot{A}_2^E$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 \ddot{A}_2^E = & -\Delta x^2 \left[ \frac{1}{6} ((E\rho u_{xxx} (6\aleph_{u10}^E + 1) + Eu\rho_{xxx} (6\aleph_{u1}^E + 1) + pu_{xxx} + \rho u E_{xxx} (6\aleph_{u3}^E + 1) + up_{xxx}) + \right. \\
 & + M_{1u}^{2E} E\rho_{xx} u_x + M_{2u}^{2E} E\rho_x u_{xx} + M_{3u}^{2E} E_{xx} \rho u_x + M_{4u}^{2E} E_x \rho u_{xx} + M_{5u}^{2E} E_{xx} \rho_x u + M_{6u}^{2E} E_x \rho_{xx} u + \\
 & + M_{7u}^{2E} E_x \rho_x u_x + \left. \frac{1}{4} (p_x u_x)_x (1 + \aleph_{u2} (\aleph_{u8} - \aleph_{u3}) - \aleph_{u8}) \right] - \\
 & - \Delta y^2 \left[ \frac{1}{6} ((E\rho v_{yyy} (6\aleph_{v10}^E + 1) + Ev\rho_{yyy} (6\aleph_{v1}^E + 1) + pv_{yyy} + \rho v E_{yyy} (6\aleph_{v3}^E + 1) + vp_{yyy}) + \right. \\
 & + M_{1v}^{2E} E\rho_{yy} v_y + M_{2v}^{2E} E\rho_y v_{yy} + M_{3v}^{2E} E_{yy} \rho v_y + M_{4v}^{2E} E_y \rho v_{yy} + M_{5v}^{2E} E_{yy} \rho_y v + M_{6v}^{2E} E_y \rho_{yy} v + \\
 & + M_{7v}^{2E} E_y \rho_y v_y + \left. \frac{1}{4} (p_y v_y)_y (1 + \aleph_{v2} (\aleph_{v8} - \aleph_{v3}) - \aleph_{v8}) \right] - \\
 & - \Delta z^2 \left[ \frac{1}{6} ((E\rho w_{zzz} (6\aleph_{w10}^E + 1) + Ew\rho_{zzz} (6\aleph_{w1}^E + 1) + pw_{zzz} + \rho w E_{zzz} (6\aleph_{w3}^E + 1) + wp_{zzz}) + \right. \\
 & + M_{1w}^{2E} E\rho_{zz} w_z + M_{2w}^{2E} E\rho_z w_{zz} + M_{3w}^{2E} E_{zz} \rho w_z + M_{4w}^{2E} E_z \rho w_{zz} + M_{5w}^{2E} E_{zz} \rho_z w + M_{6w}^{2E} E_z \rho_{zz} w + \\
 & + M_{7w}^{2E} E_z \rho_z w_z + \left. \frac{1}{4} (p_z w_z)_z (1 + \aleph_{w2} (\aleph_{w8} - \aleph_{w3}) - \aleph_{w8}) \right] - \\
 & - \Delta t \Delta x \left[ \aleph_{u1} (l_{1u}^{2E} E\rho^{-1} p_{xx} \rho_x + l_{2u}^{2E} E\rho^{-1} p_x \rho_{xx} + l_{3u}^{2E} E\rho^{-2} p_x \rho_{xx}^{-2} + l_{15u}^{2E} E_x \rho^{-1} p_x \rho_x + \frac{1}{4} l_{16u}^{2E} (\rho^{-1} p_{xx} \rho_x + \right. \\
 & + \rho^{-2} p_x^2 \rho_x) + l_{20u}^{2E} E_{xx} p_x + l_{21u}^{2E} E_x p_{xx}) + \aleph_{u2} ((l_{6u}^{2E} + l_{4u}^{2E}) p \rho^{-1} u_x \rho_{xx} + l_{7u}^{2E} p \rho^{-1} u \rho_x u_{xx} + l_{9u}^{2E} p \rho^{-1} \rho_x u_x^2 + \\
 & + l_{11u}^{2E} p \rho^{-2} u \rho_x^2 u_x + (l_{14u}^{2E} + l_{5u}^{2E}) p u_{xx} u_x + l_{7u}^{2E} \rho^{-1} p_{xx} \rho_x u^2 + l_{8u}^{2E} \rho^{-1} u^2 \rho_{xx} p_x + l_{10u}^{2E} \rho^{-1} u p_x \rho_x u_x + \\
 & + l_{11u}^{2E} \rho^{-2} u^2 \rho_x^2 p_x + l_{18u}^{2E} u p_{xx} u_x + \frac{1}{2} l_{19u}^{2E} u p_x u_{xx} + 2l_{18u}^{2E} p_x u_x^2) + \aleph_{v2} (l_{6u}^{2E} \rho^{-1} u \rho_{xx} (pv)_y + \\
 & + l_{7u}^{2E} \rho^{-1} u \rho_x (pv)_{yx} + l_{9u}^{2E} \rho^{-1} u_x \rho_x (pv)_y + l_{11u}^{2E} \rho^{-2} \rho_x^2 u (pv)_y + \frac{1}{2} l_{12u}^{2E} p u v_{xy} + l_{13u}^{2E} p u_x v_{xy} + \\
 & + l_{14u}^{2E} u_{xx} p v_y + l_{17u}^{2E} (\frac{1}{2} u (p_{xx} v)_y + u (p_x v_x)_y + \frac{1}{2} u p_y v_{xx}) + l_{18u}^{2E} (u_x (p_x v)_y + p_y u_x v_x) + \\
 & + \frac{1}{2} l_{19u}^{2E} v p_y u_{xx}) + \aleph_{w2} (l_{6u}^{2E} \rho^{-1} u \rho_{xx} (pw)_z + l_{7u}^{2E} \rho^{-1} u \rho_x (pw)_{zx} + l_{9u}^{2E} \rho^{-1} u_x \rho_x (pw)_z + \\
 & + l_{11u}^{2E} \rho^{-2} \rho_x^2 u (pw)_z + l_{17u}^{2E} (\frac{1}{2} u (w p_{xx})_z + \frac{1}{2} u p_z w_{xx} + u (p_x w_x)_z) + l_{18u}^{2E} (u_x (p_x w)_z + \\
 & + p_z u_x w_x) + \left. \frac{1}{2} l_{19u}^{2E} w p_z u_{xx}) \right] - \\
 & - \Delta t \Delta y \left[ \aleph_{v1} (l_{1v}^{2E} E\rho^{-1} p_{yy} \rho_y + l_{2v}^{2E} E\rho^{-1} p_y \rho_{yy} + l_{3v}^{2E} E\rho^{-2} p_{yy} \rho_y^2 + l_{15v}^{2E} E_y \rho^{-1} p_y \rho_y + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} l_{16v}^{2E} (\rho^{-1} p_{yy} \rho_y + \rho^{-2} p_y^2 \rho_y) + l_{20v}^{2E} E_{yy} p_y + l_{21v}^{2E} E_y p_{yy} + \aleph_{v2} ((l_{6v}^{2E} + l_{4v}^{2E}) p \rho^{-1} v_y \rho_{yy} + \\
& + l_{7v}^{2E} p \rho^{-1} v_y \rho_y v_{yy} + l_{9v}^{2E} p \rho^{-1} \rho_y v_y^2 + l_{11v}^{2E} p \rho^{-2} v \rho_y^2 v_y + (l_{14v}^{2E} + l_{5v}^{2E}) p v_{yy} v_y + l_{7v}^{2E} \rho^{-1} p v_y \rho_y v^2 + \\
& + l_{8v}^{2E} \rho^{-1} v^2 \rho_{yy} p_y + l_{10v}^{2E} \rho^{-1} v p_y \rho_y v_y + l_{11v}^{2E} \rho^{-2} v^2 \rho_y^2 p_y + l_{18v}^{2E} v p_{yy} v_y + \frac{1}{2} l_{19v}^{2E} v p_y v_{yy} + 2 l_{18v}^{2E} p_y v_y^2) + \\
& + \aleph_{u2} (l_{6v}^{2E} \rho^{-1} v \rho_{yy} (pu)_x + l_{7v}^{2E} \rho^{-1} v \rho_y (pu)_{xy} + l_{9v}^{2E} \rho^{-1} v_y \rho_y (pu)_x + l_{11v}^{2E} \rho^{-2} \rho_y^2 v (pu)_x + \\
& + \frac{1}{2} l_{12v}^{2E} p v u_{yyy} + l_{13v}^{2E} p v_y u_{yy} + l_{14v}^{2E} v_{yy} p u_y + l_{17v}^{2E} (\frac{1}{2} v (p_{yy} u)_x + v (p_y u_y)_x + \frac{1}{2} u p_x u_{yy}) + l_{18v}^{2E} (v_y (p_y u)_x + \\
& + p_x u_y v_y) + \frac{1}{2} l_{19v}^{2E} u p_x v_{yy}) + \aleph_{w2} (l_{6v}^{2E} \rho^{-1} v \rho_{yy} (pw)_z + l_{7v}^{2E} \rho^{-1} v \rho_y (pw)_{zy} + l_{9v}^{2E} \rho^{-1} v_y \rho_y (pw)_z + \\
& + l_{11v}^{2E} \rho^{-2} \rho_y^2 v (pw)_z + \frac{1}{2} l_{12v}^{2E} p v w_{yyz} + l_{13v}^{2E} p v_y w_{yz} + l_{14v}^{2E} p v_{yy} w_z + l_{17v}^{2E} (\frac{1}{2} v (w p_{yy})_z + \\
& + \frac{1}{2} u p_z w_{yy} + v (p_y w_y)_z) + l_{18v}^{2E} (v_y (p_y w)_z + p_z v_y w_y) + \frac{1}{2} l_{19v}^{2E} w p_z v_{yy})] - \\
& - \Delta t \Delta z [\aleph_{w1} (l_{1w}^{2E} E \rho^{-1} p_{zz} \rho_z + l_{2w}^{2E} E \rho^{-1} p_z \rho_{zz} + l_{3w}^{2E} E \rho^{-2} p_z \rho_z^2 + l_{15w}^{2E} E_z \rho^{-1} p_z \rho_z + \frac{1}{4} l_{16w}^{2E} (\rho^{-1} p_{zz} \rho_z + \\
& + \rho^{-2} p_z^2 \rho_z) + l_{20w}^{2E} E_{zz} p_z + l_{21w}^{2E} E_z p_{zz}) + \aleph_{w2} ((l_{6w}^{2E} + l_{4w}^{2E}) p \rho^{-1} w_z \rho_{zz} + l_{7w}^{2E} p \rho^{-1} w \rho_z w_{zz} + \\
& + l_{9w}^{2E} p \rho^{-1} \rho_w w_z^2 + l_{11w}^{2E} p \rho^{-2} w \rho_z^2 w_z + (l_{14w}^{2E} + l_{5w}^{2E}) p w_{zz} w_z + l_{7w}^{2E} \rho^{-1} p_{zz} \rho_z w^2 + l_{8w}^{2E} \rho^{-1} w^2 \rho_{zz} p_z + \\
& + l_{10w}^{2E} \rho^{-1} w p_z \rho_z w_z + l_{11w}^{2E} \rho^{-2} w^2 \rho_z^2 p_z + l_{18w}^{2E} w p_{zz} w_z + \frac{1}{2} l_{19w}^{2E} w p_z w_{zz} + 2 l_{18w}^{2E} p_z w_z^2) + \\
& + \aleph_{u2} (l_{6w}^{2E} \rho^{-1} w \rho_{zz} (pu)_x + l_{7w}^{2E} \rho^{-1} w \rho_z (pu)_{xz} + l_{9w}^{2E} \rho^{-1} w_z \rho_z (pu)_x + l_{11w}^{2E} \rho^{-2} \rho_z^2 w (pu)_x + \\
& + \frac{1}{2} l_{12w}^{2E} p w u_{xzz} + l_{13w}^{2E} p w_z u_{xz} + l_{14w}^{2E} w_{zz} p u_x + l_{17w}^{2E} (\frac{1}{2} w (p_{zz} u)_x + w (p_z u_z)_x + \frac{1}{2} w p_x u_{zz}) + \\
& + l_{18w}^{2E} (w_z (p_z u)_x + p_x u_z w_z) + \frac{1}{2} l_{19w}^{2E} u p_x w_{zz}) + \aleph_{v2} (l_{6w}^{2E} \rho^{-1} w \rho_{zz} (pv)_y + l_{7w}^{2E} \rho^{-1} w \rho_x (pv)_{yz} + \\
& + l_{9w}^{2E} \rho^{-1} w_z \rho_z (pv)_y + l_{11w}^{2E} \rho^{-2} \rho_z^2 w (pv)_y + \frac{1}{2} l_{12w}^{2E} p w v_{yzz} + l_{13w}^{2E} p w_z v_{yz} + l_{14w}^{2E} p w_{zz} v_y + \\
& + l_{17w}^{2E} (\frac{1}{2} w (v p_{zz})_y + \frac{1}{2} w p_y v_{zz} + w (p_z v_z)_y) + l_{18w}^{2E} (w_z (p_z v)_y + p_y v_z w_z) + \frac{1}{2} l_{19w}^{2E} v p_y w_{zz})]
\end{aligned}$$

Коэффициенты, содержащиеся в выражениях второго дифференциального приближении уравнения энергии, могут быть определены из следующих формул:



$$\begin{aligned}
 l_{17\varphi}^{2E} &= -\aleph_{\varphi 8}^E (\aleph_{\varphi 4}^E + \aleph_{\varphi 3}^E - 1) + 3\aleph_{\varphi 7}^E \aleph_{\varphi 3}^E - \aleph_{\varphi 4}^E \aleph_{\varphi 9}^E, \\
 l_{18\varphi}^{2E} &= (\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E - 1)(\aleph_{\varphi 8}^E (\aleph_{\varphi 4}^E + \aleph_{\varphi 3}^E - 1) - \aleph_{\varphi 7}^E \aleph_{\varphi 3}^E - \aleph_{\varphi 4}^E \aleph_{\varphi 9}^E) + \aleph_{\varphi 7}^E \aleph_{\varphi 3}^E - \aleph_{\varphi 4}^E \aleph_{\varphi 9}^E, \\
 l_{19\varphi}^{2E} &= -(2\aleph_{\varphi 11}^E - 2\aleph_{\varphi 10}^E - 1)(\aleph_{\varphi 7}^E \aleph_{\varphi 3}^E - \aleph_{\varphi 8}^E (\aleph_{\varphi 4}^E + \aleph_{\varphi 3}^E - 1) + \aleph_{\varphi 4}^E \aleph_{\varphi 9}^E), \\
 l_{20\varphi}^{2E} &= -(\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 11}^E \aleph_{\varphi 14}^E - \aleph_{\varphi 13}^E (\aleph_{\varphi 11}^E + \aleph_{\varphi 10}^E - 1) + \aleph_{\varphi 12}^E \aleph_{\varphi 10}^E), \\
 l_{21\varphi}^{2E} &= -(\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 11}^E \aleph_{\varphi 14}^E - \aleph_{\varphi 13}^E (\aleph_{\varphi 11}^E + \aleph_{\varphi 10}^E - 1) + \aleph_{\varphi 12}^E \aleph_{\varphi 10}^E) + \aleph_{\varphi 12}^E \aleph_{\varphi 10}^E - \aleph_{\varphi 11}^E \aleph_{\varphi 14}^E,
 \end{aligned}$$

Третье дифференциальное приближение разностных схем уравнения энергии будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 D_3^E &= -\Delta x^3 \left[ \frac{1}{12} (E\rho u_{xxxx} (\aleph_{u11}^E - 7\aleph_{u10}^E - \frac{1}{2}) + Eu\rho_{xxxx} (\aleph_{u2}^E - 7\aleph_{u1}^E - \frac{1}{2}) + \right. \\
 &+ \rho u E_{xxxx} (\aleph_{u4}^E - 7\aleph_{u3}^E - \frac{1}{2}) + \frac{1}{6} l_{1u}^{3E} \rho_{xxxx} u_x E + \frac{1}{4} l_{2u}^{3E} E \rho_{xx} u_{xx} + \frac{1}{6} l_{3u}^{3E} E \rho_x u_{xxx} + \\
 &+ \frac{1}{6} l_{4u}^{3E} \rho E_{xxx} u_x + \frac{1}{4} l_{5u}^{3E} \rho E_{xx} u_{xx} + \frac{1}{6} l_{6u}^{3E} \rho E_x u_{xxx} + \frac{1}{6} l_{7u}^{3E} \rho_x E_{xxx} u + \frac{1}{4} l_{8u}^{3E} \rho_{xx} E_{xx} u + \\
 &+ \left. \frac{1}{6} l_{9u}^{3E} \rho_{xxx} E_x u + l_{10u}^{3E} \rho_x E_{xx} u_x + l_{11u}^{3E} \rho_{xx} E_x u_x + l_{12u}^{3E} \rho_x E_x u_{xx} \right] - \\
 &- \Delta y^3 \left[ \frac{1}{12} (E\rho v_{yyyy} (\aleph_{v11}^E - 7\aleph_{v10}^E - \frac{1}{2}) + Ev\rho_{yyyy} (\aleph_{v2}^E - 7\aleph_{v1}^E - \frac{1}{2}) + \right. \\
 &+ \rho v E_{yyyy} (\aleph_{v4}^E - 7\aleph_{v3}^E - \frac{1}{2}) + \frac{1}{6} l_{1v}^{3E} \rho_{yyyy} v_y E + \frac{1}{4} l_{2v}^{3E} E \rho_{yy} v_{yy} + \frac{1}{6} l_{3v}^{3E} E \rho_y v_{yyy} + \\
 &+ \frac{1}{6} l_{4v}^{3E} \rho E_{yyy} v_y + \frac{1}{4} l_{5v}^{3E} \rho E_{yy} v_{yy} + \frac{1}{6} l_{6v}^{3E} \rho E_y v_{yyy} + \frac{1}{6} l_{7v}^{3E} \rho_y E_{yyy} v + \frac{1}{4} l_{8v}^{3E} \rho_{yy} E_{yy} v + \\
 &+ \left. \frac{1}{6} l_{9v}^{3E} \rho_{yyy} E_y v + l_{10v}^{3E} \rho_y E_{yy} v_y + l_{11v}^{3E} \rho_{yy} E_y v_y + l_{12v}^{3E} \rho_y E_y v_{yy} \right] - \\
 &- \Delta z^3 \left[ \frac{1}{12} (E\rho w_{zzzz} (\aleph_{w11}^E - 7\aleph_{w10}^E - \frac{1}{2}) + Ew\rho_{zzzz} (\aleph_{w2}^E - 7\aleph_{w1}^E - \frac{1}{2}) + \right. \\
 &+ \rho w E_{zzzz} (\aleph_{w4}^E - 7\aleph_{w3}^E - \frac{1}{2}) + \frac{1}{6} l_{1w}^{3E} \rho_{zzz} w_z E + \frac{1}{4} l_{2w}^{3E} E \rho_{zz} w_{zz} + \frac{1}{6} l_{3w}^{3E} E \rho_z w_{zzz} + \\
 &+ \frac{1}{6} l_{4w}^{3E} \rho E_{zzz} w_z + \frac{1}{4} l_{5w}^{3E} \rho E_{zz} w_{zz} + \frac{1}{6} l_{6w}^{3E} \rho E_z w_{zzz} + \frac{1}{6} l_{7w}^{3E} \rho_z E_{zzz} w + \frac{1}{4} l_{8w}^{3E} \rho_{zz} E_{zz} w + \\
 &+ \left. \frac{1}{6} l_{9w}^{3E} \rho_{zzz} E_z w + l_{10w}^{3E} \rho_z E_{zz} w_z + l_{11w}^{3E} \rho_{zz} E_z w_z + l_{12w}^{3E} \rho_z E_z w_{zz} \right]
 \end{aligned}$$

Коэффициенты, получающиеся в третьем дифференциальном приближении в уравнении энергии, будут иметь вид:

$$l_{1\varphi}^{3E} = (\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E)(6\aleph_{\varphi 1}^E + 1) + \aleph_{\varphi 2}^E - 7\aleph_{\varphi 1}^E - 1,$$

$$\begin{aligned}
 l_{2\varphi}^{3E} &= \aleph_{\varphi 11}^E (4\aleph_{\varphi 1}^E + 1) + \aleph_{\varphi 10}^E (4\aleph_{\varphi 2}^E - 8\aleph_{\varphi 1}^E - 3) + \aleph_{\varphi 2}^E - 3\aleph_{\varphi 1}^E - 1, \\
 l_{3\varphi}^{3E} &= \aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E + (6\aleph_{\varphi 10}^E + 1)(\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - 1), \\
 l_{4\varphi}^{3E} &= (6\aleph_{\varphi 3}^E + 1)(\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E - 1) + \aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E, \\
 l_{5\varphi}^{3E} &= \aleph_{\varphi 10}^E (4\aleph_{\varphi 4}^E - 8\aleph_{\varphi 3}^E - 3) + \aleph_{\varphi 11}^E (4\aleph_{\varphi 3}^E + 1) + \aleph_{\varphi 4}^E - 3\aleph_{\varphi 3}^E - 1, \\
 l_{6\varphi}^{3E} &= (\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E - 1)(6\aleph_{\varphi 10}^E + 1) + \aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E, \\
 l_{7\varphi}^{3E} &= (\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - 1)(6\aleph_{\varphi 3}^E + 1)\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E, \\
 l_{8\varphi}^{3E} &= (\aleph_{\varphi 2}^E - 2\aleph_{\varphi 1}^E - 1)4\aleph_{\varphi 3}^E + \aleph_{\varphi 2}^E + \aleph_{\varphi 3}^E - 1 - 3\aleph_{\varphi 1}^E + \aleph_{\varphi 4}^E (4\aleph_{\varphi 1}^E + 1), \\
 l_{9\varphi}^{3E} &= (\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E - 1)(6\aleph_{\varphi 1}^E + 1) + \aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E, \\
 l_{10\varphi}^{3E} &= (\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E - \frac{1}{2})\aleph_{\varphi 4}^E - (\aleph_{\varphi 3}^E + \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - 1)(\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E - 1) + \\
 &+ \frac{1}{2}\aleph_{\varphi 3}^E (\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - 1 + \aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E) + \frac{1}{4}\aleph_{\varphi 4}^E, \\
 l_{11\varphi}^{3E} &= (\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E) - \frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 2}^E - 3\aleph_{\varphi 1}^E - 1)(\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E - 1) + \\
 &+ \aleph_{\varphi 1}^E (\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E) - \frac{1}{4}\aleph_{\varphi 10}^E, \\
 l_{12\varphi}^{3E} &= (\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E - \frac{1}{2})\aleph_{\varphi 4}^E + \aleph_{\varphi 10}^E (\aleph_{\varphi 4}^E - \aleph_{\varphi 3}^E - 1 + \aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E) + \\
 &+ \frac{1}{2}(\aleph_{\varphi 3}^E + 1)(\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E - 1 + \aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E) - (\aleph_{\varphi 3}^E + \frac{1}{2})(\aleph_{\varphi 2}^E - \aleph_{\varphi 1}^E)(\aleph_{\varphi 11}^E - \aleph_{\varphi 10}^E) + \frac{1}{4}\aleph_{\varphi 4}^E.
 \end{aligned}$$

## Выводы

1. Предложена разностная модель метода крупных частиц Ю.М. Давыдова для расчета пространственно-двумерных фильтрационных течений газа на треугольной сетке. По оси абсцисс  $Ox$  была выбрана трехточечная аппроксимация, а по оси  $Oy$  - шеститочечная аппроксимация. Потoki масс через границы эйлеровых ячеек за время  $\Delta t$  рассчитаны по формулам первого порядка точности.

2. Предложен вычислительный алгоритм метода крупных частиц Ю.М. Давыдова для расчета пространственно-трехмерных потоков газа. Здесь область интегрирования разбита на призмы с треугольным основанием.

3. С помощью мощного аппарата метода дифференциальных приближений исследованы нелинейные свойства разностных схем метода крупных частиц Ю.М. Давыдова для расчета течений вязкого теплопроводного



газа. Исходная система уравнений пространственно-одномерного движения газа расщепляется на две вспомогательные системы. Получены гиперболическая форма второго дифференциального приближения, определены элементы матрицы аппроксимационной вязкости разностных схем метода крупных частиц для расчета потоков вязкого теплопроводного газа.

4. Применена система аналитических вычислений на ЭВМ «Reduce-3» для исследования нелинейных свойств метода крупных частиц Ю.М. Давыдова для моделирования инерционных фильтрационных изотермических течений упругой жидкости. На ЭВМ вычислена гиперболическая форма первого дифференциального приближения разностных схем метода Давыдова.

5. С помощью метода дифференциальных приближений исследованы глубокие нелинейные свойства многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Ю.М. Давыдова применительно к решению системы уравнений Эйлера газовой динамики. Используя систему аналитических вычислений «Reduce-3», изучены диссипативные, дисперсионные и другие свойства многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц для расчета пространственно-трехмерных течений газовой динамики. Аналитически вычислены на ЭВМ первое, второе, третье и четвертое приближения разностных схем метода крупных частиц для уравнений неразрывности, импульса и энергии в пространственно-трехмерном случае. Определены элементы матриц аппроксимационной вязкости, дисперсии, бидисперсии и др.



## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Основные результаты, полученные в диссертации и выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Методом малых возмущений, основное уравнение газовой динамики, написанное относительно потенциала скорости (т.е. уравнения Эйлера) для случая пространственно-трехмерных потенциальных течений, приведено к рекуррентной системе уравнений в частных производных второго порядка.

В нулевом приближении относительно потенциала возмущения получается нелинейное уравнение Кармана, являющееся основным при изучении пространственных трансзвуковых течений газа. Полученные последующие приближения уравнения Эйлера являются линейными неоднородными уравнениями в частных производных второго порядка.

2. Методами математической физики найдено решение уравнения Кармана, описывающее потенциальное течение типа Мейера в сопле Лавалья. Изучены переходный режим работы сопла и течение Тейлора в сопле Лавалья. На основе выведенной рекуррентной системы уравнений, определено решение, являющееся первым приближением потенциала скорости возмущения.

Методом разделения переменных Фурье найдено решение уравнения Кармана, соответствующее стационарному пространственному трансзвуковому течению газа в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода, имеющей излом стенки. Определены последующие приближения потенциала скорости возмущения, служащие решениями уравнения Ламе. Определены уравнения звуковой и характеристической поверхностей. Построено решение, описывающее пространственно-трехмерное стационарное околосзвуковое течение газа в сопле с двумя сужениями.

Найдены автомодельные решения уравнения Кармана, описывающие сверхзвуковое течение газа в слабовогнутой трубе. Также изучены задачи обтекания выпуклой стенки потоком газа, истечение газа из сосуда с критической скоростью, течения расширения Прандтля-Мейера и т.д.

3. Применяя метод малых возмущений к пространственно-трехмерным нестационарным уравнениям Эйлера выведена рекуррентная система уравнений в частных производных второго порядка. Относительно нулевого



(основного) приближения потенциала возмущения здесь получается нелинейное уравнение Линя-Рейснера-Тзяня – основное уравнение для исследования пространственных нестационарных трансзвуковых потоков газа. Остальные приближения рекуррентной системы являются линейными неоднородными уравнениями в частных производных второго порядка. Здесь, используя рекуррентную дифференциальную систему и задавая номер приближения «n», можно выписать соответствующее приближение к уравнению Эйлера, а интегрированием полученного дифференциального уравнения можно определить необходимые приближения в составленном формальном ряду по степеням малого параметра " $\varepsilon$ ".

4. Найдено автомодельное решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, описывающее пространственное нестационарное течение мейеровского типа в сопле Лавалья. В этом случае переход от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым скоростям в горловине сопла осуществляется через поверхность стационарного эллиптического параболоида. Найдено решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня, соответствующее потенциальному безударному течению типа Мейера в сопле Лавалья. Данное решение характеризует течение газа, имеющее звуковую поверхность перехода в виде нестационарного эллиптического параболоида. Построены точные аналитические решения уравнения Линя-Рейснера-Тзяня для плоского случая, с помощью которых можно смоделировать пространственно-трехмерное нестационарное потенциальное истечение газа из сосуда и обтекание потоком газа искривленной поверхности.

5. На основе нестационарного уравнения Эйлера, записанного относительно потенциала скорости, применяя метод малых возмущений, выведена рекуррентная система уравнений в частных производных второго порядка, позволяющая исследовать в пространстве нестационарные течения газа при до- и сверхзвуковых скоростях. В случае нулевого приближения потенциала возмущенных скоростей здесь получается волновое уравнение.

6. Разработан приближенно-аналитический метод для исследования плоских нестационарных трансзвуковых течений двухфазных сред (газ и твердые частицы).

Используя метод малых возмущений, система дифференциальных уравнений двухфазных сред, состоящая из уравнений неразрывности,



движения, энергии и уравнения состояния для каждой из фаз равновесия потока в предположении того, что температурное и скоростное отставания фаз наступает в трансзвуковом приближении, относительно составляющих вектора скорости получается система уравнений Линя-Рейснера-Тзяня. Для определения температурного и скоростного отставаний фаз и первых приближений скорости, температуры, давления и плотности получена система линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

7. Приближенно-аналитическими методами математической физики исследованы нестационарные трансзвуковые течения смеси газа и твердых частиц в сопле Лавалья, в сопле с прямой звуковой линией перехода, имеющем излом стенки, а также течения в сопле с двумя сужениями. Изучены внешние задачи трансзвуковой аэродинамики, в частности, течение Прандтля-Мейера около угла. Интегрированием системы уравнений в частных производных определены температурное и скоростное отставания фаз, первые приближения составляющих вектора скорости, плотности, давления, температуры, соответствующие обоим фазам – газу и твердым частицам.

8. Предложены разностные схемы метода Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича и проведен сравнительный анализ численных решений, полученных при использовании модели С.А. Христиановича с численными решениями, полученными при использовании модели А. Дарси на примере тестовой пространственно-двумерной задачи.

9. Исследованы нелинейные свойства разностных схем метода Давыдова для решения задач инерционной фильтрации при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича с применением системы аналитических вычислений REDUCE (гиперболическая форма четвертого дифференциального приближения, параболическая форма второго дифференциального приближения, элементы матриц аппроксимационной вязкости).

10. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных относительно потенциала скорости, описывающее пространственно-трехмерную фильтрацию совершенного газа при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича.



11. Выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений второго порядка для моделирования пространственно-трехмерной фильтрации газа в пласте при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича и найден класс точных аналитических решений полученного дифференциального уравнения в случае нулевого приближения потенциала скорости возмущения.

12. Предложена разностная модель метода Давыдова на треугольной сетке для расчета газодинамических течений в пространственно-двумерном случае, а также численный алгоритм метода Давыдова на призматической сетке для решения пространственно-трехмерных задач газовой динамики.

13. Исследованы разностные схемы метода Давыдова для расчета течений вязкого и теплопроводного газа. Методом дифференциальных приближений здесь определены гиперболическая форма второго дифференциального приближения, а также элементы матрицы аппроксимационной вязкости.

14. Исследованы глубокие нелинейные свойства многопараметрического класса разностных схем метода Давыдова для пространственно-трехмерной нестационарной газодинамической системы уравнений Эйлера: на ЭВМ при использовании языка аналитических вычислений REDUCE-3 получены дифференциальные приближения пятого порядка в гиперболической форме для уравнений неразрывности, импульса и энергии. Определены элементы матриц аппроксимационной вязкости, дисперсии, бидисперсии и др.



## ЛИТЕРАТУРА:

1. **Азиз, Х.** Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари // Москва: Недра, 1982. - 407 с.
2. **Акжолов, М.Ж.** Обтекание полупроницаемых тел с граничными условиями Давыдова / М.Ж. Акжолов // Математическое моделирование в естественных науках. - Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 1998. - С. 28-29.
3. **Акжолов, М.Ж.** Расчет обтекания газом произвольного профиля парашюта методом крупных частиц / М.Ж. Акжолов, Б. Чечейбаев, К.Т. Осмонов // Компьютеры в учебном процессе и науке. Материалы III Республиканской научно-методической конференции. - Бишкек, КСХИ им. К.И. Скрябина, 1994. – С. 64-65.
4. **Баранцев, Р.Г.** Лекции по трансзвуковой аэродинамике / Р.Г. Баранцев // Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. - 215 с.
5. **Баренблатт, Г.И.** Движение жидкостей и газов в пористых средах / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик // Москва: Недра, 1984. - 208 с.
6. **Баренблатт, Г.И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик // Москва: Недра, 1972. - 287с.
7. **Бартеньев, О.В.** Современный Фортран / О.В. Бартеньев // Москва: Диалог-МИФИ, 1998. - 397 с.
8. **Басниев, К.С.** Подземная гидравлика. / К.С. Басниев, А.М. Власов, И.Н. Кочина, В.М. Максимов // Москва: Недра, 1986. – 303 с.
9. **Басниев, К.С.** Подземная гидромеханика / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов // Москва: Недра, 1993. – 416 с.
10. **Бейли.** Течение газа с твердыми частицами в осесимметричном сопле / Бейли, Нильсон, Серра, Цупник // Ракетная техника, 1961, №6, с. 56-62.
11. **Белоцерковский, О.М.** Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов // Вычислительный эксперимент. - М.: Наука, 1982. - 392 с.



12. **Белоцерковский, О.М.** Диссипативные свойства разностных схем // О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов // Москва: МФТИ, 1981. - 132 с.
13. **Берс, Л.** Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики / Л. Берс // Москва: ИЛ, 1961. - 208 с.
14. **Бибиков, Ю.Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков // Москва: Высшая школа, 1991. - 303 с.
15. **Бийбосунов, И.Б.** К теории нестационарных околозвуковых течений сжимаемой жидкости / И.Б. Бийбосунов, У. Сейталиев, Б. Чечейбаев // Известия АН Республики Кыргызстан. Физико-технические, математические и горно-геологические науки. 1991. №2. – Бишкек, 1991. - С. 35 - 42.
16. **Бийбосунов, И.Б.** Плоские и осесимметричные течения газа в сопле Лавалья / И.Б. Бийбосунов, Р. Табышов, У. Туганбаев, Б. Чечейбаев // В сб.: V Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. – Алма-Ата, 1981. - С 61.
17. **Бийбосунов, И.Б.** Приближенно-аналитический метод решения задач трансзвуковых течений двухфазных сред / И.Б. Бийбосунов, Б.Чечейбаев, У. Сейталиев // Вестник КГНУ. Серия естественно-технических наук. – Бишкек, 1994.
18. **Бормашенко, Г.В.** Вычислительные пространства Давыдова в задачах нефтегазового комплекса / Г.В. Бормашенко // В сб.: "Нефть и газ 2003. 57-я Межвузовская научная конференция. Тезисы докладов". Секция 2 "Разработка нефтяных и газовых месторождений, бурение скважин". - М.: Мин-во образования РФ, Российский гос. ун-т нефти газа им. И.М. Губкина, 2003. – С. 52, 67-6.
19. **Гриценко, А.И.** Руководство по исследованию скважин / А.И. Гриценко, З.С. Алиев, О.М. Ермилов, В.В. Ремизов, Г.А. Зотов // Москва: Наука, 1995. - 523 с.
20. **Гудерлей, К. Г.** О необходимости существования скачков уплотнения в смешанных потоках / К.Г. Гудерлей // В сб.: Проблемы механики. Вып. 1. /Под ред. Р.Мизеса и Т.Кармана. - М.: ИЛ, 1955.



21. **Гудерлей, К. Г.** Теория околзвуковых течений / К.Г. Гудерлей. Москва: ИЛ, 1960. - 422 с.
22. **Давыдов, Ю.М.** Разработка нестационарного метода крупных частиц и расчет обтекания цилиндрического торца на трансзвуковых и сверхзвуковых режимах / Ю.М. Давыдов// Москва: МФТИ, 1969. – 61 с.
23. **Давыдов, Ю.М.** Метод крупных частиц для задач газовой динамики. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ. - мат. наук. / Ю.М. Давыдов// Москва: МФТИ, 1970. – 183 с.
24. **Давыдов, Ю.М.** Об одном методе исследования устойчивости нелинейных разностных уравнений / Ю.М. Давыдов // В сб.: Труды МФТИ. Серия «Аэрофизика, прикладная математика» - Москва: МФТИ, 1971. – С. 79-92.
25. **Давыдов, Ю.М.** Исследование нелинейных колебаний возникающих при решении эволюционных разностных схем / Ю.М. Давыдов// В кн.: Проблемы нелинейных колебаний механических систем. - Киев: Наукова Думка, 1974. – С. 59.
26. **Давыдов, Ю.М.** Применение метода дифференциальных приближений для исследования устойчивости разностных схем газовой динамики / Ю.М. Давыдов// В кн.: VI Международная конференция по численным методам в гидродинамике. – Москва: Институт прикладной математики АН СССР, 1978. – С. 95-100.
27. **Давыдов, Ю.М.** Исследование устойчивости разностных схем на границах расчетной области методом дифференциальных приближений / Ю.М. Давыдов// Доклады АН СССР, 1979. Т. 244. №6. – С. 1298-1302.
28. **Давыдов, Ю.М.** Многопараметрические схемы расщепления для решения пространственно-трехмерных нестационарных задач / Ю.М. Давыдов// Доклады АН СССР, 1979. Т. 247. №6. – С. 1346-1350.
29. **Давыдов, Ю.М.** О применении метода дифференциальных приближений для анализа устойчивости систем разностных уравнений / Ю.М.



Давыдов // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск.

СО АН СССР, 1979. Т. 10. №6. – С. 40-45.

30. **Давыдов, Ю.М.** Структура аппроксимационной вязкости / Ю.М. Давыдов // Доклады АН СССР, 1979. Т. 245. №4. – С. 41-59.

31. **Давыдов, Ю.М.** Применение метода дифференциальных приближений для исследования и построения разностных схем / Ю.М. Давыдов // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1980. Т. 11. №4. – С. 41-59.

32. **Давыдов, Ю.М.** Дифференциальные приближения и представления разностных схем / Ю.М. Давыдов // Москва: МФТИ, 1981. - 131 с.

33. **Давыдов, Ю.М.** Крупных частиц метод / Ю.М. Давыдов // В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 3. – Москва: Советская энциклопедия, 1982. – С. 125-129.

34. **Давыдов, Ю.М.** О конечности сеточного расстояния влияния краевых условий / Ю.М. Давыдов // Доклады АН СССР, 1982. Т. 263. №5. С. 1043-1046.

35. **Давыдов, Ю.М.** Архитектурная матрица аппроксимационной вязкости / Ю.М. Давыдов // Доклады АН СССР, 1984. Т. 278. №4. С. 789-792.

36. **Давыдов, Ю.М.** Схемная вязкость / Ю.М. Давыдов // В кн.: Математическая энциклопедия. Т. 5. – Москва: Советская энциклопедия, 1984.

37. **Давыдов, Ю.М.** Разные виды матриц аппроксимационной дисперсии разностных схем / Ю.М. Давыдов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1985. №9. С. 1442-1425.

38. **Давыдов, Ю.М.** Крупных частиц метод / Ю.М. Давыдов // В кн.: Математический энциклопедический словарь. – Москва: Советская энциклопедия, 1988. – С. 303-304.

39. **Давыдов, Ю.М.** Современные проблемы численных методов механики сплошных сред / Ю.М. Давыдов // В сб.: Международная конференция «Разработка газоконденсатных месторождений». Секция 6. Фундаментальные и поисковые научные исследования. - М.: МИНХ и ГП им. И.М. Губкина, 1990. - С. 69 - 73.



40. **Давыдов, Ю.М.** Современная нелинейная теория разностных газовой динамики / Ю.М. Давыдов // Москва: НИИ парашютостроения, 1991. - 104 с.
41. **Давыдов, Ю.М.** Аэродинамика, гидроупругость и устойчивость полета парашютных систем / Ю.М. Давыдов // /Изд-е 2-е, дополненное. – М.: НАПН РФ, НИИ парашютостроения, 2001. – 306 с.
42. **Давыдов, Ю.М.** Егоров М.Ю. Численное моделирование нестационарных переходных процессов в активных и реактивных двигателях / Ю.М. Давыдов, М.Ю. Егоров // Под ред. Ю.М.Давыдова. - М.: НАПН РФ, 1999. - 272 с.
43. **Давыдов, Ю.М.** Дифференциальные приближения разностных схем / Ю.М. Давыдов, В.П. Скотников // Москва: ВЦ АН СССР, 1978. - 72 с.
44. **Давыдов, Ю.М.** Метод крупных частиц: вопросы аппроксимации, схемной вязкости и устойчивости / Ю.М. Давыдов, В.П. Скотников // Москва: ВЦ АН СССР, 1978. - 72 с.
45. **Давыдов, Ю.М.** Исследование дробных ячеек в методе крупных частиц / Ю.М. Давыдов, В.П. Скотников // Москва: ВЦ АН СССР, 1978.
46. **Давыдов, Ю.М.** Метод крупных частиц для расчета пространственно-двумерного неустановившегося двухфазного фильтрационного течения при учете сил инерции / Ю.М. Давыдов, А.Б. Чечейбаев // В сб.: Актуальные проблемы состояния и развития нефтегазового комплекса России. – М.: Российский гос. ун-т нефти и газа им. И.М. Губкина, 1999. - С. 44.
47. **Давыдов, Ю.М.** Моделирование фильтрационных течений в пласте методом крупных частиц при различных моделях фильтрации / Ю.М. Давыдов, А.Б. Чечейбаев // Математическое моделирование систем и процессов. Сб. научных трудов. - Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2000. - С. 11-20.
48. **Давыдов, Ю.М.** Исследование актуальных проблем механики и машиностроения. / Ю.М. Давыдов, Б. Чечейбаев, И.М. Давыдова, и др. // Под ред. Ю.М. Давыдова, в 5-ти томах. – М.: НАПН РФ, 1995. - 1658 с.



49. **Добровольская, З. Н.** О методе годографа для осесимметричных околосзвуковых течений газа / З.Н. Добровольская // Прикладная математика и механика, 1975, т. 39, вып. 2.
50. **Долгин, В.В.** Аналитические методы решения нестационарных течений двухфазных сред / В.В. Долгин, У. Сейталиев, Б. Чечейбаев Б // Аннот. докл. VII Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – М.: 1991. – С. 138.
51. **Егоров, М.Ю.** Численное исследование методом крупных частиц Давыдова течения в турбине высокого давления газотурбинного двигателя / М.Ю. Егоров // В сб.: Труды Международного симпозиума "Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред". - М.: НАПН РФ, 1999, с.22.
52. **Жуковский, Н.Е.** Полное собрание сочинений / Н.Е. Жуковский // Том VII. Гидравлика. - М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. - 410 с.
53. **Жумагулов, Б.Т.** Гидродинамика нефтедобычи / Б.Т. Жумагулов, В.Н. Монахов // Алматы, 2001. - 336 с.
54. **Закиров, С.Н.** Разработка газовых, газоконденсатных и нефтегазоконденсатных месторождений / С.Н. Закиров // Москва: Струна, 1998. - 628 с.
55. **Исманбаев, А.И.** Пространственное трансзвуковое течение газа мейеровского типа в соплах Лавалья / А.И. Исманбаев, Б. Чечейбаев, У. Сейталиев, К. Абыкеев // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск третий. Газодинамика и экзогенно-геологические процессы природы. Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2004. - С. 55-66.
56. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке // Москва: Наука, 1976. - 704 с.
57. **Карман, Т.** Закон подобия для трансзвукового потока / Т. Карман // Газовая динамика. - Москва: ИЛ, 1950.
58. **Клигель, Дж.** Течение смеси газа частицами в сопле / Дж. Клигель // Вопросы ракетной техники, 1965, №10. - С. 3-29.



59. **Клигель, Дж.** Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле / Дж. Клигель, Г. Никерсон // В кн.: Детонация и двухфазное течение. - Москва: Мир, 1966. - С. 183-201.
60. **Коул, Дж.** Методы возмущений в прикладной математике / Дж. Коул // Москва: Мир, 1972.
61. **Кочин, Н.Е.** Теоретическая гидродинамика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе // Ч. I, II. - М.: Физматгиз, 1963.
62. **Кочина, П.Я.** Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации / П.Я. Кочина // Москва: Наука, 1991. - 351 с.
63. **Крайко, А.Н.** К решению прямой задачи теории сопла Лаваля для двухфазной смеси при малом отставании частиц / А.Н. Крайко, Р.К. Ткаленко // ПМТФ, 1973, №4. - С. 89-100.
64. **Курант, Р.** Уравнения с частными производными / Р. Курант // Москва: Мир, 1964. - 830 с.
65. **Кутушев, А.Г.** Применение метода крупных частиц Давыдова для расчета взаимодействия воздушной ударной волны с экранирующим слоем порошкообразной среды с жесткой стенкой / А.Г. Кутушев, С.П. Родионов // В кн.: III Международный конгресс "Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред". - М.: НАПН РФ, 2000, с. 48.
66. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц // Т. VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 736 с.
67. **Лапук, Б.Б.** Теоретические основы разработки месторождений природных газов / Б.Б. Лапук // Москва: Гостоптехиздат, 1948. - 290 с.
68. **Лейбензон, Л.С.** Подземная гидрогазодинамика / Л.С. Лейбензон // Москва: АН СССР, 1951. - 544 с.
69. **Лойцянский, Л.Г.** Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский // Изд-е 6-е, перераб. и доп. - Москва: Наука, 1987. - 840 с.
70. **Мак-Кракен, Д.** Численные методы и программирование на Фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн // Москва: Мир, 1977. - 584 с.



71. **Марчук, Г.И.** Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук, Москва: Наука, 1989. - 608 с.
72. **Масленникова, В.Н.** Дифференциальные уравнения в частных производных / В.Н. Масленникова // Москва: Изд-во Российского ун-та дружбы народов им. П.Лумумбы, 1997. - 447 с.
73. **Модорский, В.Я.** Применение метода крупных частиц Давыдова для исследования быстропротекающих нелинейных динамических процессов в пористых материалах / В.Я. Модорский, Ю.В. Соколкин // В кн.: III Международный конгресс "Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред". - М.: НАПН РФ, 2000, с. 52-53.
74. **Молокович, Ю.М.** Релаксационная фильтрация / Ю.М. Молокович, Н.Н. Непримеров, В.И. Пикуза, А.В. Штанин // Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980.
75. **Непримеров, Н.Н.** Трехмерный анализ нефтеотдачи охлажденных пластов / Н.Н. Непримеров // Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978.
76. **Нигматулин, Р.И.** Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин // Москва: Наука, 1978.
77. **Нигматуллин, Р.И.** Динамика многофазных сред / Р.И. Нигматуллин // Москва: Наука, 1987. Часть I. - 464 с. Часть II - 360 с.
78. **Никольский, А.А.** Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения / А.А. Никольский, Г.И. Таганов // ПММ, 1948, т. X, вып 4.
79. **Овсянников, Л.В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников // Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
80. **Овсянников, Л.В.** Дополнение I. / Л.В. Овсянников // В кн.: Мартенсен Е., Фон Зенгбуш К. Расчет околозвуковой части плоских и осесимметричных сопел с криволинейной линией перехода. - Новосибирск, СО АН СССР, 1962.
81. **Пирумов, У.Г.** Газовая динамика сопел / У.Г. Пирумов, Г.С. Росляков // Москва: Наука, 1990.



82. **Полубаринова-Кочина, П.Я.** Теория движения грунтовых / П.Я. Полубаринова-Кочина // Москва: Наука, 1977. - 664 с.
83. **Полянин, А.Д.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д.Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов Москва: Физматлит, 2005. - 256 с.
84. **Похожаев, С.И.** О задаче Дирихле для уравнения  $\Delta u = u^2$  / С.И. Похожаев // Доклады АН СССР, 1960, т. 134, №4.
85. **Рахматулин, Х.А.** Газовая динамика / Х.А. Рахматулин, А.Я. Сагомоян, А.И. Бунимович, И.Н. Зверев // Москва: Высшая школа, 1965. - 723 с.
86. **Ренни, У.** Исследование методом возмущений одномерного гетерогенного течения в ракетных соплах /У. Ренни // В кн.: Детонация и двухфазное течение. - Москва: Мир, 1966. - С. 121-154.
87. **Рихтмайер, Р.** Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон // Москва: Мир, 1972. - 420 с.
88. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика / П. Роуч // Москва: Мир, 1980. - 04 с.
89. **Рыжов, О.С.** О газовых течениях в соплах Лаваля / О.С. Рыжов // ПММ, 1958. Т. 22. Вып. 3.
90. **Рыжов, О.С.** Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля / О.С. Рыжов // Москва: ВЦ АН СССР, 1965.
91. **Рябенький, В.С.** Введение в вычислительную математику / В.С. Рябенький // Москва: Физматлит, 1994. - 336 с.
92. **Самарский, А.А.** Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А Самарский, П.Н. Вабищевич // Москва: Едиториал УРСС, 2004. - 480 с.
93. **Самарский, А.А.** Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов // Москва: Наука, 1975. - 351 с.



94. **Светозарова, Г.И.** Современные методы программирования в примерах и задачах / Г.И. Светозарова, А.В. Козловский, Е.В. Сигитов // Москва: Наука, 1995. - 447 с.

95. **Седов, Л.И.** Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов // Москва: Наука, 1965. - 388 с.

96. **Скрипкин, В.А.** Об околосзвуковом истечении плоской газовой струи из насадка с параллельными стенками / В.А. Скрипкин // ПММ, 1955, т. XIX, вып. 1.

97. **Стернин, Л. Е.** Основы гидродинамики двухфазных течений в соплах / Л.Е. Стернин // Москва: Машиностроение, 1974. - 212 с.

98. **Титов, С. С.** О решениях нелинейных уравнений в частных производных в виде многочленов по одной из переменных / С.С. Титов // Численные методы механики сплошной среды, 1977, т. 8, № 1.

99. **Титов, С. С.** Сходимость логарифмического ряда осесимметрической двойной волны в окрестности области покоя / С.С. Титов // Методы решения краевых задач механики сплошной среды. - Свердловск, УНЦ АН СССР, 1977.

100. **Тутурин, В.А.** Расчет процесса торможения аэроупругого парашюта методом Давыдова / В.А. Тутурин // В кн.: III Международный конгресс "Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред". - М.: НАПН РФ, 2000, с. 140.

101. **Уваров, Г.А.** Моделирование методом Давыдова конвективного теплообмена при создании защитной одежды / Г.А. Уваров Г.А. // В кн.: III Международный конгресс "Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред". - М.: НАПН РФ, 2000, с. 62.

102. **Фалькович, С.В.** К теории квазилинейных уравнений / С.В. Фалькович // ПММ, 1962.

103. **Франкль, Ф.И.** О плоскопараллельных воздушных течениях через каналы при околосзвуковых скоростях / Франкль Ф.И. // Математический сборник, 1933, т. 40. Вып. 1.



104. **Хассан.** Точные решения для течений газа с твердыми частицами в сопле / Хассан // Ракетная техника, 1964, №2, с. 217-219.
105. **Хогланд.** Последние достижения в исследовании течений газа с твердыми частицами в сопле / Хогланд // Ракетная техника, 1962, №5, с. 3-16.
106. **Христианович, С.А.** Неустановившееся течение жидкости и газа в пористой среде при резких изменениях давления во времени или больших градиентах пористости / С.А. Христианович // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1985, N1, с.3-18.
107. **Христианович, С.А.** Неустановившееся течение грунтовой массы, содержащей в порах газ высокого давления / С.А. Христианович // ФТПРПИ, 1982, N3, с. 3-19.
108. **Христианович, С.А.** Избранные работы Речная гидравлика. Теория фильтрации. Аэродинамика и газовая динамика. Горное дело. Теория пластичности. Энергетика. / С.А. Христианович // Москва: Наука - МФТИ, 1998. - 336 с.
109. **Федоренко, Р.П.** Введение в вычислительную физику / Р.П. Федоренко // Москва: МФТИ, 1996. - 528 с.
110. **Форхгеймер, Ф.** Гидравлика / Ф. Форхгеймер // М. - Л.: ОНТИ, 1935.
111. **Франкль, Ф.И.** К образованию скачков уплотнения в дозвуковых течениях с местными сверхзвуковыми скоростями / Ф.И. Франкль // ПММ, 1947, т. XI, вып. 1.
112. **Чарный, И.А.** Подземная гидрогазодинамика / И.А. Чарный // Москва: Гостоптехиздат, 1963. - 346 с.
113. **Черный, Г.Г.** Газовая динамика / Г.Г. Черный // Москва: Наука, 1988. - 424 с.
114. **Чечейбаев, А.Б.** О постановке задачи расчета методом крупных частиц через и вокруг пронизываемого слоя / А.Б. Чечейбаев // В кн.: Юбилейный международный симпозиум «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред. - М.: НАПН РФ, 1997. - С. 65.



115. **Чечейбаев, А.Б.** Алгоритм метода крупных частиц Давыдова расчета фильтрационных течений с учетом инерционных эффектов / А.Б. Чечейбаев // В кн.: II Международный симпозиум «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред». - М.: НАПН РФ, 1999. - С. 42.

116. **Чечейбаев, А.Б.** Тестовые расчеты методом крупных частиц Ю.М.Давыдова одно- и двухфазных фильтрационных течений / А.Б. Чечейбаев // В сб.: Тезисы докладов третьей всероссийской конференции молодых ученых, специалистов и студентов по проблемам газовой промышленности России «Новые технологии в газовой промышленности». - М.: РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина, 1999. - С. 57.

117 **Чечейбаев, А.Б.** Матрицы аппроксимационной вязкости и дисперсии разностных схем метода Давыдова для изотермической фильтрации при использовании модели А. Дарси / А.Б. Чечейбаев // В кн.: Труды III Международного конгресса «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред». - М.: НАПН РФ, 2000. - С. 63.

118. **Чечейбаев, А.Б.** Расчет методом Давыдова притока упругой жидкости к галерее скважин при различных моделях фильтрации / А.Б. Чечейбаев // В кн.: Труды III Международного конгресса «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред». - М.: НАПН РФ, 2000. - С. 104.

119. **Чечейбаев, А.Б.** Дифференциальные приближения второго порядка разностных схем метода Давыдова для расчета фильтрационных течений / А.Б. Чечейбаев // В сб.: Актуальные проблемы состояния и развития нефтегазового комплекса. - М.: РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2001. - С. 65.

120. **Чечейбаев, А.Б.** Исследование разностных схем метода Давыдова для задач подземной гидромеханики при использовании модели С.А.Христиановича / А.Б. Чечейбаев // В сб.: Проблемы математического моделирования и информационных технологий. Доклады международной научной конференции. - Бишкек, 2001. - С. 196-201.

121. **Чечейбаев, А.Б.** Исследование нелинейных свойств разностных схем метода Давыдова для моделирования фильтрационных течений в пористой



среде / А.Б. Чечейбаев // В сб.: Современные проблемы механики сплошн  
сред. Вып.2. Гидроаэромеханика и экзогенно-геологические процессы. -  
Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2002.  
- С. 197-205.

122. **Чечейбаев, А.Б.** Исследование фильтрации жидкости около скважины без учета сил сопротивления / А.Б. Чечейбаев // В сб.: Материалы международной конференции «Модернизация высшей школы в переходный период: состояние и перспективы». Т. 1. - Бишкек: КГПУ им. И. Арабаева, 2002. – С. 95-104.

123. **Чечейбаев, А.Б.** Неустановившееся течение жидкости в случае учета сил сопротивления / А.Б. Чечейбаев // В сб.: Материалы международной конференции «Модернизация высшей школы в переходный период: состояние и перспективы». Т. 1. – Бишкек: КГПУ им. И. Арабаева, 2002. – С. 90-94.

124. **Чечейбаев, А.Б.** Исследование алгоритма метода Давыдова и аналитические методы для моделирования инерционных фильтрационных течений / А.Б. Чечейбаев // Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-матем. наук. Научный руководитель - Академик Ю.М.Давыдов. - Москва-Бишкек: РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина - КГУСТА, 2005. - 190 с.

125. **Чечейбаев, А.Б.** Исследование алгоритма метода Давыдова и аналитические методы для моделирования инерционных фильтрационных течений / А.Б. Чечейбаев // Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.05 / Росс гос. ун-т нефти и газа им. И.М. Губкина, 2005. - 18 с.

126. **Чечейбаев, А.Б.** Исследование нестационарной инерционной фильтрации газа в пласте при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича / А.Б. Чечейбаев, А.И. Исманбаев Б. Чечейбаев // Доклады Национальной Академии наук Республики Казахстан. 2004 . №6. - Алматы, НАН РК, 2004. - С. 46-53.

127. **Чечейбаев, А.Б.** Аналитическое моделирование плоскорадиального фильтрационного притока жидкости к скважине при использовании



современной модели С.А. Христиановича / А.Б. Чечейбаев, Б. Чечейбаев // Вестник КНУ. Серия 3. Естественные науки. - Вып. III. Физика и физическое образование: Материалы юбилейной научно-практической конференции, посвященной 70-летию факультета физики и электроники КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек: КНУ им. Ж.Баласагына, 2003. - С. 101-107.

128. **Чечейбаев, А.Б.** Метод крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидродинамики / А.Б. Чечейбаев, Б. Чечейбаев // В кн.: Международный семинар "Вычислительные методы и решение оптимизационных задач". Материалы семинара. - Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Национальная Академия наук Кыргызской Республики, 2004. - С. 178-185.

129. **Чечейбаев, Б.** Приближенно-аналитические и численные методы решения задач газовой динамики / Б. Чечейбаев // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.- мат. наук. - Бишкек: Институт автоматики АН Кыргызстана, 1991. - 186 с.

130. **Чечейбаев, Б.** Вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений для исследования трехмерных потенциальных течений сжимаемой жидкости / Б. Чечейбаев // Проблемы математического моделирования и информационных технологий. Доклады международной научной конференции (11-12 октября 2001 г). – Бишкек, 2001. – С. 122-125.

131. **Чечейбаев, Б.** Метод возмущений в теории стационарных плоских течений газа при до- и сверхзвуковых скоростях / Б. Чечейбаев // Проблемы математического моделирования и информационных технологий. Доклады международной научной конференции (11-12 октября 2001 г). – Бишкек, 2001. – С. 117-121.

132. **Чечейбаев, Б.** Вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственных, околосвуковых течений газа / Б. Чечейбаев // В сб.: Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск третий. Гидрогазодинамика и экзогенно - геологические процессы природы. - Бишкек,



Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2004. - С.

90.

133. **Чечейбаев, Б.** К теории нестационарных двумерных и пространственных течений двухфазных сред при до-, транс- и сверхзвуковых скоростях / Б. Чечейбаев // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2004. Серия III. Естественно-технические науки. Вып. 4. Академик Я.Б.Зельдович и современная физика: Доклады международной юбилейной конференции, посвященной 90-летию Я.Б. Зельдовича. – Бишкек, КНУ, 2004. - С. 97-103.

134. **Чечейбаев, Б.** О некоторых точных решениях уравнения Линя-Рейсснера-Тзяня / Б. Чечейбаев // В сб.: Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск четвертый. Гидрогазодинамика и экзогенно - геологические процессы природы. - Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2005 - С. 153-160.

135. **Чечейбаев, Б.** Приближенно-аналитическое исследование задачи обтекания крыла пространственно- трехмерным нестационарным сверхзвуковым потоком газа / Б. Чечейбаев // Вестник КНУ, 2005. 6

136. **Чечейбаев, Б.** О некоторых автомодельных решениях уравнения Линя-Рейсснера-Тзяня. / Б. Чечейбаев // Вестник КНУ, 2005. Международный год физики. 5

137. **Чечейбаев, Б.** Неустановившиеся пространственные течения газа в сопле Лаваля / Б. Чечейбаев // Вестник Национальной Академии наук Республики Казахстан, 2007, №3. – С. 120-127.

138. **Чечейбаев, Б.** Истечение с критической скоростью потока газа и твердой частицы из сосуда / Б. Чечейбаев // Вестник КазГУ им. Аль-Фараби, 2010.

139. **Чечейбаев, Б.** Дифференциальные приближения и свойства разностных схем метода Давыдова / Б. Чечейбаев // КНУ. им. Ж.Баласагына, 2011.



140. **Чечейбаев, Б. К** теории нестационарных течений жидкости и га пористой среде / Б. Чечейбаев, С.К. Божымбаев // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск шестой. Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы. – Бишкек, 2007. – С. 34-42.

141. **Чечейбаев, Б.** Аналитические решения уравнения Кармана для исследования трансзвуковых течений газа в пространстве / Б. Чечейбаев, С.К. Божымбаев, Э.Б. Чечейбаева // Вестник КНУ. им. Ж.Баласагына. Серия 6. Наука и инновационные образовательные технологии в вузе. Труды ИИМОП. – Вып. 5. – Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2006. – С. 497-502.

142. **Чечейбаев, Б.** Системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования нестационарных пространственных околосзвуковых течений газа / Б. Чечейбаев, А.И. Исманбаев, Э.Б. Чечейбаева // В сб.: Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск четвертый. Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы. - Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2005. - С. 44-52.

143. **Чечейбаев, Б.** Исследование нестационарных трансзвуковых течений двухфазных сред / Б. Чечейбаев, У.С. Сейталиев // Вестник КГНУ, 1994. Серия I. Естественно-технические науки. Вып. 1. - Бишкек, 1994.- С. 141-147.

144. **Чечейбаев, Б.** Исследование некоторых задач обтекания тел нестационарным трансзвуковым потоком сжимаемой жидкости и истечения газа через сопло с двумя сужениями / Б. Чечейбаев, У.С. Сейталиев // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Специальный выпуск. - Физика. Философия. - Роль академика Р.З. Сагдеева в развитии плазменных исследований в Кыргызской Республике: материалы юбилейной научной конференции, посвященной 70-летию академика РАН, Почетного профессора КНУ Р.З.Сагдеева. - Бишкек, 2003. - С. 86-94.

145. **Чечейбаев, Б.** Приближенно-аналитический метод исследования нестационарных трансзвуковых двухфазных течений в соплах / Б. Чечейбаев, У. Сейталиев, А.Б. Чечейбаев // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Специальный



выпуск. - Физика. Философия. - Роль академика Р.З. Сагдеева в развитии плазменных исследований в Кыргызской Республике: материалы юбилейной научной конференции, посвященной 70-летию академика РАН, Почетного профессора КНУ Р.З. Сагдеева. - Бишкек, 2003. - С. 94-104.

146. **Чечейбаев, Б.** Исследование околосвуковых пространственных течений газа в сопле с двумя сужениями и в слабовогнутой трубе / Б. Чечейбаев, У. Сейталиев, Э.Б. Чечейбаева // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2004. Серия III. Естественно-технические науки. Вып. 4. Академик Я.Б.Зельдович и современная физика: Доклады международной юбилейной конференции, посвященной 90-летию Я.Б. Зельдовича. – Бишкек, КНУ, 2004. - С. 76-81.

147. **Чечейбаев, Б.** Исследование околосвуковых пространственных течений газа в соплах Лавая и в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода / Б. Чечейбаев, У. Сейталиев, Э.Б. Чечейбаева // Вестник НАН Республики Казахстан. №1. - Алматы, 2005. - С. 54-62.

148. **Чечейбаев, Б.** Разностные схемы метода крупных частиц для пространственно-двумерного однофазного неустановившегося фильтрационного течения при учете сил инерции / Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев // Вестник технологического ун-та «Дастан», 1998, №1.- Бишкек, ТУ "Дастан", 1998. - С. 153-159.

149. **Чечейбаев, Б.** Разностные схемы метода крупных частиц для пространственно-двумерного двухфазного неустановившегося фильтрационного течения при учете сил инерции / Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев // Вестник технологического ун-та «Дастан», 1998, №1.- Бишкек, ТУ "Дастан", 1998. - С. 160-167.

150. **Чечейбаев, Б.** Аналитическое исследование пространственно-трехмерных инерционных фильтрационных течений газа в пористой среде при использовании модели С.А. Христиановича / Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев // В сб.: Современные проблемы механики сплошных сред. Вып.2.



Гидроаэромеханика и экзогенно-геологические процессы. - Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2002. - С. 189-197.

151. **Чечейбаев, Б.** Численные методы и практикум на ЭВМ: учебно-методическое пособие. / Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев // КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек, 2006. - 91 с.

152. **Чечейбаев, Б.** Численное моделирование и аналитические методы для решения задач гидрогазодинамики/ Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев // Бишкек, изд-во «Турар», 2010. - 242 с.

153. **Чечейбаев, Б.** Вывод дифференциального уравнения неустановившегося инерционного фильтрационного движения газа в пласте при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича / Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев, А.И. Исманбаев // В сб.: Современные проблемы механики сплошных сред. Вып.2. Гидроаэромеханика и экзогенно-геологические процессы. - Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2002. - С. 183-189.

154. **Чечейбаев, Б.** О некоторых примерах установившихся пространственных течений сжимаемой жидкости / Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев, А.И. Исманбаев // В сб.: Состояние и перспективы технико-экономического развития Кыргызстана. Материалы международной научно-практической конференции. - Бишкек: КГУСТА, 2003. - С. 32-37.

155. **Чечейбаев, Б.** Исследование пространственных околосвуковых течений газа в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода / Б. Чечейбаев, А.Б. Чечейбаев, У. Сейталиев // В кн.: Международный семинар "Вычислительные методы и решение оптимизационных задач". Материалы семинара. - Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Национальная Академия наук Кыргызской Республики, 2004. - С. 186-192.

156. **Шведов, В.М.** Численное моделирование одно- и двухфазных фильтрационных течений / В.М.Шведов // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – М.: МИНХ и ГП им. И.М. Губкина, 1984. - 172 с.



157. **Шокин, Ю.И.** Метод дифференциального приближения / Шокин // Новосибирск, Наука, 1979. - 45 с.
158. **Щелкачев, В.Н.** Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации / В.Н.Щелкачев // Т. 1, 2. - М.: Нефть и газ, 1995.
159. **Яненко, Н.Н.** О первом дифференциальном приближении разностных схем для гиперболических систем уравнений / Н.Н. Яненко, Ю.И. Шокин // Сиб. матем. ж. , 1969, 10, N5, с. 1173-1187.
160. **Boussinesq, J.** (1904). *Recherches theoriques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le debit des sources* J./ J.Boussinesq // *math. pures et appl.* 10, №1, 5 - 78 (complement, №4, 363 - 394).
161. **Busemann, A.** Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung / A. Busemann // "Luftfahrt-Forschung", 1942, Bd.19, Lfg. 4.
162. **Busemann, A.** The non-existence of transonic potential flow: Proc. of Sympos. / A. Busemann // in *Applied Mathematics*", vol. 4. Fluid dynamics. N.Y., Toronto, L. McGraw-Hill, 1953.
163. **Davydov, Yuri M.** An investigation of the stability of difference schemes on the boundaries of the computational domain by the method of differential approximation / Yuri M. Davydov // *Soviet Math. Dokl. / American Mathematical Society*, 1979, vol. 20, №2, p. 210-214.
164. **Davydov, Yuri M.** Approximation viscosity and stability of difference schemes / Yuri M. Davydov // *Lecture Notes in Physics*, 1979, vol. 90. – p.p. 149-160.
165. **Davydov, Yuri M.** The architectural matrix of approximate viscosity / Yuri M. Davydov // *Soviet Math. Dokl. / American Mathematical Society*, 1984, vol. 30, №2, p. 460-464.
166. **Davydov, Yuri M.** On mesh – distance finiteness of the influence of boundary conditions / Yuri M. Davydov // *Soviet Math. Dokl. / American Mathematical Society*, 1984, vol. 25, №2, p. 472-476.



167. **Davydov, Yuri M.** Large-Particle Method / Yuri M. Davydov // Encyclopaedia of Mathematics, vol.5. -Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.

168. **Darcy, H.** Les fontaines publiques de la ville de Dijon / H. Darcy // Paris, 1856. – 647 p.

169. **Dupuit, J.** Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux dans le canaux decouverts et a travers les terrains permeables / J. Dupuit // 2-eme ed. - Paris, 1863.

170. **Karman, Th. von.** The similarity Law of transonic Flow / Th. Karman // "J. Of Mathem. and phys.", 1947, vol. XXVI, №3.

171. **Ehlers, F.E.** On some Solutions of the Hodograph Equation which yield transonic flows through a Laval Nozzle / F.E. Ehlers // "J. Of the Aer. Sci.", 1955, vol. 22, №2.

172. **Gyderley, K.G.** Störungen in ebenen und rotationssymmetrischen Schall- und Überschallparallelstrahlen / K.G. Gyderley // "ZAMM", 1947, Bd. 25/27, Ht.7.

173. **Karman, Th. von.** The similarity Law of transonic flow / Th. Karman // "J. of matem. and phys.", 1947, vol. XXVI, №3.

174. **Keller, J.B.** On solutions of  $\Delta u = f(u)$  / J.B. // Keller "Comm. on Pure and Appl. Mathem." 1957, vol. X, №4.

175. **Lin, C.C.** On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid / C.C. Lin, E. Reissner, H.S. Tsien // "J. of mathem. and phys.", 1948, vol. XXVII, №3.

176. **Meyer, Th.** Üeber zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas das mit Überschallgeschwindigkeit strömt / Th. Meyer // "Mitteil über Forschungsarb. auf dem Geb. des Ingenieurwes.", 1908, Ht. 62

177. **Osserman, R.** On the inequality  $\Delta u \geq f(u)$  / R. Osserman // "Pasific J. of Mathem.", 1957, vol. 7, №4.

178. **Oswatitsch, K.** Gas Dynamics / K.Oswatitsch // N.Y., AP, 1956.

179. **Taylor, G.I.** The Flow of Air at high speeds past curved surfaces / G.I. Taylor // "Great Brit. Aer. Res. Comm. Rep. and Memor.", 1930, №1381.



180. **Tomotika, S.** On the transonic flow of a compressible fluid through axially symmetrical Nozzle / S. Tomotika, Z. Hasimoto // "J. of Mathem. and Phys.", 1950, vol. XXIX, №2.

181. **Tomotika, S.** Studies on two-dimensional transonic flows of a compressible fluids / S. Tomotika, K. Tamada // Part I. "Quart. of Appl. Mathem.", 1950, vol. VII, №4.

182. **Tomotika, S.** Studies on two-dimensional transonic flows of a compressible fluids / S. Tomotika, K. Tamada // Part II. "Quart. of Appl. Mathem.", 1950, vol. VIII, №2.

183. **Sagaidachny, A.A.** Davydov's method for gas-hydrodynamic problems. Algorithm Description / A.A. Sagaidachny // В сб.: "Нефть и газ 2003. 57-я Межвузовская научная конференция. Тезисы докладов". Секция 10 "Представление научных статей на английском языке". - М.: Министерство образования РФ, Российский гос. ун-т нефти газа им. И.М. Губкина, 2003, с. 9.