



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ
РЕСПУБЛИКИ**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. И. РАЗЗАКОВА**

**КЫРГЫЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СТРОИТЕЛЬСТВА,
ТРАНСПОРТА И АРХИТЕКТУРЫ им. Н. ИСАНОВА**

Диссертационный совет Д.01.12.005

На правах рукописи

БЧЗ

УДК 519.6

ББК 22.25

УДК 533(075.8)

ЧЕЧЕЙБАЕВ БАЙЫШ

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ
РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ДАВЫДОВА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ ОДНО- И ДВУХФАЗНЫХ СРЕД**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы.

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**



Бишкек-2013

Диссертационная работа выполнена в Кыргызском Национальном университете им. Ж. Баласагына.

Научный консультант: Заслуженный работник образования Кыргызской Республики, доктор физико-математических наук, профессор А.И. Исманбаев

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук (01.02.05), профессор Туганбаев У.М.

доктор физико-математических наук (01.02.05) Ершина А.К.

доктор физико-математических наук (01.02.05), профессор Найманова А.Ж.

Ведущая организация: Институт механики и математики Казахского Национального университета им. Аль-Фараби

Защита состоится 11 октября 2013 г. в _____ часов на заседании диссертационного Совета Д.01.12.005 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора (кандидата) наук при Кыргызском государственном техническом университете им. И. Раззакова и Кыргызском государственном университете строительства, транспорта и архитектуры им. Н. Исанова по адресу: 720044, Кыргызская Республика, г. Бишкек, пр. Манаса, 66. Ауд.1/259.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова.

Автореферат разослан «___» сентября 2013 г.

Ученый секретарь
Диссертационного Совета Д.01.12.005,
к.ф.-м.н.

Ж.Ж. Доталиева



Общая характеристика работы

Актуальность проблемы.

В связи с полетами летательных аппаратов в широком диапазоне скоростей и высот, практика выдвинула для исследования целый ряд сложных задач газовой динамики, требующих разработки принципиально новых подходов и методов для их решения. Сюда относятся, например, изучение трансзвуковых режимов обтекания, определение характеристик вязких потоков газа при наличии излучения и ионизации, исследование явлений, происходящих при срыве потока в следе за телом. При этом часто бывает необходимым рассмотрение сложных форм аппаратов, различных траекторий полетов в возмущенной области, где могут появиться вторичные скачки уплотнения, местные сверхзвуковые зоны подобласти «обратного» течения.

В настоящее время одним из основных способов исследования сложных нелинейных задач механики является вычислительный эксперимент. Для численного моделирования разнообразных задач механики сплошных сред успешно используется метод крупных частиц Давыдова. С его помощью решаются актуальные задачи механики сплошных сред, в частности - машиностроения, экологии, технологии парашютостроения, ракетных двигателей твердого топлива, газогенераторов, закачки жидкости в скважины нефтегазоносных пластов, физики плазмы, взаимодействия лазерного излучения, а также взаимодействия электронных и ионных пучков с веществом, инерционного термоядерного синтеза, космофизики, геомеханики, радиоэлектроники и т.д.

В данной работе значительное развитие получило исследование глубоко нелинейных свойств применяемых алгоритмов метода крупных частиц Ю.М. Давыдова, определены элементы матриц аппроксимационной вязкости, дисперсии, бидисперсии, тривязкости и др. Также были выведены разностные формулы метода крупных частиц для треугольной и призматической форм ячеек.

Основное уравнение газовой динамики, записанное относительно потенциала скорости, является весьма сложным для аналитического решения, поэтому для исследования потенциальных течений газа были выведены приближенные уравнения. Для случая строго потенциальных стационарных течений оно было выведено Т. Карманом, К. Г. Гудерлеем, К. Осватичем а для нестационарных - Ц. Линем, Э. Рейснером, С. Тзянем.

Первыми исследователями смешанных до- и сверхзвуковых течений в соплах Лаваля были Т. Мейер и Дж. И. Тейлор. Разлагая потенциал скоростей в ряд по степеням пространственных координат, Т. Мейер построил поток с дозвуковым полем скоростей в области до горла канала и сверхзвуковым - позади него.

Наиболее полное исследование течений газа с прямой звуковой линией перехода через скорость звука принадлежит Л.В. Овсянникову.



Околовзвучковые течения газа в соплах с двумя сужениями изучались в плоскости потенциала скорости и функции тока в работах С. Томотики и К. Томады, С. Томотики и З. Хазимото.

Газовая динамика многофазных сред отличается от классической механики присутствием в потоке мелких жидких или твердых частиц различных размеров и форм, которые в процессе течения обмениваются с газом энергией и импульсом, могут переходить из одного агрегатного состояния в другое.

Первыми работами, где были проведены аналитические исследования задачи о течении газа с частицами в сопле, являются работы Дж. Клигеля и У. Ренни.

В работах Л. Хассана и Т. Делингера, при задании распределения скорости частиц по длине сопла, решение обратной задачи было найдено в квадратурах, при этом было предположено, что взаимодействие фаз происходит по стоксовским законам сопротивления.

Задача расчета плоского двухфазного течения в дозвуковой и трансзвуковой областях сопла Лаваля рассмотрена в работе Г. В. Дритова и А. П. Тишина, в которой было учтено также влияние частиц на движение газа. Методы расчета двухфазного плоскопараллельного течения в сопле в рамках двухжидкостной модели сплошной среды для дозвукового и трансзвукового режимов скоростей были развиты в работах И. М. Васеника, А. Д. Рычкова и В. И. Копченова, А.Н. Крайко, где для преодоления ряда трудностей, связанных с переходом через скорость звука, был использован метод установления.

В настоящей диссертации разработан приближенно-аналитический метод для исследования двумерных нестационарных течений двухфазных сред при трансзвуковом режиме скоростей.

Начало развитию теории фильтрации положили опыты А. Дарси (1856 г.), Ф. Форхгеймера (1898 г.) и Г. Хелле-Шоу (1897 г.). Выдающийся вклад в развитие теории фильтрации в нефтегазоносных пластах внесли С. А. Христианович, П. Я. Полубаринова-Кочина, Б. Б. Лапук, И. А. Чарный, В. Н. Щелкачев и др.

Традиционным уравнением подземной гидромеханики, характеризующим процесс фильтрации жидкости в пористой среде, является экспериментально установленный закон А. Дарси и его обобщения на случай многофазных течений. В настоящее время закон Дарси широко применяется при прогнозировании процессов разработки месторождений нефти и газа.

В работах С. А. Христиановича была предложена новая модель фильтрации в условиях импульсного нагружения, которая обобщает закон А. Дарси на случай учета сил инерции, больших градиентов давления и пористости среды.

Цель настоящей работы заключается в следующем:

- исследование пространственно-трехмерных течений газа в трансзвуковом режиме скоростей на основе полного нелинейного уравнения Эйлера относительно потенциала скорости;
- упрощение системы дифференциальных уравнений динамики двухфазных сред (газ и твердые частицы) для решения обратных задач



трансзвуковых течений в соплах и внешнего обтекания различных двухфазным потоком;

- численное исследование методом крупных частиц Давыдова фильтрационных течений жидкости на основе современного модельного уравнения академика С. А. Христиановича;

- разработка численного алгоритма метода крупных частиц Давыдова на треугольной сетке и для расчетной области из призматических ячеек для исследования пространственно-двумерных и пространственно-трехмерных течений идеального газа;

- исследование диссипативных, дисперсионных и других глубоких нелинейных свойств многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Давыдова.

Научная новизна работы заключается в исследовании на физической плоскости пространственно-трехмерных нестационарных (стационарных) трансзвуковых течений газа в различных соплах, в криволинейных каналах, истечения газа из сосуда с критической скоростью, расширенного течения Прандтля-Майера.

Научная новизна заключается в решении внутренних и внешних задач расчета двумерных нестационарных течений двухфазных сред (газ и твердые частицы) в трансзвуковом приближении, а также в разработке и исследовании разностных схем алгоритма метода крупных частиц Давыдова для решения задач фильтрационных течений нефти в пласте на основе современного модельного уравнения С.А.Христиановича.

Задачи исследований:

- применяя метод малых возмущений к полному уравнению Эйлера относительно потенциала скорости, вывести соответствующую систему рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, позволяющую исследовать пространственно-трехмерные нестационарные (стационарные) течения газа при около и сверхзвуковых скоростях течения газа;

- в результате применения метода малых возмущений, из системы дифференциальных уравнений, соответствующей двухфазной среде (газ и твердые частицы), вывести более упрощенную систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, позволяющую исследовать особенности двумерных нестационарных течений двухфазной среды в трансзвуковом режиме скоростей;

- решить пространственно-трехмерные нестационарные (стационарные) задачи трансзвуковой аэродинамики, результаты которых послужили бы для развития теории трансзвуковых течений одно- и двухфазных сред в различных видах сопел и в криволинейных каналах, а также при внешнем обтекании различных тел;

- на основе современного модельного уравнения академика С.А. Христиановича исследовать приближенно-аналитическими методами фильтрационные течения газа в пористой среде (пласте);



- вывести разностные формулы метода крупных частиц Давыдова решения задач фильтрационных течений нефти при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича и провести численные расчеты на ЭВМ;
- вычислить и исследовать на современных компьютерах с использованием системы аналитических вычислений Reduce-3 дифференциальные приближения многопараметрического класса разностных схем метода Давыдова для решения задач газовой динамики;
- разработать алгоритм метода крупных частиц Давыдова для решения задач газовой динамики с треугольной и гексагональной симметриями.

Методы исследований в настоящей работе включают в себя метод малых возмущений, применение которого позволило вывести системы рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, рекомендуемых для исследования пространственно-трехмерных нестационарных (стационарных) течений одно- и двухфазных сред при транс-, до- и сверхзвуковых скоростях. Решение поставленных задач осуществлялось применением специальных и автомодельных методов для интегрирования соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений механики жидкости и газа.

Одним из мощных численных методов современного вычислительного эксперимента является метод крупных частиц Давыдова. С помощью него решаются сложные задачи современной науки и техники.

Аппарат метода дифференциальных приближений является мощным инструментом для исследования нелинейных свойств разностных схем исходных систем дифференциальных уравнений механики сплошных сред.

Достоверность полученных научных результатов состоит в следующем:

- адекватность математической модели – выведенной методом малых возмущений системы рекуррентных уравнений в частных производных второго порядка, используемой для описания пространственно-трехмерных течений газа в до-, около- и сверхзвуковых режимах течений газа - показана в рамках метода математической индукции;
- приведенные в работе решения, описывающие пространственно-трехмерные потенциальные трансзвуковые течения газа, являются обобщением и развитием теории плоскопараллельных околозвуковых течений газа; здесь в частном случае, для пространственно-двумерных течений газа получаются результаты, совпадающие с известными аналитическими решениями;
- достоверность полученных численных результатов методом крупных частиц Давыдова при расчете инерционных фильтрационных течений с использованием нелинейной модели С. А. Христиановича показана сравнением с численными решениями, полученными при использовании традиционной модели А. Дарси, а также с известными аналитическими решениями тестовых задач фильтрации.



Практическая ценность работы заключается в следующем:

- предложенные в работе разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании современной нелинейной модели С.А. Христиановича могут быть применены на практике при решении задач разработки месторождений нефти и газа в случае учета больших градиентов пластового давления и пористости, а также сил инерции;

- разностная модель метода крупных частиц Давыдова на треугольной сетке может найти широкое применение при решении задач с треугольной и гексагональной симметриями;

- разработанные приближенно-аналитическими методами рекуррентные системы уравнений в частных производных и найденные их решения вносят определенный вклад в развитие теории трансзвуковых течений одно- и двухфазных сред в различных видах сопел, в криволинейных каналах, а также при решении внешних задач трансзвуковой аэродинамики и может быть использованы на практике;

- выведенная при использовании в качестве динамического уравнения современной нелинейной фильтрационной модели С.А. Христиановича уравнение в частных производных типа Эйлера, соответствующая рекуррентная система уравнений в частных производных позволяют решить практические задачи инерционной фильтрации жидкости и газа.

Экономическая значимость полученных результатов:

- алгоритмы метода Давыдова на треугольной сетке и призматической ячейке могут найти широкое применение при решении сложных научно-технических проблем парашютостроения, машиностроения, физики плазмы, термоядерного синтеза, во многих отраслях механики сплошных сред, приносящих существенные экономические выгоды;

- разностные схемы метода Давыдова на основе нелинейной модели С.А.Христиановича могут найти применение при расчете месторождений нефти и газа, в технико-экономическом отношении также может принести экономические выгоды для разработчиков месторождений природных углеводородов.

Апробация результатов исследований:

Основные результаты работы докладывались:

- на V Международной конференции «Метод крупных частиц: теория и приложения» (г. Москва, Национальная Академия прикладных наук (НАПН) РФ, 1994 г.);

- на III Республиканской научно-методической конференции «Компьютеры в учебном процессе и науке» (г. Бишкек, КСХИ, 1995 г.);

- на Юбилейном международном симпозиуме «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред» (г. Москва, НАПН РФ, 1997 г.);

- на II Международном симпозиуме «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред» (Москва, НАПН РФ, 1999 г.);



- на третьем Международном конгрессе «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред» (г. Москва, НАПН РФ, 2000 г.);
- на научно-практической конференции «Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века», посвященной 45-летию образования строительного факультета КГУСТА (г. Бишкек, КГУСТА, 2000 г.);
- на международной научной конференции «Проблемы математического моделирования и информационных технологий», посвященной 60-летию академика НАН КР А. Жайнакова (г. Бишкек, НАН КР, 2001 г.);
- на международной научной конференции «Современные проблемы механики сплошных сред» (Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2002 г.);
- на международной научно-практической конференции «Состояние и перспективы технико-экономического развития Кыргызстана» (г. Бишкек, КГУСТА, 2003 г.);
- на научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава и студентов КГУСТА, посвященной 2200-летию кыргызской государственности и 125-летию г. Бишкек (г. Бишкек, КГУСТА, 2003 г.);
- на юбилейной научно-практической конференции, посвященной 70-летию факультета физики и электроники КНУ им. Ж.Баласагына (г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2003 г.);
- на юбилейной международной научной конференции «Роль академика Р.З. Сагдеева в развитии плазменных исследований в Кыргызской Республике», посвященной 70-летию академика РАН, Почетного профессора КНУ Р.З. Сагдеева (г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2003 г.);
- на международной юбилейной конференции «Академик Я. Б. Зельдович и современная физика», посвященной 90-летию Я.Б. Зельдовича (г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2004 г.);
- на международном семинаре «Вычислительные методы и решение оптимизационных задач», организованном Институтом вычислительной математики и математической геофизики СО РАН и НАН Кыргызской Республики (Кыргызская Республика, Иссык-Кульская область, 2004 г.);
- на II международной конференции «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (г. Бишкек и Иссык-Кульская область, 13-17 сентября 2006 г.);
- на Юбилейном международном конгрессе «Актуальные проблемы машиностроения, механики, прикладной и вычислительной математики» (г. Москва, НАПН РФ, 3-12 февраля 2007 года).

Публикации.

По теме диссертации опубликованы 44 работы, в том числе две монографии.

Структура и объем диссертации.



Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы и изложена на 284 страницах, включая 30 рисунков, списка литературы из 178 наименований литературы.

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Методом малых возмущений выведены рекуррентные системы уравнений в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости возмущения для исследования пространственно-трехмерных трансзвуковых течений газа как в стационарном, так и в нестационарном режимах течения.

2. Найдены точные аналитические решения нелинейных уравнений в частных производных второго порядка, описывающие пространственно-трехмерные стационарные потенциальные течения газа в соплах Лавалья, в сопле с плоской поверхностью перехода, в сопле с двумя сужениями как в стационарном, так и в нестационарном случаях. Исследованы истечение газа из сосуда с критической скоростью и течение газа в слабовогнутой трубе. Получены решения обратных внешних задач обтекания трансзвуковым потоком газа вогнутой поверхности, задачи расчета расширенного течения Прандтля-Мейера.

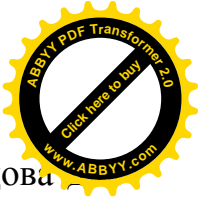
3. Разработан приближенно-аналитический метод для решения внутренних и внешних задач трансзвуковых течений двухфазных сред (газ и твердые частицы). Исследованы пространственно-двумерные нестационарные течения двухфазных сред в различных видах сопел в окрестности горловины, где осуществляется переход через скорость звука.

4. Предложены разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича при учете больших градиентов давления, пористости и сил инерции. Проведены тестовые расчеты методом крупных частиц Давыдова пространственно-двумерных однофазных фильтрационных течений при использовании фильтрационных моделей А. Дарси и С. А. Христиановича.

5. Исследованы нелинейные свойства разностных схем метода крупных частиц Давыдова для решения задач инерционной фильтрации жидкости при использовании модельного уравнения С. А. Христиановича, также исследованы разностные схемы для расчета течений вязкого и теплопроводного газа.

6. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка типа уравнения Эйлера для исследования пространственно-трехмерной нестационарной фильтрации газа в пористой среде при использовании модельного уравнения С. А. Христиановича.

Применяя метод малых возмущений к полученному уравнению, выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, с помощью которой можно исследовать пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в пористой среде. Здесь получены точные решения, описывающие фильтрационные течения газа.



7. Предложены разностные схемы метода крупных частиц Давыдова решения задач газовой динамики на треугольной сетке и в области из призматических ячеек. При использовании системы аналитических вычислений REDUCE-3 вычислены на ЭВМ дифференциальные приближения многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Давыдова для решения пространственно-трехмерных нестационарных задач газовой динамики. Определены элементы матриц аппроксимационной вязкости, дисперсии, бидисперсии, тривязкости и т.д.

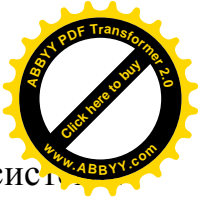
Личный вклад соискателя состоит в следующем:

- выведены рекуррентные системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственно-трехмерных стационарных (нестационарных) до-, транс- и сверхзвуковых течений газа;
- выведена рекуррентная система уравнений в частных производных для исследования фильтрационных течений газа в пористой среде и получены точные аналитические решения для нулевого, первого приближения потенциала скорости;
- получены аналитические решения основного уравнения трансзвуковой аэродинамики, описывающие пространственные течения газа в соплах, криволинейных каналах, обтекание трансзвуковым потоком газа вогнутой поверхности;
- разработка приближенно-аналитического метода для решения задач внутренних и внешних течений двухфазной среды в трансзвуковом режиме скоростей;
- вывод разностных схем метода Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании фильтрационных моделей А. Дарси и С.А. Христиановича и исследование нелинейных свойств разностных схем методом дифференциальных приближений, проведение тестовых расчетов;
- вывод разностных схем метода Давыдова для треугольных и призматических ячеек;
- вычисление дифференциальных приближений разностных схем метода Давыдова для расчета пространственно-трехмерных нестационарных течений газа.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении даны обоснование выбора темы, ее актуальность, степень новизны, обзор литературы по исследуемой тематике, приведены защищаемые научные положения, их достоверность и новизна.

В первой главе “Исследование трансзвуковых потенциальных течений газа на основе рекуррентной системы уравнений в частных производных ” рассмотрены:



В первом параграфе главы I приводится вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений для исследования стационарных потенциальных течений газа в трансзвуковом диапазоне скоростей.

Уравнение пространственно-трехмерных установившихся потенциальных течений идеального газа в декартовой системе координат имеет вид

$$(a^2 - u^2)\varphi_{xx} + (a^2 - v^2)\varphi_{yy} + (a^2 - w^2)\varphi_{zz} - 2uv\varphi_{xx} - 2vw\varphi_{xz} - 2uw\varphi_{zz} = 0, \quad (1)$$

где $u = \varphi_x, v = \varphi_y, w = \varphi_z$ - составляющие вектора скорости потока, a - скорость звука, которая вычисляется так:

$$a^2 = \frac{\chi + 1}{2} a_*^2 - \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2). \quad (2)$$

Здесь $\chi = \frac{c_p}{c_v}, c_p, c_v$ - удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно; a_* - критическая скорость, достигающаяся в точках потока, где скорость частиц равна скорости звука.

Традиционно при линеаризации исходных уравнений газовой динамики оперируют только главным членами, опуская члены более высоких порядков малости.

В данной работе для упрощения нелинейного уравнения (1), (2) применяется метод малых возмущений. Потенциал скорости представится в виде

$$\varphi(x, y, z) = a_* \left(x + \tilde{\varphi}(x, y, z) \right). \quad (3)$$

Далее потенциал скорости возмущения $\tilde{\varphi}(x, y, z)$ ищется в виде

$$\tilde{\varphi}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k+1} \varphi_k(x, y, z), \quad (4)$$

где в качестве ε можно взять величину $\varepsilon = 1 - M_\infty^2$. Здесь M_∞ - число Маха на бесконечности вверх по течению. Подставляя (4) в (1), с учетом (2) и преобразуя переменные в формуле

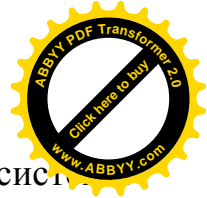
$$x \rightarrow \tilde{x}, y = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{y}, z = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{z}, \quad (5)$$

получена нижеследующая рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$-(\chi + 1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} -(\chi + 1)(\varphi_{00x}\varphi_{nx} + \varphi_{0x}\varphi_{nxx}) + \varphi_{n\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{n\tilde{z}\tilde{z}} = & \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\chi + 1}{2} \varphi_{ixx} \bar{\varphi}_{n-1-i} + 2\varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}} \varphi_{(n-1-i)\tilde{z}} + (\chi - 1)(\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}} + \right. \\ & \left. + \varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}})\varphi_{(n-1-i)x} \right] + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\chi + 1}{2} \left[\varphi_{ixx} (G_{n-2-i} + D_{n-2-i}) + \bar{\varphi}_{(n-2-i)} (\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}}) \right] + \sum_{i=0}^{n-2} (\chi + 1)\varphi_{(n-2-i)} \varphi_{(i+1)xx} + \\ & + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{(n-2-i)x} (\Phi_i + \Psi_i) + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi + 1}{2} (\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}} G_{n-2-i} + \varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}} D_{n-3-i}) + 2 \sum_{i=0}^{n-3} \varphi_{i\tilde{y}\tilde{z}} R_{n-3-i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения для функций $\Phi_i, \Psi_i, \bar{\varphi}_i, D_i, R_i, G_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), которые выражаются через частные производные потенциала скорости возмущения и используются при



определении выражений, содержащихся в правой части рекуррентной системы (7):

$$\Phi_i = \Phi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{kx\tilde{y}} \varphi_{(m-k)\tilde{y}}, \quad \Psi_i = \Psi_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{kx\tilde{z}} \varphi_{(m-k)\tilde{z}}, \quad (8)$$

$$\bar{\varphi}_m = \frac{1}{m\varphi_{ox}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{kx} \bar{\varphi}_{(m-k)}, \quad D_{n-2-i} = D_m = \frac{1}{m\varphi_{oz}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{kz} D_{m-k},$$

$$G_{n-2-i} = G_m = \frac{1}{m\varphi_{oy}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{ky} G_{m-k}, \quad R_{n-2-i} = R_m = \sum_{k=0}^m \varphi_{k\tilde{y}} \varphi_{(m-k)\tilde{z}}.$$

Уравнение (6) для нулевого приближения потенциала скорости возмущения является фундаментальным при изучении течений газа с околосвуковыми скоростями и называется уравнением Кармана. Уравнение (6) является нелинейным, принцип суперпозиции решений для него несправедлив, тем не менее, оно значительно проще полного уравнения (1), (2) определяющего потенциал скорости $\varphi(x, y, z)$. Остальные приближения рекуррентной системы (7), (8) являются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка. Выведенная рекуррентная система дифференциальных уравнений (6), (7), (8) позволяет аналитическими методами решить внутренние и внешние задачи трансзвуковой аэродинамики.

Проинтегрировав различными способами нелинейное уравнение Кармана (6) находим основное, нулевое приближение потенциала скорости возмущения $\varphi_0(x, y, z)$, а последующие приближения потенциала возмущения в формальном ряде (4) являются решением системы дифференциальных уравнений (7), (8).

В параграфе 2 рассматриваются пространственные трансзвуковые течения мейеровского типа в соплах Лавалья. Отметим, что для исследования течений газа в декартовой системе координат при до-, транс- и сверхзвуковых скоростях применяются обратные методы, где задаются распределения потенциала скорости и его производных вдоль оси симметрии в виде непрерывных функций, имеющих производные второго порядка включительно.

Решение преобразованного уравнения Кармана

$$\varphi_{0x}\varphi_{0xx} - \varphi_{0yy} - \varphi_{0zz} = 0 \quad (9)$$

ищется в виде

$$\varphi_0(x, y, z) = f(\tilde{u}) + dx^2 + my^4 + nz^4, \quad (10)$$

где $\tilde{u} = ax + by^2 + cz^2$ и $a, b, c, d, m, n - const$.

Если $a = d^2$, $b = c = -d^3/2$, $m = n = d^3/6$, то уравнение (9) приводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $f(\tilde{u})$:

$$d^6 f'(\tilde{u})f''(\tilde{u}) + 4d^3 f'(\tilde{u}) + 2d^3 \tilde{u} f''(\tilde{u}) + 4\tilde{u} = 0. \quad (11)$$

В этом случае решением уравнения (9) описываются пространственные потенциальные течения газа в сопле Лавалья и найденное решение имеет вид:



$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} d_1 x^2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2} d_1^2 x(y^2 + z^2) + \frac{5+3\sqrt{5}}{24} d_1^3 (y^4 + z^4) + \frac{3+\sqrt{5}}{4} d_1^3 y^2 z^2 - \frac{c_0 d_1^3}{4}. \quad (12)$$

Течение газа во входе у сопла будет дозвуковым и при выходе, ускоряясь, приобретает сверхзвуковую скорость. В минимальной части поперечного сечения сопла, т.е. в горловине сопла осуществляется переход от дозвуковой скорости к сверхзвуковой. Уравнение звуковой поверхности имеет следующий вид:

$$x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2(1+\sqrt{5})} d_1 (y^2 + z^2) \quad (13)$$

и является параболоидом вращения.

Проинтегрировав нелинейные дифференциальные уравнения характеристических поверхностей для стационарных течений

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial \varphi_0(x, y, z)}{\partial x}, \quad (14)$$

выведено уравнение характеристических поверхностей, проходящих через центр канала и имеющий следующий вид:

$$x = \frac{1+\sqrt{5} - \sqrt{10(3+\sqrt{5})}}{8} d_1 (y^2 + z^2) \quad C_-^0 - \text{характеристика}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5} + \sqrt{10(3+\sqrt{5})}}{8} d_1 (y^2 + z^2) \quad C_+^0 - \text{характеристика}.$$

Общее решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (11), найденное в неявном виде, имеет следующий вид:

$$\left(\sqrt{C_0} - \frac{4}{d^3} f(\tilde{u}) + \frac{1+\sqrt{5}}{d^3} \tilde{u}\right)^{\sqrt{5}+1} \left(\sqrt{C_0} - \frac{4}{d^3} f(\tilde{u}) + \frac{1-\sqrt{5}}{d^3} \tilde{u}\right)^{\sqrt{5}-1} = \tilde{C}.$$

Рассматриваемое решение можно применить для описания стационарного течения типа Тейлора в узком поперечном сечении сопла Лавалья, где образуются сверхзвуковые зоны у стенок канала и переход от течений типа Тейлора к течениям Мейера в случае пространственных течений.

В параграфе 3 рассматриваются пространственные течения газа в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым в окрестности горловины сопла с изломом стенки.

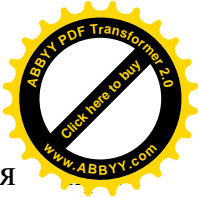
Будем искать решения уравнения Кармана в следующем виде

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 f(y, z). \quad (15)$$

Решением полученного относительно $f(y, z)$ уравнения является двоякопериодическая эллиптическая функция Вейерштрасса

$$f(\xi) = \wp(\xi, g_1, g_2), \quad (16)$$

где $\xi = ay + bz$; a, b - произвольные постоянные, g_1, g_2 - инварианты эллиптической функции Вейерштрасса.



Функция Вейерштрасса принимает вещественные значения вещественных и при чисто мнимых значениях своего аргумента и имеет особенности в виде нулей и полюсов второго порядка. В этой работе, следуя работам Л.В.Овсянникова и О.М.Рыжова, устанавливаются различные типы пространственных течений в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода с изломом стенки в зависимости от распределения особенностей функции

$$f(\xi) = \wp(\xi) = 6N^2 \wp \left[N \left(ay + \sqrt{1-a^2} Z \right) - C \right]. \quad (17)$$

Здесь же определен потенциал скорости возмущения, соответствующий течению расширения Прандтля-Мейера около двугранного угла и представлен в следующем виде:

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{\left(ay + \sqrt{1-a^2} Z \right)^2}. \quad (18)$$

В параграфе 4 приводится решение рекуррентной системы дифференциальных уравнений и определяются последующие приближения потенциала скорости возмущения.

В параграфе 5 рассматриваются пространственные околосвуковые течения газа через сопло с двумя сужениями. Решение уравнения Кармана (9) будем искать в виде

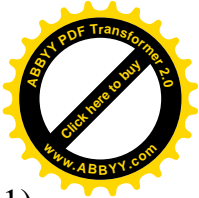
$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 f_1(y, z) + x f_2(y, z) \quad (19)$$

Определяем потенциал возмущения $\varphi_0(x, y, z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) = & \frac{1}{3} x^3 \wp \left[\left(ay + \sqrt{1-a^2} z \right) + c \right] + \\ & d \cdot x \left\{ \left(1 + \wp' \left(ay + \sqrt{1-a^2} z \right) + c_2 \right)^{1/3} + \left(1 - \wp' \left(ay + \sqrt{1-a^2} z + c \right) \right)^{1/3} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Найденным решением описываются пространственные потенциальные трансзвуковые течения газа в сопле с двумя сужениями. Отметим, что в соплах с двумя сужениями могут протекать различные типы течений газа. Положим, что перед первым сужением стенки сопла поток газа имеет дозвуковую скорость, а при выходе из второй сужающейся части сопла газ, расширяясь, приобретает сверхзвуковую скорость. В окрестности первого сужения сопла, около выпуклой части стенки могут быть образованы местные сверхзвуковые зоны, а вдоль оси симметрии скорость потока будет дозвуковой. Однако величина скорости потока газа будет больше при выходе из первого сужения стенки, чем во входе. Таким образом, в окрестности первого сужения сопла осуществляется течение типа Тейлора. Продолжая поступательное движение, поток газа в окрестности второго сужения стенки переходит через звуковую поверхность, а при выходе будет иметь сверхзвуковую скорость. Таким образом, на втором критическом сечении сопла течение газа имеет мейеровский тип. Проведен анализ распределения давления в рассматриваемом виде сопла.

В параграфе 6 рассматривается смешанное сверхзвуковое течение газа в слабоогнутой трубе. Решение уравнения Кармана найдено в следующем виде:



$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{x^3}{3\left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)^2} + x \left(\frac{c_1}{\left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)} + c_2 \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)^2 \right) \quad (21)$$

Полученным решением описывается пространственные сверхзвуковые течения газа в трубе, имеющей искривленный участок, а также в соплах.

В окрестности выпуклой в сторону газа стенки трубы образуется дозвуковая зона течения.

За исключением дозвуковой зоны, скорость потока газа превышает местную скорость звука. Уравнение звуковой поверхности, через которую осуществляется переход от сверхзвуковой к дозвуковой скорости, имеет следующий вид:

$$x^2 = -c_1 \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)$$

Уравнения характеристических поверхностей, определяемое как общий интеграл нелинейного дифференциального уравнения

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2}{\left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)^2} + \frac{C_1}{ay + \sqrt{1-a^2}Z}, \quad (22)$$

представляется следующим образом:

$$\frac{x - 2\sqrt{x^2 + \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)C_1}}{\tilde{C}_1 \left(ay\sqrt{1-a^2}Z \left(\sqrt{x^2 + C_1 \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)} - x\right)^2\right)} = \tilde{C}_1^3 \quad (C_-^0 - \text{характеристика}), \quad (23)$$

$$\frac{C_1 \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right) \left(x + \sqrt{x^2 + \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)C_1}\right)}{x + 2\sqrt{x^2 + c_1 \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)}} = \tilde{C}_2^3 \quad (C_+^0 - \text{характеристики}). \quad (24)$$

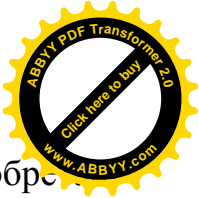
При движении газа около вогнутой стенки трубы, в области движения газа, где еще нет пересечения характеристических поверхностей, получаем непрерывное течение внутри канала, со сжатием в волне Прандтля-Мейера.

При прохождении скачка переменной интенсивности образуются вихри в потоке, вследствие неодинакового изменения энтропии газа на разных линиях тока. Если пересечение характеристик происходит непосредственно на стенке или стенка искривлена не плавно, а имеет излом, то скачок начинается на стенке.

Решением уравнения Кармана будет соотношение

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{x^3}{3\left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)^2} + C_2 \left(ay + \sqrt{1-a^2}Z\right)^2, \quad (25)$$

которое описывает сверхзвуковое течение газа через сопла. Исследование потенциала скорости (25) показывает, что истечение газа через сопла является всюду сверхзвуковым, за исключением области наименьшего критического сечения, где появляется зона смешанных течений, т.е. на выпуклой в сторону газа области образуются дозвуковые зоны, ограничивающиеся уравнением звуковой поверхности. Механизм возникновения дозвуковых зон можно объяснить следующим образом. При истечении газа через каналы переменного поперечного сечения, поток, если во входе имеет дозвуковую скорость, то при



прохождении сужающейся части сопла будет ускоряться и приобретет сверхзвуковую скорость (мейеровский тип течения газа в сопле Лавалья, течение Тейлора). При истечении сверхзвукового потока газа через сопла в сужающейся части, снижается скорость потока в окрестности критического сечения, и тем самым образуются зоны дозвуковых скоростей у выпуклой части стенки. Формы и положения ударной волны определяются из уравнения околосвуковой поляры.

Вторая глава называется «Исследование пространственно-трехмерных нестационарных околосвуковых и сверхзвуковых течений газа». В первом ее параграфе приводится вывод рекуррентной системы уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственных неустановившихся течений газа. Рассматривается основное уравнение газовой динамики, написанное относительно потенциала скорости

$$\varphi_{tt} + 2(u\varphi_{tx} + v\varphi_{ty} + w\varphi_{tz}) + 2(uv\varphi_{xy} + uw\varphi_{xz} + vw\varphi_{yz}) - (a^2 - u^2)\varphi_{xx} - (a^2 - v^2)\varphi_{yy} - (a^2 - w^2)\varphi_{zz} = 0, \quad (26)$$

где $u = \varphi_x, v = \varphi_y, w = \varphi_z$ - составляющие вектора скорости потока. Квадрат скорости звука, определяемый из интеграла Лагранжа – Коши, имеет следующий вид:

$$a^2 = \frac{\chi + 1}{2} a_*^2 - \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) - (\chi - 1)\varphi_t \quad (27)$$

Будем полагать, что скорости частиц близки по величине к критической скорости a_* , также то, что на бесконечности вверх по течению поток является поступательным, тогда решения уравнения (26), (27), удовлетворяющие условиям задачи Коши, можно представить в следующем виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = a_* \left(x + \tilde{\varphi}(x, y, z, t) \right) \quad (28)$$

Потенциал скорости возмущения $\tilde{\varphi}(x, y, z, t)$ будем искать в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k+1} \varphi_k(x, y, z, t), \quad (29)$$

где ε - малый параметр, в качестве которого можно взять величину $\varepsilon = 1 - M_\infty^2$.

Здесь M_∞ - число Маха на бесконечности вверх по течению. Применим далее преобразование переменных x, y, z, t по формулам

$$x = x, \quad y = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{y}, \quad z = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \tilde{z}, \quad t = \varepsilon^{-1} a_*^{-1} \tilde{t} \quad (30)$$

Подставляя потенциалы скорости (28), (29) с учетом преобразования (30) в уравнение Эйлера (26) и группируя члены при одинаковых степенях малого параметра ε , получим $(n+1)$ дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$-(\chi + 1)\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{0\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{0xt} = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 & -(\chi+1)(\varphi_{0xx}\varphi_{mx} + \varphi_{0x}\varphi_{nxx}) + \varphi_{\tilde{m}\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{\tilde{n}\tilde{z}\tilde{z}} - 2\varphi_{nxt} = \\
 & \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\chi+1}{2} \varphi_{ixx}\varphi_{n-1-i} + 2\varphi_{i\tilde{y}\tilde{y}}\varphi_{(n-1-i)\tilde{y}} + 2\varphi_{i\tilde{z}\tilde{z}}\varphi_{(n-1-i)\tilde{z}} + (\chi-1)(\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{\tilde{z}\tilde{z}})\varphi_{(n-1-i)x} \right] + \\
 & + (\chi-1) \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{0\tilde{r}}\varphi_{(n-1-i)xx} + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{ix}\varphi_{(n-1-i)\tilde{r}x} + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\chi-1}{2} \varphi_{ixx}(G_{n-2-i} + D_{n-2-i}) + \varphi_{n-2-i}(\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{\tilde{z}\tilde{z}}) \right] + \\
 & + 2 \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{(n-2-i)x}(\Phi_i + \Psi_i) + \sum_{i=0}^{n-2} (\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}}\varphi_{(n-2-i)\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{\tilde{z}\tilde{z}}\varphi_{(n-2-i)\tilde{z}\tilde{z}}) + \\
 & + (\chi-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\varphi_{i\tilde{r}}(\varphi_{(n-2-i)\tilde{y}\tilde{y}} + \varphi_{(n-2-i)\tilde{z}\tilde{z}}) + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi+1}{2} (\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}}G_{n-3-i} + \varphi_{\tilde{z}\tilde{z}}D_{n-3-i}) + \\
 & + \sum_{i=0}^{n-3} \frac{\chi-1}{2} (\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}}D_{n-3-i} + \varphi_{\tilde{z}\tilde{z}}G_{n-3-i}) + 2 \sum_{i=0}^{n-3} \varphi_{\tilde{y}\tilde{z}}R_{n-3-i} + \varphi_{(n-1)\tilde{r}\tilde{r}}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

В рекуррентной системе (32) введены следующие обозначения для функции $\Phi_i, \Psi_i, D_i, R_i, G_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), которые также выражаются последовательно через частные производные потенциала скорости возмущения и используются при составлении выражений, содержащихся в правой части системы (32):

$$\begin{aligned}
 \Phi_i = \Phi_m &= \sum_{k=0}^m \varphi_{kx\tilde{y}}\varphi_{(m-k)\tilde{y}}, & \Psi_i = \Psi_m &= \sum_{k=0}^m \varphi_{kx\tilde{z}}\varphi_{(m-k)\tilde{z}}, \\
 \varphi_m &= \frac{1}{m\varphi_{0x}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{kx}\varphi_{m-k}, & D_{n-2-i} = D_m &= \frac{1}{m\varphi_{0\tilde{z}}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{k\tilde{z}} \\
 G_m &= \frac{1}{m\varphi_{0\tilde{y}}} \sum_{k=1}^m (3k-m)\varphi_{k\tilde{y}}G_{m-k}, & R_{n-2-i} = R_m &= \sum_{k=0}^m \varphi_{k\tilde{y}}\varphi_{(m-k)\tilde{z}}, \\
 \varphi_0 &= \varphi_{0x}^2, & G_0 &= \varphi_{0y}^2, & D_0 &= \varphi_{0z}^2.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно нулевого приближения потенциала скорости возмущения является фундаментальным для описания пространственных нестационарных околосвуковых течений и называется уравнением Линя-Рейсснера - Тзяня.

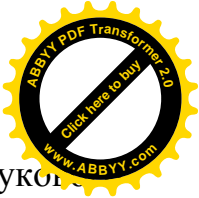
Для решения внутренних и внешних задач трансзвуковой аэродинамики необходимо определить точные решения уравнения Линя - Рейсснера - Тзяня (31) и найти необходимые приближения потенциала скорости возмущения, проинтегрировав соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных, получаемое из рекуррентной системы. Зная потенциал возмущения, можно определить составляющие вектора скорости, распределения плотности и давления, определить уравнение линий тока, характеристических поверхностей и т.д.

Во втором параграфе данной главы рассматриваются пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в сопле Лавалья.

Уравнение Линя-Рейсснера-Тзяня преобразуем к следующему виду:

$$-\varphi_{0x}\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} = 0 \tag{34}$$

Отметим, что уравнение (34) принадлежит к смешанному типу уравнений в частных производных. Оно эллиплично в области, соответствующей



дозвуковому течению, т.е.при $\varphi_{0x} < 0$ и гиперболично в области сверхзвукового течения, т.е.при $\varphi_{0x} > 0$.

Будем искать решение уравнения Линя-Рейсснера-Тзяня (34) в следующем виде:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = f(\tilde{u}) + dx^2 + my^4 + nz^4 + sxe^{-\lambda t} + \gamma(y^2 + z^2)e^{-\eta}, \quad (35)$$

где $\tilde{u} = ax + by^2 + cz^2 + ke^{-\eta}$ - новая переменная, $f(\tilde{u})$ - неизвестная функция.

Подставляя решение вида (35) в (31), определяем потенциал скорости $\varphi_0(x, y, z, t)$ течения газа, удовлетворяющий уравнению Линя-Рейсснера-Тзяня:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z, t) = & \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} d^* x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} d^2 x (y^2 + z^2) - \frac{(5 + 3\sqrt{5})}{24} d^3 (y^4 + z^4) - \\ & - \frac{3 + \sqrt{5}}{4} d^2 y^2 z^2 - \frac{C_0 d^3}{4} - \frac{(3 + \sqrt{5})}{d^3} R \left(d^* x^2 - \frac{1}{2} d^3 (y^2 + z^2) \right) e^{-n_1 dt} - \frac{(3 + \sqrt{5})}{2d^3} R^2 e^{-2n_1 dt} + \frac{2R(1 + n_1)}{d} \\ & x e^{n_1 dt} - n_1^2 R (y^2 + z^2) e^{-n_1 dt}. \end{aligned}$$

Найденным решением описываются пространственные потенциальные течения мейеровского типа в сопле Лавала.

Приравнивая к нулю горизонтальную составляющую скорости, находим уравнение звуковой поверхности. Полагаем, что направление потока газа совпадает с положительным направлением оси Ox , тогда $d = d_1$, $d < 0$ и $n_1 < 0$.

Уравнение звуковой поверхности имеет вид

$$x = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2(1 + \sqrt{5})} d_1 (y^2 + z^2) + \frac{2n_1 - 1 - \sqrt{5}}{(1 + \sqrt{5})d_1^2} e^{n_1 dt}.$$

Решение уравнения Линя-Рейсснера-Тзяня будем искать в автомодельном виде

$$\varphi_0(x, y, z, t) = \theta^{3n-2} f(\xi, \eta), \quad (36)$$

где переменные ξ, η, θ выражаются через x, y, z, t следующим образом:

$$\xi = x\theta^{-n}, \quad \eta = t\theta^{n-2}, \quad \theta = ay + bz. \quad (37)$$

Здесь n - показатель автомодельности, a, b - произвольные постоянные.

Предполагая выполнения условия $a^2 + b^2 = 1$, получаем относительно неизвестной функции $f(\xi, \eta)$ нелинейное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} (n^2 \xi^2 - f_\xi) f_{\xi\xi} - 5n(n-1)\xi f_\xi + 7(n-2)(n-1)\eta f_\eta - \\ - 2[1 + n(n-2)\xi\eta] f_{\xi\eta} + (n-2)^2 \eta^2 f_{\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

При $n = 2$ уравнение (38) имеет решение, которое можно представить так:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = (x^2 + 2x\theta^2 + \frac{1}{3}\theta^4) \frac{C_1}{C_1 - \ell^{-t}}.$$

Осуществляя далее переход к прежним физическим переменным x, y, z, t , получаем:



$$\varphi_0(x, y, z, t) = \{x^2 + 2x(a^2y^2 + 2abyz + b^2z^2) + \frac{1}{3}(a^4y^4 + 4a^3by^3z + 6a^2b^2y^2z^2 + 4ab^3z^3y + b^4z^4)\} \frac{C_1}{C_1 - e^{-t}}.$$

Полученное решение описывает пространственные нестационарные течения мейеровского типа в сопле Лаваля. Уравнение звуковой поверхности имеет следующий вид:

$$x = -(ay + bz)^2.$$

В параграфе 3 рассматривается течение газа из сосуда с критической скоростью.

Решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня (31) ищется методом разделения переменных в следующем виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (39)$$

где $\xi = ax + bt$, $\eta = cy + d_1z$, ξ, η - новые переменные, $f_1(\xi), f_2(\eta)$ - неизвестные функции, a, b, c, d_1 - постоянные величины.

Подставляя (39) в уравнение (31), получаем относительно искомых функций $f_1(\xi), f_2(\eta)$ обыкновенные дифференциальные уравнения.

В этом случае решением уравнения Линя-Рейснера-Тзяня является следующий потенциал скорости возмущения:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = & -\frac{2b}{a^2}(ax + bt) + \frac{1}{3a^3\lambda} [4b^2 + 2aC_3 + 2a(ax + bt)]^{3/2} + \\ & + \frac{\lambda}{2(c^2 + d_1^2)}(c^2y^2 + 2cd_1yz + d_1^2z^2) + C_1(cy + d_1z) + C_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь C_1, C_2 - постоянные интегрирования, λ - постоянная разделения переменных.

Полученным решением описывается истечение газа из сосуда с критической, звуковой скоростью. Уравнением плоской звуковой поверхности, через которую осуществляется переход от дозвукового режима к сверхзвуковому, является следующее выражение:

$$x = -\frac{C_3}{a\lambda} - \frac{b}{a}t.$$

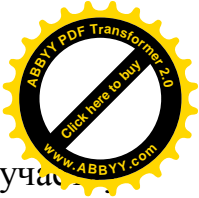
Искривленная часть сосуда определяется как общий интеграл системы дифференциальных уравнений в симметрической форме и представляется следующим выражением:

$$cy + d_1z = C_4 \left(\sqrt{(4b^2 + 2aC_3 + 2a(ax + bt))} \right)^{\frac{b}{a}} e^{\pm \frac{1}{a} \sqrt{4b^2 + 2aC_3 + 2a\lambda(ax + bt)}}. \quad (41)$$

Найденное решение (40) позволяет также сконструировать сопла Лаваля конечной ширины. Такие сопла получаются, как обычно, выбором любых относительно оси Ox симметрично расположенных трубок линий тока в качестве стенок.

Отметим, что за поверхностью перехода течение газа может быть продолжено разными способами.

В параграфе 4 рассматриваются задачи обтекания искривленной поверхности сверхзвуковым потоком газа.



Предполагается, что в области, примыкающей прямолинейному участку стенки, поток однороден и имеет сверхзвуковую скорость. Вверх от стенки поток газа принимается безграничным. Требуется найти течение, возникающее при обтекании искривленной стенки.

Будем искать решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня в следующей форме:

$$\varphi(x, y, z, t) = f(\xi) + \alpha \cdot y^2 + \beta \cdot z^2, \quad (42)$$

где новая переменная ξ линейно зависит от исходных переменных x, y, z, t :

$$\xi = ax + by + cz + dt, \quad (43)$$

a, b, c, d - постоянные величины.

Подставляя предполагаемую форму решения (42) в уравнение Линя-Рейснера-Тзяня (31), относительно неизвестной функции $f(\xi)$ получаем следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a^3 f'(\xi) f''(\xi) - (b^2 + c^2) f''(\xi) + 2adf''(\xi)2[\alpha + \beta] = 0. \quad (44)$$

После интегрирования полученного обыкновенного дифференциального уравнения (44) с учетом преобразований (42), (43), находим решение уравнения Линя-Рейснера-Тзяня в виде

$$\varphi_0(x, y, z, t) = \frac{b^2 - 2ad + c^2}{a^3} (ax + by + cz + dt) + \quad (45)$$

$$+ \frac{1}{6a^6(\alpha + \beta)} \left\{ (b^2 - 2ad + c^2)^2 - 2a^3 \tilde{N}_1 + 4a^3(\alpha + \beta)(ax + by + cz + dt) \right\}^{3/2} + \alpha y^2 + \beta z^2 + C_2,$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования.

Полученным решением описываются пространственные нестационарные течения Прандтля-Мейера.

В параграфе 5 выводится рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования сверхзвуковых течений газа

Рассматривается квазилинейное дифференциальное уравнение, записанное относительно потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$ (26).

Квадрат скорости звуковых волн, определяемый из интеграла Лагранжа-Коши, имеет вид

$$a^2 = \frac{\chi + 1}{2} a_*^2 - \frac{\chi - 1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 + 2w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\varphi_t)$$

Здесь a_* - критическая скорость, имеющая место в тех точках потока, где скорость частиц газа равна скорости звука.

Применяя метод малых возмущений, потенциал скорости газового потока представим в следующей форме:

$$\varphi(x, y, z, t) = w_1 x + \tilde{\varphi}(x, y, z, t), \quad (46)$$

где $\tilde{\varphi}(x, y, z, t)$ - потенциал скорости возмущения, w_1 - скорость потока газа.

Выразим потенциал скорости возмущения в виде формального ряда по степеням малого параметра ε :

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \tilde{\varphi}_n. \quad (47)$$

Здесь для исследования пространственно-трехмерных нестационарных течений газа при до- и сверхзвуковых скоростях получается нижеследующая рекуррентная система дифференциальных уравнений:

$$(w_1^2 - a_*^2)\tilde{\varphi}_{0xx} - a_*^2\tilde{\varphi}_{0yy} - a_*^2\tilde{\varphi}_{0zz} + \tilde{\varphi}_{0tt} + 2w_1\varphi_{0xt} = 0, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} (w_1^2 - a_*^2)\tilde{\varphi}_{nxx} - a_*^2\tilde{\varphi}_{nyy} - a_*^2\tilde{\varphi}_{nzz} + \tilde{\varphi}_{nnt} + 2w_1\varphi_{nxt} = & - \left\{ 2w_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-1} T_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} \right\} + \\ & + \frac{(\chi-1)}{(\chi+1)} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{it} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xx} + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_{it} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{it} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zz} + w_1 \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yy} + \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zz} + \right. \\ & + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} P_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xx} + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \\ & + \sum_{i=0}^{n-2} P_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yy} + \sum_{i=0}^{n-2} R_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} + \sum_{i=0}^{n-2} S_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} + \sum_{i=0}^{n-2} P_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} \left. \right\} - \\ & + \sum_{i=0}^{n-2} P_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)zz} \left. \right\} - 2 \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xt} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)yt} + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)zt} \right\} - \\ & - 2 \left\{ w_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xy} + \sum_{i=0}^{n-1} Q_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xy} \right\} - 2 \left\{ w_1 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-1-i)xz} + \sum_{i=0}^{n-1} M_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)xz} \right\} - 2 \sum_{i=0}^{n-2} L_i \tilde{\varphi}_{(n-2-i)yz}, \end{aligned} \quad (49)$$

где $n = 12, \dots$, $T_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)x}$, $R_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)x}$, $S_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)y}$,

$P_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iz} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}$, $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)y}$, $M_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{ix} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}$, $L_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\varphi}_{iy} \tilde{\varphi}_{(n-2-i)z}$.

Относительно нулевого приближения потенциала скорости возмущения из (48) получается линеаризованное уравнение, так называемое волновое уравнение

$$(1 - M^2)\tilde{\varphi}_{0xx} + \tilde{\varphi}_{0yy} + \tilde{\varphi}_{0zz} - \frac{1}{a^2} \cdot \tilde{\varphi}_{0tt} - \frac{2M}{a_*} \cdot \tilde{\varphi}_{0xt} = 0, \quad (50)$$

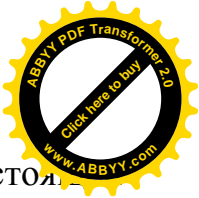
где через $M = \frac{w_1}{a_*}$ обозначено число Маха невозмущенного потока, a_* - скорость звука в невозмущенном потоке.

Последующие приближения рекуррентной системы дифференциальных приближений (49) являются неоднородными линейными дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка.

Рассмотрены основные формулы для потенциала возмущенных скоростей и способы постановки начальных, а также граничных условий.

Глава третья – “Исследование нестационарных трансзвуковых течений смеси газа и твердых частиц” посвящена исследованию трансзвуковых течений двухфазных сред в соплах Лаваля, обтекания двухфазным потоком различных тел.

В параграфе 1 приводится упрощение системы дифференциальных уравнений трансзвуковых течений смеси газа твердых частиц. Прежде чем составить уравнения движения среды, состоящей из газа и частиц одинаковых размеров, проанализированы допущения, введенные Дж. Клигелем и кроме того считалось, что равновесное течение, когда отсутствует температурное и скоростное отставание фаз, наступает при трансзвуковом режиме скоростей.



Рассматривается система уравнений в частных производных, состоящая из уравнений неразрывности, движения и энергии, которые соответствуют обоим фазам:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla w = 0, \quad \rho \frac{dw}{dt} + \nabla P + \rho_s f = 0, \quad \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{1}{2} w^2 \right) + \rho_s \frac{d}{dt} \left(l_s + \frac{1}{2} w_s^2 \right) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (51)$$

$$\frac{d\rho_s}{dt} + \rho_s \nabla w_s = 0, \quad \frac{dw_s}{dt} = f, \quad \frac{dl_s}{dt} = q,$$

где f – сила межфазного взаимодействия, отнесенная к единице массы соответствующей фазы, q – тепловой поток между фазами, w – вектор скорости, P – давление, ρ – плотность, а параметрам частиц придан нижний индекс s . Система (51) замыкается уравнениями состояния для газа и частиц, которые имеют вид

$$h = h(t, P), \quad P = \frac{\rho RT}{\mu}, \quad l_s = l_s(T),$$

где l_s – удельная внутренняя энергия, h – удельное теплосодержание совершенного газа. Система уравнений в частных производных для двухфазного течения смеси газа и твердых частиц без фазовых превращений приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho_s}{\rho} \varphi^f (u - u_s) = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho_s}{\rho} \varphi^f (\vartheta - \vartheta_s) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \vartheta) + \frac{\lambda \vartheta}{y} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) -$$

$$- \frac{\rho_s}{\rho} [\varphi^f (u - u_s)^2 + \varphi^f (\vartheta - \vartheta_s)^2 + \varphi^q (T - T_s)] = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s u_s)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_s \vartheta_s) + \lambda \frac{\rho_s \vartheta_s}{y} = 0, \quad \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + \vartheta_s \frac{\partial u_s}{\partial y} = \varphi^f (u - u_s), \quad (52)$$

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial \vartheta_s}{\partial x} + \vartheta_s \frac{\partial \vartheta_s}{\partial y} = \varphi^f (\vartheta - \vartheta_s), \quad \frac{\partial l_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial l_s}{\partial x} + \vartheta_s \frac{\partial l_s}{\partial y} = \varphi^q (T - T_s),$$

$$P = \rho RT, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} T, \quad l_s = \delta T_s.$$

Здесь коэффициенты φ^f и φ^q соответствуют стоковскому режиму динамического и теплового взаимодействия газа с частицами. Для расчета движения двухфазной среды, описываемой системой (52), ставятся стандартные условия задачи Коши.

Разлагая в ряд все основные физические величины рассматриваемой системы по малому параметру $\varepsilon = \frac{1}{\varphi^f} = \frac{1}{\varphi^q}$, получаем:

$$u = q_0 + \varepsilon u_\ell + \varepsilon^3 u_1 + \dots, \quad u_s = q_0 + \varepsilon u_{\ell s} + \varepsilon^3 u_{1s} + \dots, \quad \vartheta = \varepsilon^{3/2} \vartheta_\ell + \varepsilon^{5/2} \vartheta_1 + \dots,$$

$$\vartheta_s = \varepsilon^{3/2} \vartheta_{\ell s} + \varepsilon^{5/2} \vartheta_{1s} + \dots, \quad \rho = \rho_\ell (1 + \varepsilon^3 \rho_1 + \dots), \quad \rho_s = \rho_{\ell s} (1 + \varepsilon^3 \rho_{1s} + \dots),$$

$$T = T_\ell + \varepsilon^3 T_1 + \dots, \quad T_s = T_{\ell s} + \varepsilon^3 T_{1s} + \dots, \quad P = P_\ell + \varepsilon^3 P_1 + \dots, \quad (53)$$

где $u_\ell, \vartheta_\ell, T_\ell, \rho_\ell, P_\ell, u_{\ell s}, \vartheta_{\ell s}, \rho_{\ell s}, P_{\ell s}, T_{\ell s}$ – параметры равновесного течения смеси газа и твердых частиц, индекс s соответствует параметрам твердых частиц, ε – малый параметр, характеризующий отставание.



Переменные здесь подвергаются растяжению по следующим формулам:

$$\tilde{t} = 2t\varepsilon, \quad \tilde{y} = \varepsilon^{1/2}y, \quad \tilde{x} = x.$$

В равновесном течении выполняются условия

$$u_\ell = u_{\ell s}, \quad \mathcal{G}_\ell = \mathcal{G}_{\ell s}, \quad T_\ell = T_{\ell s}.$$

Группируя члены уравнения (52) по степеням малого параметра ε^2 , относительно составляющих скорости u_ℓ, \mathcal{G}_ℓ двухфазного равновесного течения в трансзвуковом приближении получаем первое уравнение системы Линя-Рейсснера-Тзяня

$$\begin{cases} u_\ell u_{\ell x} - \mathcal{G}_{\ell y} + 2u_{\ell t} = 0 \\ u_{\ell y} - \mathcal{G}_{\ell x} = 0 \end{cases} \quad (54)$$

Второе уравнение системы (54) есть условие безвихренности двухфазного потока.

Для определения последующих членов ряда (53) получаем систему линейных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1-m}{m}(u_1 - u_{1s}) + \frac{1}{m\rho_\ell} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \mathcal{G}_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial y} = 0, \quad (a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial t} + u_\ell \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial x} + \frac{1-m}{m}(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{1s}) = 0, \quad (б)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{1s}}{\partial x} + \mathcal{G}_{\ell s} \frac{\partial u_{\ell s}}{\partial y} - (u_1 - u_{1s}) = 0, \quad (в)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 2\mathcal{G}_\ell \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial x} + k_\ell u_\ell^2 \frac{\partial u_\ell}{\partial x}, \quad (г)$$

$$\frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}_{1s}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{1s}}{\partial x} = 2\mathcal{G}_\ell \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial x} + k_\ell u_\ell^2 \frac{\partial u_\ell}{\partial x}, \quad (д) \quad (55)$$

$$B_0 \frac{\partial T_1}{\partial x} + (T_1 - T_{1s}) = \frac{1}{m\rho_\ell} \frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad (е)$$

$$\frac{\partial u_{1s}}{\partial x} - (u_1 - u_{1s}) + \frac{\delta}{A_0} \frac{\partial T_{1s}}{\partial x} - \frac{1}{A_0}(T_1 - T_{1s}) = \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial x}, \quad (ж)$$

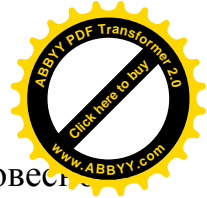
$$\frac{\partial \mathcal{G}_{1s}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial t} + u_\ell \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial x} - (\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{1s}) = 0, \quad (з)$$

$$\begin{aligned} \frac{mk_\ell - 1}{mk_\ell} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{mk_\ell} \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial y} + \frac{1-m}{m} \frac{\partial u_{1s}}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{k_\ell + 1}{2mk_\ell} u_\ell^2 \frac{\partial u_\ell}{\partial x} - \\ - \frac{(m-1)k_\ell + 2}{mk_\ell} \mathcal{G}_\ell \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial x} - \frac{mk_\ell - 1}{2mk_\ell} \mathcal{G}_\ell \frac{\partial \mathcal{G}_\ell}{\partial y}, \end{aligned} \quad (к)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho_\ell T_1 + \frac{1}{2} \rho_\ell T \rho_1, \quad A_0 = \frac{\delta(k_\ell - 1)}{(1-m)k_\ell}, \quad B_0 = \frac{k_\ell}{k_\ell - 1}.$$

где $u_1, u_{1s}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_{1s}, \rho_1, \rho_{1s}, T_1, T_{1s}, P_1$ – первые приближения физических параметров двухфазного потока. Здесь у газодинамических величин индекс s соответствует твердой фазе. Уравнениями Линя-Рейсснера-Тзяня и системой описываются нестационарные двухфазные течения в трансзвуковом режиме скоростей.

Здесь m – относительная массовая концентрация, k_ℓ – показатель адиабаты равновесной двухфазной смеси.



Определив решения u_ℓ, \mathcal{G}_ℓ – составляющие вектора скорости равновесного течения из (54), можно найти параметры двухфазного равновесного течения следующим образом:

$$\rho_{\Sigma_\ell} = \left(\frac{k_\ell + 1}{2} - \frac{k_\ell - 1}{2} q_\ell^2 \right)^{\frac{1}{k_\ell - 1}}, \quad q_\ell^2 = (q_0 + u_\ell)^2 + \mathcal{G}_\ell^2, \quad \rho_\ell = m \rho_{\Sigma_\ell}, \quad \rho_{ts} = (1 - m) \rho_{\Sigma_s},$$

$$P_\ell = \frac{(\rho_{\Sigma_\ell})^{k_\ell}}{k_\ell}, \quad T_\ell = \frac{P_\ell}{\rho_\ell}, \quad \frac{k_\ell}{k_\ell - 1} = T_\ell, \quad l_{ts} = \delta T_\ell, \quad (56)$$

где ρ_{Σ_ℓ} – суммарная плотность смеси.

В параграфе 2 главы 3 рассмотрено двумерное околосзвуковое течение смеси газа и твердых частиц в сопле Лавая. В двухфазном равновесном течении скорость несущей фазы, т.е. газа и скорость твердых частиц одинаковы. Поэтому, используя выражения для составляющих скорости потока газа, являющиеся решением уравнения системы Линя-Рейсснера-Тзяня (54), можем записать, что

$$u = u_\ell = u_{ts}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_\ell = \mathcal{G}_{ts};$$

Отсюда

$$u_\ell = u_{ts} = 2(x + y^2) \frac{C_1}{C_1 - \ell^{-t}},$$

$$\mathcal{G}_\ell = \mathcal{G}_{ts} = (4xy + \frac{4}{3}y^3) \frac{C_1}{C_1 - \ell^{-t}}. \quad (57)$$

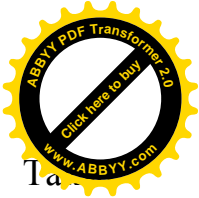
Интегрируя систему, определяем первые приближения физических параметров потока газа и твердых частиц.

Как следует из формул, скоростное отставание твердых частиц от газа вдоль оси сопла находятся в соответствии экспоненциальным и линейным законами. Согласно полученным выражениям, газодинамические величины зависят от времени и являются многочленами относительно переменных x и y . Равенство в любой точке потока величин скорости и температуры частиц с соответствующими параметрами газа реализуется при $\varphi^f \rightarrow \infty$ и $\varphi^g \rightarrow \infty$, т.е., например, при очень мелких частицах, при очень малой плотности вещества частиц ρ_s .

Давление в двухфазном потоке, вследствие взаимодействия частиц с газом, выше, чем в потоке “чистого” идеального газа. Повышение давления, обусловленное наличием частиц в газе, увеличивается с ростом содержания частиц и уменьшением их отставания.

В параграфе 3 разработанным выше приближенно-аналитическим методом исследованы течения двухфазной среды, смеси газа и твердых частиц в сопле с прямой звуковой линией перехода, имеющем излом стенки.

Решение уравнения Линя-Рейсснера-Тзяня, написанное в равновесном течении относительно составляющих скорости, выражаются через двоякопериодическую эллиптическую функцию Вейерштрасса. Аналогично проведенным математическим выкладкам для течений мейеровского типа в сопле Лавая, и в этом виде сопла, интегрированием соответствующих уравнений, получены выражения для составляющих скоростей, плотности,



температуры и давления для обеих фаз в двух приближениях. Та исследованы течения смеси.

Глава 4 - Метод Давыдова для решения задач нефтегазовой подземной гидродинамики.

В параграфе 4.1. “Метод крупных частиц Давыдова для моделирования двумерных безынерционных течений” рассматривается изотермическое фильтрационное движение однородной жидкости в пласте с эффективной толщиной $h(x, y)$.

Математическая модель движения однородной жидкости в пористой среде при использовании закона А. Дарси выглядит следующим образом:

$$h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{W} h) = 0, \quad (58)$$

$$\vec{W} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (59)$$

где m - пористость среды, h - толщина пласта, ρ - плотность жидкости, \vec{W} - вектор скорости фильтрации, k - коэффициент проницаемости пласта, μ - вязкость жидкости. Система (58), (59) замыкается баротропными уравнениями состояния для жидкости и пористой среды течения, явный вид которых несущественен при изложении алгоритма метода Давыдова.

Для решения системы (58), (59) методом Давыдова приведем ее к безразмерному виду.

Следуя работам Ю.М. Давыдова, приводится формальное описание рассматриваемого метода. Среда здесь моделируется системой из жидких (крупных) частиц, совпадающих в данный момент времени с частицей эйлеровой сетки. Расчет каждого временного шага (вычислительного цикла) разбивается на три этапа.

Здесь же излагается алгоритм метода Давыдова для моделирования двумерных двухфазных безынерционных течений.

Рассмотрим изотермическую двухфазную безынерционную фильтрацию в пласте с эффективной толщиной $h(x, y)$ при пренебрежении капиллярными силами и силой тяжести. В качестве исходных уравнений возьмем систему, состоящую из уравнений неразрывности и линейного дифференциального уравнения Дарси, записанного для каждой из участвующих в движении фаз:

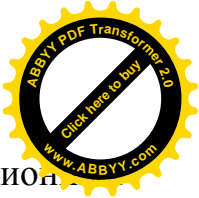
$$m \cdot h \frac{\partial \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \vec{W}_\alpha h) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (60)$$

$$\vec{W}_\alpha = -\frac{k}{\mu_\alpha} \cdot f_\alpha(s_\alpha) \cdot \nabla p, \quad (61)$$

$$s_1 + s_2 = 1. \quad (62)$$

Здесь индекс α относит каждое уравнение системы к соответствующей фазе; $f_\alpha(s_\alpha)$ - фазовые проницаемости, где переменную s будем отождествлять с насыщенностью для первой фазы.

Далее приводится алгоритм метода Давыдова для моделирования двухфазных безынерционных фильтрационных течений.



В параграфе 4.2. “Метод Давыдова для моделирования инерционных фильтрационных течений при использовании модели С.А.Христиановича” рассмотрена изотермическая фильтрация однородной жидкости в нефтегазоносном пласте с учетом сил инерции, больших градиентов давления и пористости.

Исходная система уравнений подземной гидромеханики при изотермическом режиме фильтрации и использовании уравнения С.А.Христиановича выглядит следующим образом:

$$h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot m \cdot \vec{U} \cdot h) = 0, \quad (63)$$

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} + \varepsilon^2 (\nabla p + \beta \cdot p \nabla \ln m) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} \vec{U} = 0, \quad (64)$$

где $\vec{U} = (u, v)$ - вектор действительной скорости жидкости, β - безразмерная физическая характеристика пласта ($0 < \beta < 1$).

Рассмотрим теперь все этапы целого расчетного цикла метода Давыдова в отдельности.

I. Эйлеров этап.

На данном этапе исходная система уравнений подземной гидромеханики сводится к единственному уравнению – модельному уравнению С.А.Христиановича. В случае пространственно-двумерной фильтрации уравнение (64) имеет следующий вид:

$$\rho \frac{du}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} u = 0, \quad (65)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \beta \cdot \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} \right) + \frac{\mu \cdot m}{\lambda} v = 0, \quad (66)$$

Аппроксимируя уравнения (65) - (66) для ячейки (i, j) в момент времени $t = t^n$, получаем следующие разностные уравнения:

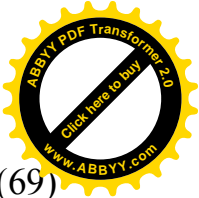
$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j}^n = & u_{i,j}^n - \Delta t \cdot (u_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \cdot \frac{u_{i,j+1/2}^n - u_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) - \\ & - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + \beta \cdot \left(\frac{p}{m} \right)_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i+1/2,j}^n - m_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n \cdot u_{i,j}^n \right], \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j}^n = & v_{i,j}^n - \Delta t \cdot (u_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i+1/2,j}^n - v_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n \cdot \frac{v_{i,j+1/2}^n - v_{i,j-1/2}^n}{\Delta y}) - \\ & - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[\varepsilon^2 \left(\frac{p_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} + \beta \cdot \left(\frac{p}{m} \right)_{i,j}^n \cdot \frac{m_{i,j+1/2}^n - m_{i,j-1/2}^n}{\Delta y} \right) + \left(\frac{\mu m}{\lambda} \right)_{i,j}^n \cdot v_{i,j}^n \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Здесь величины с дробными индексами относятся к границе ячейки и вычисляются аналогично случаю применения модельного уравнения Дарси.

II. Лагранжев этап.

На данном этапе определяются потоки массы через границы эйлеровых ячеек. Дифференциальное уравнение неразрывности в разностной форме запишется так:



$$(m \cdot h \cdot \rho^{n+1})_{i,j} \cdot \Delta x \cdot \Delta y = (m \cdot h \cdot \rho^n)_{i,j} + \Delta M_{i-1/2,j}^n - \Delta M_{i+1/2,j}^n + \Delta M_{i,j-1/2}^n - \Delta M_{i,j+1/2}^n, \quad (69)$$

где формулы для нахождения потока масс имеют здесь следующий вид (например, для правой границы ячейки):

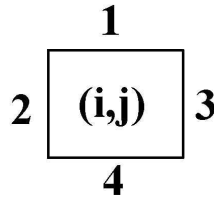
$$\Delta M_{i+1/2,j}^n = \langle \rho_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle \tilde{u}_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle m_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \langle h_{i+1/2,j}^n \rangle \cdot \Delta y \cdot \Delta t \quad (70)$$

и т.д. Знак $\langle \rangle$ обозначает значения физических величин на границе ячейки. Как и в предыдущем параграфе, для вычисления потока масс используются формулы первого и второго порядков точности.

III. Заключительный этап.

На данном этапе вычисляются окончательные поля параметров фильтрационного потока на фиксированной эйлеровой сетке в момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

Для автоматического определения направления потока воспользуемся введенными Ю.М. Давыдовым (функции Давыдова) функциями $D_{i,j}^n(m)$, пронумеруем все стороны прямоугольной ячейки (i, j) индексами $m = 1, \dots, 4$, как это показано ниже:



$$D_{i,j}^n(m) = \begin{cases} 1, & \text{при втекании в ячейку } (i, j) \text{ через сторону } m; \\ 0, & \text{при вытекании из ячейки } (i, j) \text{ через сторону } m. \end{cases}$$

Параметр потока ρ для рассматриваемой ячейки будут следующим:

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^n + 2 \cdot \{ [D_{i,j}^n(1) - 0,5] \cdot \Delta M_{i-1/2,j}^n + [D_{i,j}^n(2) - 0,5] \cdot \Delta M_{i,j-1/2}^n + [D_{i,j}^n(3) - 0,5] \cdot \Delta M_{i+1/2,j}^n + [D_{i,j}^n(4) - 0,5] \cdot \Delta M_{i,j+1/2}^n \} \cdot \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$

В качестве начальных условий использовались функции начальных распределений в расчетной области:

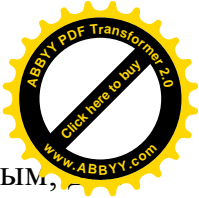
$$p = p_i(x, y), \quad \rho = \rho(p_i(x, y)), \quad m = m(p_i(x, y)), \quad u = u_i(x, y), \quad v = v_i(x, y), \quad \lambda = \lambda_i(x, y), \\ \varepsilon^2 = \varepsilon_i^2(x, y), \quad \beta = \beta_i = const, \quad \mu = \mu_i = const.$$

Условия непроницаемости на внешней границе области интегрирования имеют вид:

$$\tilde{u}_{N+1/2,j}^n = 0, \quad \tilde{v}_{N+1,j}^n = \tilde{v}_{N,j}^n$$

Для первого слоя ячеек имеем:

$$p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \quad \rho_{N+1,j}^n = \rho(p_{N,j}^n), \quad m_{N+1,j}^n = m(p_{N,j}^n), \quad \mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n, \quad u_{N+1,j}^n = -u_{N,j}^n, \\ v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n, \quad (\varepsilon^2)_{N+1,j} = (\varepsilon^2)_{N,j}, \quad \lambda_{N+1,j} = \lambda_{N,j}, \quad \beta_{N+1,j} = \beta_{N,j}.$$



Далее, используя центральные разности по пространственным переменным, второго слоя фиктивных ячеек имеем:

$$u_{N+2,j}^n = -u_{N-1,j}^n, v_{N+2,j}^n = v_{N-1,j}^n, p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n, m_{N+2,j}^n = m(p_{N-1,j}^n).$$

Рассмотрим теперь условие полного протекания на внешней границе.

$$p_{N+1,j}^n = p_{N,j}^n, \rho_{N+1,j}^n = \rho(p_{N,j}^n), m_{N+1,j}^n = m(p_{N,j}^n), \mu_{N+1,j}^n = \mu_{N,j}^n, u_{N+1,j}^n = u_{N,j}^n,$$

$$v_{N+1,j}^n = v_{N,j}^n, (\varepsilon^2)_{N+1,j} = (\varepsilon^2)_{N,j}, \lambda_{N+1,j} = \lambda_{N,j}, \beta_{N+1,j} = \beta_{N,j}.$$

Тогда для второго слоя ячеек получаем следующее:

$$u_{N+2,j}^n = 2 \cdot u_{N,j}^n - u_{N-1,j}^n, v_{N+2,j}^n = 2 \cdot v_{N,j}^n - v_{N-1,j}^n,$$

$$m_{N+2,j}^n = 2 \cdot m_{N,j}^n - m_{N-1,j}^n, p_{N+2,j}^n = 2 \cdot p_{N,j}^n - p_{N-1,j}^n$$

Рассмотрим теперь граничное условие, связанное с заданием расхода жидкости на границе области интегрирования. Пусть, например, для ячейки (N, j) задан объемный расход $q(t)$ жидкости, вытекающей через ее правую сторону. Тогда разностную формулировку этого условия можно представить в следующем виде:

$$\Delta y \cdot h \cdot m \cdot \tilde{u}_{N+1/2,j}^n = q(t),$$

или, обозначая

$$\varphi = q(t) / (\Delta y \cdot h \cdot m),$$

получаем

$$\tilde{u}_{N+1/2,j}^n = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущим случаям, для значения давления во втором слое ячеек имеем:

$$p_{N+2,j}^n = p_{N-1,j}^n - \frac{4 \cdot \Delta x}{\Delta t} \cdot \left(\frac{\rho^n}{\varepsilon^2} \right)_{N,j} \cdot \left(\varphi(t) - u_{N,j}^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\rho^n} \left(\frac{\mu \cdot m^n}{\lambda} \right) \right) \right)_{N,j}.$$

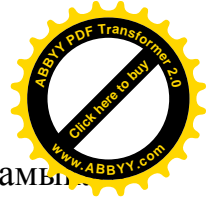
Таким образом, мы рассмотрели основные виды граничных условий и разностные формулировки для вычисления фильтрационных величин в слоях фиктивных ячеек.

В этом же параграфе рассматривается изотермическая двухфазная фильтрация при учете сил инерции и пренебрежении капиллярными силами и силой тяжести. В качестве исходных уравнений берется система, состоящая из уравнения неразрывности и модельного уравнения академика С.А.Христиановича, записанного для каждой из участвующих в движении фаз:

$$m \cdot h \frac{\partial \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho_\alpha \cdot m \cdot U_\alpha h) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (71)$$

$$\rho_\alpha \frac{dU_\alpha}{dt} + \varepsilon^2 (f_\alpha(s) \cdot \nabla p + \beta \cdot p \nabla \ln m) + \frac{\mu_\alpha \cdot m}{\lambda} U_\alpha = 0, \quad (72)$$

где $s_1 + s_2 = 1$; ρ_α , U_α , p , μ_α - фильтрационные параметры соответствующей фазы течения - соответственно плотность, вектор действительной скорости, давление и вязкость фазы; s_α - насыщенность соответствующей фазой; $f_\alpha(s)$ - фазовые проницаемости; $\beta \in (0; 1)$ - безразмерная постоянная, которая зависит от физических свойств пористой среды течения.



Систему уравнений движения жидкости в пористой среде замыкает уравнение состояния вида

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha(p), \quad \alpha = 1, 2, \quad (73)$$

записанные для каждой из фаз в отдельности.

Здесь также рассматриваются все этапы целого расчетного цикла метода Давыдова, состоящего из эйлерова, лагранжева и заключительного этапов. Рассматриваются основные типы постановки начальных и граничных условий.

В параграфе 4.3. “Тестовые расчеты методом Давыдова пространственно-двумерных однофазных фильтрационных течений при различных моделях фильтрации” приводятся численные расчеты и исследования алгоритма метода Давыдова для задач подземной гидродинамики при использовании модельных уравнений А. Дарси и С.А.Христиановича.

Гипотетическая залежь нефти имеет прямоугольную форму в плане и разрабатывается двумя горизонтальными скважинами одинаковой длины. До начала разработки залежи пластовое давление постоянно и равно 10 МПа. Толщина пласта $h = 10$ м. Границы пласта непроницаемы. В момент времени $t = 0$ включают в работу две добывающие горизонтальные скважины с одинаковым постоянным во времени объемным дебитом. Пластовая нефть имеет следующие характеристики: плотность при атмосферном давлении 855 кг/м^3 , вязкость $\mu = 5.57 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, коэффициент объемной упругости $\beta_{жид.} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$.

Пористость пласта в начальный момент времени во всех численных расчетах принималась равной 0,25. Коэффициент объемной упругости пласта $\beta_{сред.} = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

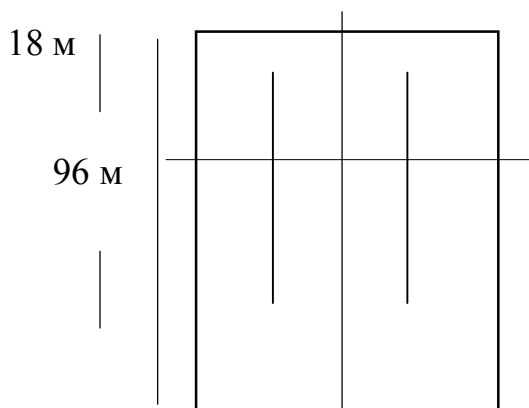
Жидкость в данной задаче принималась слабосжимаемой, учитывалась объемная упругость пласта.

Для моделирования фильтрационных течений на внешних и внутренних границах области интегрирования использовался метод фиктивных ячеек, разработанный автором метода Ю.М. Давыдовым. На внешней границе области интегрирования ставилось условие непротекания, а на внутренней - условие постоянного объемного дебита.

При проведении численных экспериментов характерные параметры фильтрационных величин, используемые при приведении к безразмерному виду исходных систем уравнений движения по обеим моделям, были выбраны следующими:

$$\rho_0 = 10^3 \text{ кг/куб. м.}, \quad p_0 = 10 \text{ МПа}, \quad \mu_0 = 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad L_0 = 10 \text{ м}, \quad (\varepsilon^2)_0 = 10^{-8},$$

$$\lambda_0 = 10^{-3} \text{ кв.м.}, \quad k_0 = 10^{-11} \text{ кв.м.}, \quad t_0 = 10^3 \text{ сек.}$$





18 м

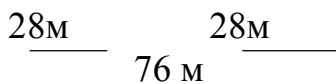
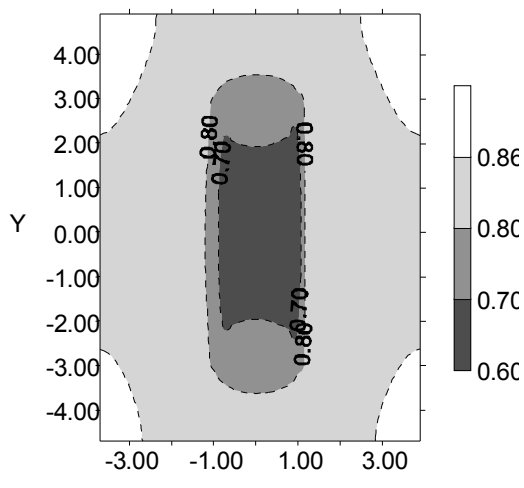
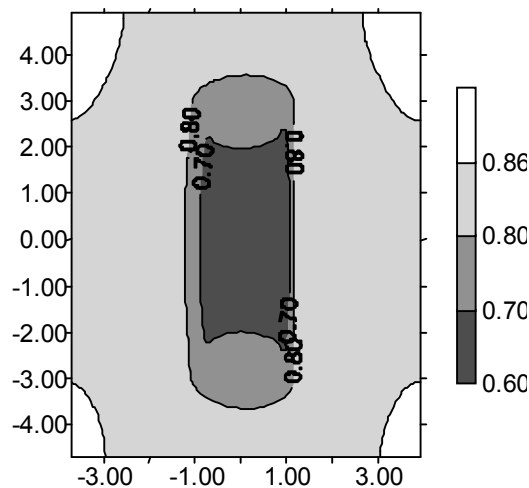


Рис.1. Схема расположения скважин в гипотетической залежи.



$T_1 = 5.00$ Рис.2.



$T_1 = 5.00$ Рис.3.

На рис.2. - рис.3. представлены изолинии безразмерного пластового давления $P^* = p/p_0$ численных решений по обеим моделям. По горизонтальной оси системы координат графика отложены безразмерные расстояния по оси X от центра пласта, аналогичным образом, по вертикальной оси системы координат графика отложены безразмерные расстояния по оси Y от центра пласта.

На выше указанных рисунках представлены изолинии поля давления численных решений для модели С.А. Христиановича (сплошные линии), модели А. Дарси (штрих-пунктирные линии). Численные решения приведены для последовательных моментов времени $T_2 = 10.00$, $T_3 = 15.00$, $T_4 = 20.00$.

При проведении сравнений численных решений по модели А.Дарси и С.А.Христиановича в качестве точного решения принималось численное решение по модели А. Дарси.

Так, при $T_1 = 5.00$ относительная ошибка численных решений по модели С.А. Христиановича вдоль внешней границы области интегрирования составляла от 0,1 до 0,4 %.

В дальнейшем, при $T_3 = 15.00$ величина относительной ошибки лежит в интервале [1.2;3.4]. При $T_4 = 20.00$ относительная ошибка численных решений в межскважинной области достигает 15.00 %, что объясняется большими градиентами пластового давления и большими скоростями фильтрации в этой зоне.

Для моделирования условия непротекания на внешних границах области интегрирования и условия объемного дебита на скважинах применялся метод фиктивных ячеек, разработанный автором метода Ю.М.Давыдовым.

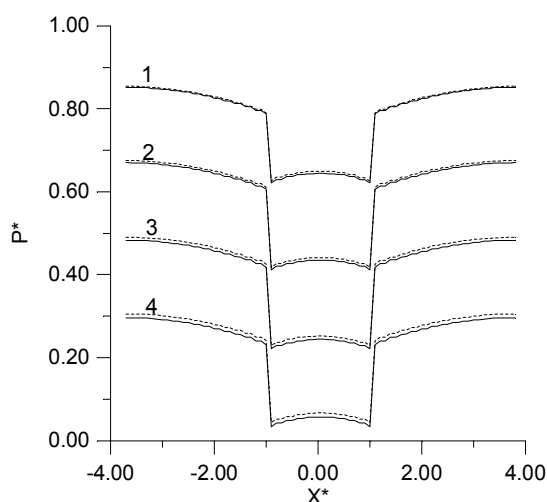


Рис.4.

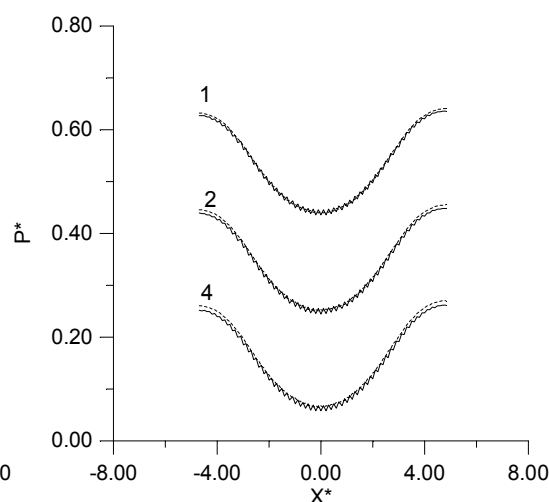


Рис.5.

На рис.4. и рис.5. представлены профили давлений численных решений по обеим моделям для четырех моментов времени $T_1 = 5.00, T_2 = 10.00, T_3 = 15.00, T_4 = 20.00$ при следующих начальных условиях:

$$Q_0 = 0.01, k = 0.10, \varepsilon^2 = 1.00, \lambda = 0.10, \beta = 0.99.$$

В параграфе 4.4 “Аналитическое исследование пространственно-трехмерных инерционных фильтрационных течений газа в пористой среде при использовании модели С.А.Христиановича” рассматривается система уравнений движения газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho m \vec{U}) &= 0, \\ \rho \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} + \varepsilon^2 (\nabla p + \beta \cdot p \cdot \nabla \ln m) &= f \end{aligned} \quad (74)$$

Неустановившуюся фильтрацию газа можно приближенно рассматривать как изотермическую, так как изменения температуры газа, возникающие при изменениях давления, в значительной мере компенсируются теплообменом со скелетом пористой среды, поверхность контакта газа с которой огромна.

Изменение пористости зависит от давления следующим образом:

$$dm = \beta_c dp,$$

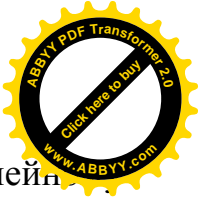
где β_c - коэффициент объемной упругости пласта.

Изменение пористости скелета в зависимости от пластового давления также можно определить формулой:

$$dm = \frac{m_0}{k_m} \cdot dp,$$

где k_m - коэффициент, определяемый экспериментально.

Для исследования фильтрационных течений газа в пласте система уравнений, состоящая из уравнений неразрывности и движения газа в виде



модельного уравнения Христиановича (74), приведена к одному нелинейному уравнению в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$, типа уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 (1 + \beta)}{\gamma + 1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 (1 + \beta)}{\gamma + 1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{\varepsilon^2 (1 + \beta)}{\gamma + 1} a^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь a^2 - квадрат скорости звука в совершенном газе с постоянными теплоемкостями $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$.

Применением метода малых возмущений к полученному уравнению, выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости возмущения.

С помощью полученной рекуррентной системы исследованы пространственно-трехмерные нестационарные фильтрационные течения газа в пористой среде. Нулевое приближение потенциала скорости возмущения является решением волнового уравнения, а остальные приближения определяются интегрированием соответствующего неоднородного уравнения. Зная распределение потенциала скорости возмущения, мы можем определить составляющие вектора скорости, а также распределение давления в пласте и плотность потока газа.

Рассмотрено обтекание в пространстве тонких и слабо искривленных тел, расположенных в однородном газовом потоке под малым углом атаки. В этом случае возмущения, создаваемые телом в однородном потоке, будут малыми и уравнение Эйлера, написанное относительно потенциала скорости, подвергается линеаризации. Применяя метод малых возмущений, выводится рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

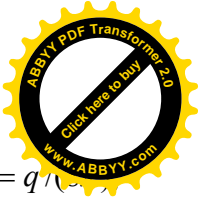
Для исследования стационарных пространственных течений газа при до- и сверхзвуковых скоростях в нулевом приближении получается следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$(1 - M_1^2) \varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz} = 0, \quad (76)$$

где M_1 - число Маха, соответствующее невозмущенному потоку газа.

Для нулевого приближения потенциала скорости возмущения имеем:

$$\varphi_0(x, y, z) = - \frac{2C_1}{\sqrt{x^2 + (1 - M_1^2)(y^2 + z^2)}} + C_2.$$



Учитывая условия на бесконечности и полагая, что $C_2 = 0$, $C_1 = q/\lambda$, получаем фундаментальное решение, соответствующее точечному источнику с объемным дебитом q :

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + (1 - M_1^2)(y^2 + z^2)}} .$$

$$\varphi_0(x, y, z) = \tilde{C}_1 e^{\lambda x} \cos\left[\lambda\sqrt{\frac{1 - M_1^2}{a^2 + b^2}}(ay + bz)\right] . \quad (77)$$

Найденным решением (77) могут быть описаны продольные и поперечные обтекания потоком газа волнистой поверхности.

Пятая глава называется “Исследование нелинейных свойств метода крупных частиц Давыдова для решения задач газовой динамики”.

В параграфе 5.1. рассматривается разностная модель метода Давыдова на треугольной сетке в пространственно-двумерном случае.

В качестве исходных возьмем систему дифференциальных уравнений Эйлера в дивергентной форме для безразмерных величин:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho W) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \text{div}(\rho U W) + \frac{\partial P}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \text{div}(\rho V W) + \frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \quad (78)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}(\rho E W) + \text{div}(P W) = 0 .$$

Система уравнений (78) замыкается уравнением состояния:

$$P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot [E - (U^2 + V^2) / 2]. \quad (79)$$

Область интегрирования покрывается фиксированной в пространстве (эйлеровой) расчетной сеткой (рис.6), состоящей из треугольных ячеек с основанием $2\Delta x$ и высотой Δy в плоской декартовой системе координат.

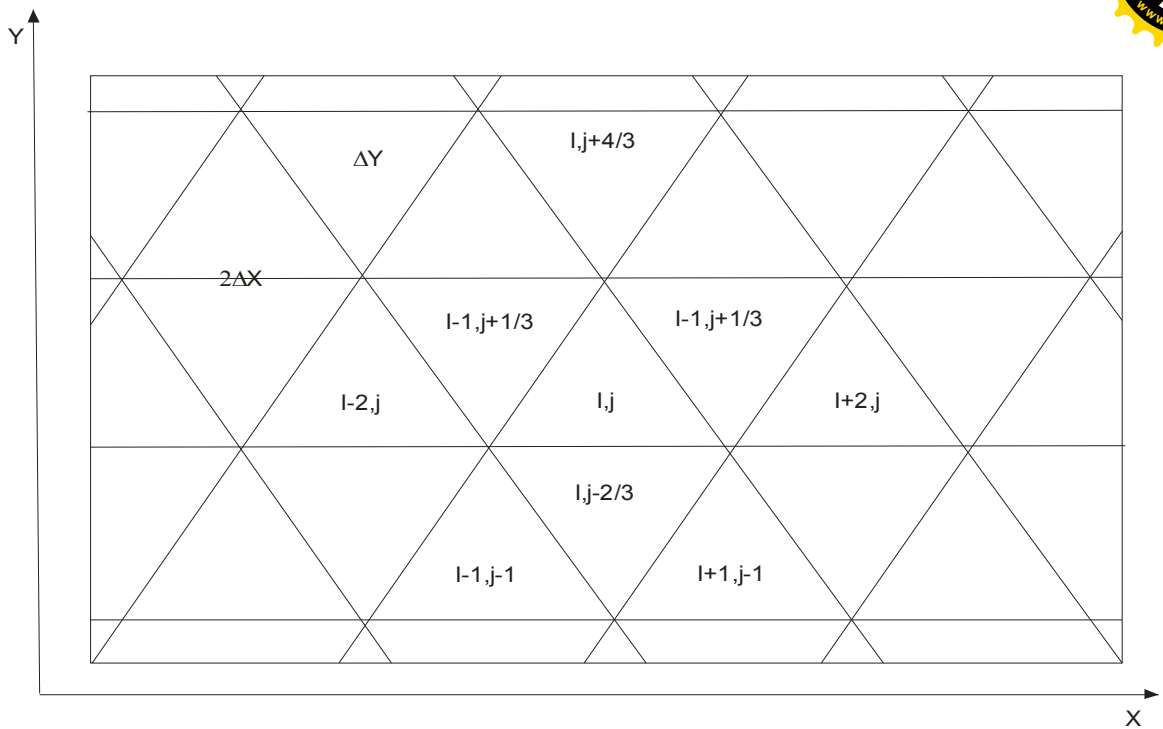


Рис.6.

Рассматриваются все этапы одного расчетного цикла в методе Давыдова отдельно.

I. Эйлерав этап.

На этом этапе в системе (78) не учитываются конвективные члены.

Аппроксимируя систему (78) в момент времени t^n , получаем следующие разностные уравнения (по оси OX выбиралась трехточечная аппроксимация (рис. 6), по оси OY - шеститочечная аппроксимация для ячейки (i, j)):

а) $i + j$ - четное число:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i,j}^n &= U_{i,j}^n - [(P_{i+2,j}^n - P_{i-2,j}^n)/(4\Delta x)] / \rho_{i,j}^n \\ \tilde{V}_{i,j}^n &= V_{i,j}^n - [(-P_{i-2,j}^n + 2P_{i-2,j+1/3}^n - P_{i,j}^n - P_{i,j-2/3}^n + 2P_{i+1,j+1/3}^n - P_{i+2,j}^n)/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j}^n, \\ \tilde{E}_{i,j}^n &= E_{i,j}^n - \{[(PU)_{i+2,j}^n - (PU)_{i-2,j}^n]/(4\Delta x) + [-(PV)_{i-2,j}^n + 2(PV)_{i-1,j+1/3}^n - (PV)_{i,j}^n - \\ & - (PV)_{i,j-2/3}^n + 2(PV)_{i+1,j+1/3}^n - (PV)_{i+2,j}^n]/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j}^n \}. \end{aligned} \quad (80)$$

б) $i + j$ - нечетное число:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i,j+1/3}^n &= U_{i,j+1/3}^n - [(P_{i+2,j+1/3}^n - P_{i-2,j+1/3}^n)/(4\Delta x)] \Delta t / \rho_{i,j+1/3}^n, \\ \tilde{V}_{i,j+1/3}^n &= V_{i,j+1/3}^n - [(P_{i-2,j+1/3}^n - 2P_{i-1,j}^n + P_{i,j+1/3}^n + P_{i,j+1}^n - 2P_{i+1,j}^n + P_{i+2,j+1/3}^n)/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j+1/3}^n, \\ \tilde{E}_{i,j+1/3}^n &= E_{i,j+1/3}^n - \{[(PU)_{i+2,j+1/3}^n - (PU)_{i-2,j+1/3}^n]/(4\Delta x) + [(PV)_{i-2,j+1/3}^n - 2(PV)_{i-1,j}^n + \\ & + (PV)_{i,j+1/3}^n + (PV)_{i,j+1}^n + 2(PV)_{i+1,j}^n + (PV)_{i+2,j+1/3}^n]/(2\Delta y)] \Delta t / \rho_{i,j+1/3}^n \}. \end{aligned} \quad (81)$$

II. Лагранжев этап.

На этом этапе определяются потоки масс ΔM^n через границы эйлеровых ячеек за время Δt по формулам первого порядка точности. При этом полагаем, что масса, импульс и энергия переносятся только за счет нормальной к границе составляющей скорости. Значение плотности $\langle \rho \rangle$, соответствующее границе между ячейками, равно плотности ячейки, откуда течет поток. Например, если

поток направлен от ячейки $(i-1, j+1/3)$ к ячейке (i, j) , то $\langle \rho \rangle_{i-1/2, j+1/6}^n = \rho_{i-1, j+1/3}^n$.

т. д. Для ячейки (i, j) имеем:

а) $i + j$ - четное число:

$$\begin{aligned} \Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n &= \langle \rho \rangle_{i-1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i-1, j+1/3}^n \Delta y - \tilde{V}_{i-1, j+1/3}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i, j}^n \Delta y - \tilde{V}_{i, j}^n \Delta x)] \Delta t / 4, \\ \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n &= \langle \rho \rangle_{i+1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i, j}^n \Delta y + \tilde{V}_{i, j}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i+1, j+1/3}^n \Delta y + \tilde{V}_{i+1, j+1/3}^n \Delta x)] \Delta t / 4, \\ \Delta M_{i, j-1/3}^n &= \langle \rho \rangle_{i, j-1/3}^n [(\tilde{V}_{i, j-2/3}^n + \tilde{V}_{i, j}^n)] (\Delta x \Delta t) / 4. \end{aligned} \quad (82)$$

б) $i + j$ - нечетное число:

$$\begin{aligned} \Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n &= \langle \rho \rangle_{i-1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i-1, j}^n \Delta y + \tilde{V}_{i-1, j}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i, j+1/3}^n \Delta y + \tilde{V}_{i, j+1/3}^n \Delta x)] \Delta t / 4, \\ \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n &= \langle \rho \rangle_{i+1/2, j+1/6}^n [(\tilde{U}_{i, j+1/3}^n \Delta y - \tilde{V}_{i, j+1/3}^n \Delta x) + (\tilde{U}_{i+1, j}^n \Delta y - \tilde{V}_{i+1, j}^n \Delta x)] \Delta t / 4, \\ \Delta M_{i, j+2/3}^n &= \langle \rho \rangle_{i, j+2/3}^n [\tilde{V}_{i, j+1/3}^n \Delta y + \tilde{V}_{i, j+1}^n \Delta x] (\Delta x \Delta t) / 2. \end{aligned} \quad (83)$$

III. Заключительный этап.

На этом этапе определяются окончательные поля параметров потока ρ, U, V, E и P на фиксированной эйлеровой сетке в момент времени $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

Параметры потока $\rho, X(U, V, E)$ для рассматриваемой ячейки будут следующими:

а) $i + j$ - четное число:

$$\begin{aligned} \rho_{i, j}^{n+1} &= \rho_{i, j}^n + 2\{[D_{i, j}^n(1) - 0.5] \Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n + [\Delta M_{i, j}^n(2) - 0.5] \cdot \Delta M_{i, j-1/3}^n + [D_{i, j}^n(3) - \\ &- 0.5] \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n\} / \Delta x \Delta y, \\ X_{i, j}^n &= \{\tilde{X}_{i, j}^n [\rho_{i, j}^n \Delta x \Delta y - [1 - D_{i, j}^n(1)] \Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n - [1 - D_{i, j}^n(2)] \cdot \Delta M_{i, j-1/3}^n - [1 - \\ &- D_{i, j}^n(3)] \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n] + D_{i, j}^n(1) \tilde{X}_{i-1, j+1/3}^n \cdot \Delta M_{i-1, j+1/6}^n + D_{i, j}^n(2) \tilde{X}_{i, j-2/3}^n \Delta M_{i, j-1/3}^n + \\ &+ D_{i, j}^n(3) \tilde{X}_{i+1, j+1/3}^n \cdot \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n\} / (\rho_{i, j}^{n+1} \Delta x \Delta y) \end{aligned} \quad (84)$$

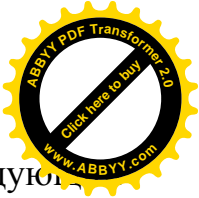
б) $i + j$ - нечетное число:

$$\begin{aligned} \rho_{i, j+1/3}^{n+1} &= \rho_{i, j+1/3}^n + 2\{[D_{i, j}^n(1) - 0.5] \Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n + [D_{i, j}^n(2) - 0.5] \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n + \\ &+ [D_{i, j}^n(3) - 0.5] \Delta M_{i, j+2/3}^n\} / \Delta x \Delta y, \\ X_{i, j+1/3}^n &= \{\tilde{X}_{i, j+1/3}^n [\rho_{i, j+1/3}^n \Delta x \Delta y - [1 - D_{i, j}^n(1)] \Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n - [1 - D_{i, j}^n(2)] \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n - \\ &- [1 - D_{i, j}^n(3)] \Delta M_{i, j+2/3}^n] + (D_{i, j}^n(1) \tilde{X}_{i-1, j}^n \cdot \Delta M_{i-1/2, j+1/6}^n + D_{i, j}^n(2) \tilde{X}_{i+1, j}^n \Delta M_{i+1/2, j+1/6}^n + \\ &+ D_{i, j}^n(3) \tilde{X}_{i, j+1}^n \cdot \Delta M_{i, j+2/3}^n)\} / (\rho_{i, j+1/3}^{n+1} \Delta x \Delta y) \end{aligned} \quad (85)$$

Далее путем перерасчета, согласно уравнению состояния (79), определяются значения поля давления в каждой ячейке эйлеровой сетки в новый момент времени t^{n+1} .

Начальные и граничные условия здесь ставятся традиционным образом, в зависимости от конкретной задачи. Предложенный алгоритм может найти широкое применение при решении разнообразных задач: обтекании наклонной пластины, клина, уступа с острием и др.

В параграфе 5.2. "Пространственно-трехмерная разностная модель метода Давыдова на треугольной сетке" развивается алгоритм метода Давыдова на треугольной сетке для пространственно-трехмерного случая. Система



уравнений Эйлера и уравнение состояния для этого случая имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{W}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho U}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho U \vec{W}) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V \vec{W}) + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho W}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho W \vec{W}) + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E \vec{W}) + \operatorname{div}(P \vec{W}) &= 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Система уравнений (86) замыкается уравнением состояния

$$P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot [E - (U^2 + V^2 + W^2) / 2], \quad (87)$$

где $\vec{W} = \vec{W}(U, V, W)$ - вектор скорости.

Расчетная ячейка в пространственно-трехмерном случае является призмой с треугольным основанием: стороны основания равны $\Delta y \Delta x$ и лежат на плоскости OXY , а высота призмы - Δz .

Согласно традиционному алгоритму метода Давыдова и аналогично рассмотренному в предыдущем параграфе подходу, выводятся разностные уравнения для ячейки (i, j) . Начальные и граничные условия ставятся традиционным образом, в зависимости от рассматриваемой задачи. Отметим, что предложенный алгоритм может найти широкое применение при решении задач треугольной и гексаганальной симметриями.

В параграфе 5.3. "Исследование разностных схем метода Давыдова для расчета течений вязкого и теплопроводного газа" рассматривается следующая система уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho U)_x &= 0, \\ (\rho U)_t + (P + \rho U^2 + Q^u)_x &= 0, \\ (\rho E)_t + [(P + \rho E)U + Q^E]_x &= 0, \end{aligned} \quad (88)$$

где ρ - плотность, U - скорость, $P = P(\rho, J)$ - давление, E - удельная полная энергия, $J = E - 0,5 \cdot U^2$ - удельная внутренняя энергия; $Q^\varphi = Q^\varphi(\rho, U, E)$, $\varphi = \{U, E\}$ - известные функции плотности, скорости и удельной полной энергии.

Для получения разностных схем воспользуемся расщеплением системы (88) на две вспомогательные системы:

$$\begin{aligned} \rho_t &= 0, \quad \rho U_t + \chi_U P_x + \chi_U Q_x^U = 0, \quad \rho E_t + \chi_U (PU)_x + \chi_E Q_x^E = 0 \\ \rho_t + (\rho U)_x &= 0, \quad (\rho U)_t + (\rho U^2)_x + (1 - \chi_U) P_x + (1 - \chi_U) Q_x^u = 0, \\ (\rho E)_t + (\rho UE)_x + (1 - \chi_U) (PU)_x + (1 - \chi_E) Q_x^E &= 0. \end{aligned} \quad (89)$$

Далее, следуя работам Ю.М. Давыдова, определяются разностные формулы для промежуточных значений скорости и энергии \tilde{U}_i^n, E_i^n , записываются разностные схемы второго порядка. Для исследования



многопараметрического класса разностных схем используется метод дифференциальных уравнений.

Из второго дифференциального приближения разностных схем метода Давыдова для расчета течений вязкого и теплопроводного газа определяются элементы матриц аппроксимационной вязкости и дисперсии. Условия устойчивости разностных схем получаются из условия неотрицательности диагональных элементов матрицы аппроксимационной вязкости.

В параграфе 5.4. “Применение системы REDUCE-3 в исследовании разностных схем метода Давыдова применительно к задачам инерционной фильтрации” рассматривается задача автоматизации вычисления дифференциальных приближений разностных схем на персональном компьютере.

Математическая модель фильтрации однородной жидкости в пласте при использовании модели С.А. Христиановича в пласте с переменной эффективной толщиной $h(x, y)$ состоит из уравнения неразрывности, уравнения движения С.А. Христиановича и баротропных уравнений состояния для жидкости и пористой среды:

$$\begin{aligned} h \frac{\partial \rho m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho m W h) &= 0, \\ \rho \frac{\partial W}{\partial t} + \varepsilon^2 (\nabla P + \beta P \nabla \ln m) + \frac{\mu m}{\lambda} &= 0, \\ \rho &= \rho(P), m = m(P), \end{aligned} \quad (90)$$

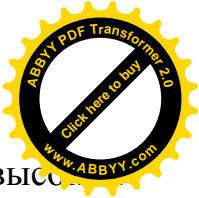
Для исследования нелинейных разностных схем метода Давыдова успешно применяется мощный аппарат метода дифференциальных приближений. Дифференциальное приближение занимает промежуточное положение между исходным дифференциальным уравнением и аппроксимирующей его разностной схемой. Дифференциальное приближение имеет структуру дифференциального уравнения, но его коэффициенты зависят от параметров рассматриваемой схемы.

Дифференциальная структура приближения облегчает аналитические исследования свойств разностной схемы (особенно вопросов устойчивости, образования диссипативного механизма и дисперсии).

Вычисление дифференциальных приближений разностных схем требует проведения сложных, громоздких математических выкладок. Поэтому в целях автоматизации вычислений на ЭВМ в данной работе была использована система аналитических вычислений Reduce-3.

Далее, используя гиперболическую форму первого дифференциального приближения, можно получить параболическую форму первого дифференциального приближения и найти элементы матриц аппроксимационных вязкости и дисперсии.

Составленная и прошедшая тест программа на языке аналитических вычислений Reduce-3 позволяет найти получить дифференциальные приближения метода Давыдова.



Параграф 5.5. называется “Дифференциальные приближения высших порядков для многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц”.

В связи с потребностями практики все большее значение приобретает исследование глубокой нелинейности рассматриваемых объектов. При численном моделировании задач механики стало необходимым исследовать нелинейные свойства применяемых разностных схем. Для этого с успехом может применяться метод дифференциальных приближений.

В целях глубокого изучения разностных схем следует исследовать более высокие дифференциальные приближения. Это сделано автором диссертационной работы под руководством Ю.М. Давыдова. Были рассмотрены дифференциальные приближения высших порядков для многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц в наиболее общем пространственно-трехмерном случае. При этом был также произведен учет влияния разностной постановки граничных условий. Матрицы при четвертых по пространству производных от газодинамических функций авторы называли бивязкостью, при пятых производных – бидисперсией, при шестых производных – три вязкостью и т.д. текст данной главы представляет собой существенно сокращенное изложение результатов, приведенных в [5].

Выводы.

Полученные в диссертационной работе результаты являются новыми и актуальными.

1. Применяя метод малых возмущений к основному уравнению газовой динамики, записанному относительно потенциала скорости, выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Для исследования пространственно-трехмерных стационарных околосвуковых течений газа получено нелинейное уравнение Кармана, которое является основным уравнением теории трансзвуковой аэродинамики. Последующие приближения потенциала являются линейными неоднородными уравнениями в частных производных второго порядка. Здесь определены точные решения уравнения Кармана, описывающие потенциальные течения газа в соплах Лаваля, процесс истечения газа из сосуда с критической скоростью, движение газа в слабоогнутой трубе, исследованы течения расширения Прандтля-Мейера и т.д.

2. Для исследования пространственно-трехмерных нестационарных течений газа также выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Здесь в трансзвуковом приближении получено нелинейное уравнение Линя-Рейснера-Тзяня. Определены точные аналитические решения, описывающие пространственно-трехмерные нестационарные течения газа в сопле Лаваля, истечение газа из сосуда, обтекание искривленных поверхностей. Найден класс автомодельных решений уравнения Линя-Рейснера-Тзяня. Разработан приближенно-аналитический метод для решения задач газовой динамики в пространственно-



трехмерной постановке в случаях как стационарных, так и нестационарных течений газа в декартовой системе координат.

3. Опираясь на квазилинейное дифференциальное уравнение Эйлера и применяя метод малых возмущений для исследования пространственно-трехмерных нестационарных течений газа при до- и сверхзвуковых скоростях, выведена также рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Здесь для определения нулевого приближения потенциала скорости возмущения получено волновое уравнение. Исследованы задачи обтекания крыла пространственно-трехмерным нестационарным сверхзвуковым потоком газа.

Разработан приближенно-аналитический метод для исследования пространственно-двумерных нестационарных двухфазных течений (газ и твердые частицы) в трансзвуковом режиме скоростей.

Система уравнений в частных производных, состоящая из соответствующих для каждой из фаз уравнений неразрывности, движения и энергии упрощена путем разложения в ряд всех основных величин. При этом для равновесного двухфазного течения в трансзвуковом приближении получается система уравнений Линя-Рейснера-Тзяня. Для определения последующих членов ряда получается система уравнений в частных производных первого порядка.

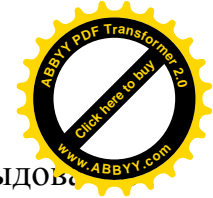
На основе разработанного приближенно-аналитического метода и выведенной системы дифференциальных уравнений исследованы трансзвуковые течения двухфазной смеси в сопле Лавалья, в сопле с прямой звуковой линией перехода, проведен расчет двухфазных течений около угла и т.д.

4. Впервые предложены разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидромеханики при использовании модельного уравнения С. А. Христиановича и проведен сравнительный анализ численных решений, полученных при использовании современной модели С. А. Христиановича с численными решениями, полученными при использовании традиционной модели А. Дарси.

5. Впервые, используя систему аналитических вычислений REDUCE-3 на ЭВМ, вычислены дифференциальные приближения разностных схем метода Давыдова для решения задач инерционной фильтрации при использовании модельного уравнения С. А. Христиановича.

6. Выведено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно потенциала скорости, описывающее пространственно-трехмерную нестационарную фильтрацию газа в пористой среде при использовании модельного уравнения С. А. Христиановича.

7. Выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для моделирования пространственно-трехмерной нестационарной фильтрации газа в пласте при использовании модельного уравнения С. А. Христиановича и найден класс точных аналитических решений полученного дифференциального уравнения в случае нулевого приближения потенциала скорости возмущения.



8. Разработаны новые алгоритмы метода крупных частиц Давыдова на неортогональных (треугольных и шестиугольных) расчетных сетках для пространственно-двумерных и трехмерных течений.

9. Исследованы разностные схемы метода крупных частиц Давыдова для расчета течений вязкого и теплопроводного газа. Методом дифференциальных приближений выведена гиперболическая форма второго дифференциального приближения. Определены элементы матрицы аппроксимационной вязкости.

10. Исследованы глубокие нелинейные свойства многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Давыдова для расчета пространственно-трехмерных нестационарных течений газа. Определены элементы матриц аппроксимационной вязкости, дисперсии, бивязкости, бидисперсии и тривязкости.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Бийбосунов И.Б., Чечейбаев Б.Ч., Сейталиев У.С. Приближенно-аналитический метод решения задач трансзвуковых течений двухфазных сред // Вестник КГНУ. Серия естественно-технических наук. – Бишкек, 1994.

2. Чечейбаев Б., Сейталиев У.С. Исследование нестационарных трансзвуковых течений двухфазных сред // Вестник КГНУ, 1994. Серия I. Естественно-технические науки. Вып. 1. - Бишкек, 1994.- С. 141-147.

3. Акжолов М.Ж., Чечейбаев Б. Расчет обтекания клина методом крупных частиц на треугольной сетке // Совершенствование методов и средств автоматизации гидромелиоративных систем. Сборник научных трудов - Бишкек, 1994.

4. Акжолов М.Ж., Чечейбаев Б., Осмонов К.Т. Расчет обтекания газом произвольного профиля парашюта методом крупных частиц // Компьютеры в учебном процессе и науке. Материалы III Республиканской научно-методической конференции. - Бишкек, КСХИ им. К.И. Скрябина, 1994. – С. 64-65.

5. Давыдов Ю.М., Чечейбаев Б., Давыдова И.М. и др. Исследование актуальных проблем механики и машиностроения. /Под ред. Ю.М. Давыдова, в 5-ти томах. – М.: НАПН РФ, 1995. - 1658 с.

6. Чечейбаев Б. Условия устойчивости для дробных ячеек многопараметрического класса разностных схем с учетом двух дифференциальных приближений. // Труды Юбилейного международного симпозиума «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред». – М.: НАПН РФ, 1997. – С. 66.

7. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б. Разностные схемы метода крупных частиц для пространственно-двумерного однофазного неустановившегося фильтрационного течения при учете сил инерции // Вестник технологического ун-та «Дастан», 1998, №1.- Бишкек, ТУ "Дастан", 1998. - С. 153-159.

8. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б. Разностные схемы метода крупных частиц для пространственно-двумерного двухфазного неустановившегося



фильтрационного течения при учете сил инерции // Вестник технологического университета «Дастан», 1998, №1.- Бишкек, ТУ "Дастан", 1998. - С. 160-167.

9. Чечейбаев Б. Матрицы аппроксимационной вязкости, бивязкости и тривязкости метода крупных частиц Давыдова. // Труды Международного симпозиума «Актуальные проблемы механики сплошных и сыпучих сред». -М.: НАПН РФ, 1999. – С. 43.

10. Исманбаев А.И., Акжолов М.Ж., Чечейбаев Б. Алгоритм метода крупных частиц для треугольной и гексогональной разностных сеток. // Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. Материалы международной конференции, посвященной 45-летию образования строительного факультета КГУСТА. Ч. 2. – Б.: Илим, 2000. – С. 8-12.

11. Исманбаев А. И., Чечейбаев Б. Исследование разностных схем метода крупных частиц в случае движения вязкого, теплопроводного газа. // Проблемы строительства и архитектуры на пороге XXI века. Материалы международной конференции, посвященной 45-летию образования строительного факультета КГУСТА. Ч. 2. – Б.: Илим, 2000. – С. 12-19.

12. Чечейбаев Б. Метод возмущений в теории стационарных плоских течений газа при до- и сверхзвуковых скоростях. // Проблемы математического моделирования и информационных технологий. Доклады международной научной конференции (11-12 октября 2001 г.). – Бишкек, 2001. – С. 117-121.

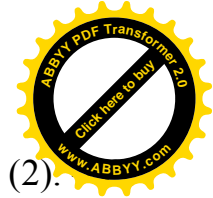
13. Чечейбаев Б. Вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений для исследования трехмерных потенциальных течений сжимаемой жидкости. // Проблемы математического моделирования и информационных технологий. Доклады международной научной конференции (11-12 октября 2001 г.). - Бишкек, 2001. – С. 122-125.

14. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б. Аналитическое исследование пространственно-трехмерных инерционных фильтрационных течений газа в пористой среде при использовании модели С.А. Христиановича. – В сб.: Современные проблемы механики сплошных сред. Вып.2. Гидроаэромеханика и экзогенно-геологические процессы. - Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2002. - С. 189-197.

15. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б., Исманбаев А. Вывод дифференциального уравнения неустановившегося инерционного фильтрационного движения газа в пласте при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича. – В сб.: Современные проблемы механики сплошных сред. Вып.2. Гидроаэромеханика и экзогенно-геологические процессы. - Бишкек, Комитет по теоретической и прикладной механике Кыргызстана, 2002. - С. 183-189.

16. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б., Исманбаев А. О некоторых примерах установившихся пространственных течений сжимаемой жидкости. – В сб.: Состояние и перспективы технико-экономического развития Кыргызстана. Материалы международной научно-практической конференции. - Бишкек: КГУСТА, 2003. - С. 32-37.

17. Чечейбаев А.Б., Чечейбаев Б., Исманбаев А. Применение системы REDUCE-3 в исследовании разностных схем метода Давыдова применительно



к задачам инерционной фильтрации. // Вестник КГУСТА. 2003. Вып. 1 (2). 35-41.

18. Чечейбаев А.Б., Чечейбаев Б. Аналитическое моделирование плоскорадиального фильтрационного притока жидкости к скважине при использовании современной модели С.А. Христиановича // Вестник КНУ. Серия 3. Естественные науки. - Вып. III. Физика и физическое образование: Материалы юбилейной научно-практической конференции, посвященной 70-летию факультета физики и электроники КНУ им. Ж. Баласагына. - Бишкек: КНУ им. Ж.Баласагына, 2003. - С. 101-107.

19. Чечейбаев А.Б., Чечейбаев Б. Метод крупных частиц Давыдова для решения задач подземной гидродинамики. // Международный семинар "Вычислительные методы и решение оптимизационных задач". Материалы семинара. - Новосибирск: Институт выч. математики и матем. геофизики СО РАН, Национальная Академия наук Кыргызской Республики, 2004. - С. 178-185.

20. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б., Сейталиев У. Исследование пространственных околосвуковых течений газа в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода. // Международный семинар "Вычислительные методы и решение оптимизационных задач". Материалы семинара. - Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Национальная Академия наук КР, 2004. – С. 186-192.

21. Чечейбаев А.Б., Исманбаев А. Чечейбаев Б. Исследование нестационарной инерционной фильтрации газа в пласте при использовании модельного уравнения С.А.Христиановича // Доклады Национальной Академии наук Республики Казахстан, 2004, №6. – С. 46-53.

22. Чечейбаев Б., Исманбаев А. И., Сейталиев У., Абыкеев К. Пространственное трансзвуковое течение газа мейеровского типа в соплах Лавалья. // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск третий. Газодинамика и экзогенно - геологические процессы природы. Бишкек, 2004. (статья из 9 с.).

23. Чечейбаев Б. Вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования пространственных, околосвуковых течений газа. // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск третий. Газодинамика и экзогенно - геологические процессы природы. Бишкек, 2004, С. 83-90.

24. Чечейбаев Б., Сейталиев У., Чечейбаева Э.Б. Исследование околосвуковых пространственных течений газа в сопле с двумя сужениями и в слабовогнутой трубе // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2004. Серия III. Естественно-технические науки. Вып. 4. Академик Я.Б.Зельдович и современная физика: Доклады международной юбилейной конференции, посвященной 90-летию Я.Б. Зельдовича. – Бишкек, КНУ, 2004. - С. 76-81.

25. Чечейбаев Б. К теории нестационарных двумерных и пространственных течений двухфазных сред при до-, транс- и сверхзвуковых скоростях // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2004. Серия III. Естественно-технические науки. Вып. 4. Академик Я.Б.Зельдович и современная физика:



Доклады международной юбилейной конференции, посвященной 90-летию Зельдовича. – Бишкек, КНУ, 2004. - С. 97-103.

26. Чечейбаев Б., Абыкеев К. Приближенно аналитический метод исследования до- и сверхзвуковых течений сжимаемой жидкости. // Вестник КНУ, 2004, С.120-126.

27. Чечейбаев Б., Сейталиев У., Чечейбаев А.Б. Приближенно-аналитический метод исследования нестационарных трансзвуковых двухфазных течений в соплах // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Специальный выпуск. - Физика. Философия. - Роль академика Р.З. Сагдеева в развитии плазменных исследований в Кыргызской Республике: материалы юбилейной научной конференции, посвященной 70-летию академика РАН, Почетного профессора КНУ Р.З. Сагдеева. - Бишкек, 2003. - С. 94-104.

28. Чечейбаев Б., Сейталиев У. Исследование некоторых задач обтекания тел нестационарным трансзвуковым потоком сжимаемой жидкости и истечения газа через сопло с двумя сужениями // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Специальный выпуск. - Физика. Философия. - Роль академика Р.З. Сагдеева в развитии плазменных исследований в Кыргызской Республике: материалы юбилейной научной конференции, посвященной 70-летию академика РАН, Почетного профессора КНУ Р.З.Сагдеева. - Бишкек, 2003. - С. 86-94.

29. Чечейбаев Б., Исманбаев А., Чечейбаева Э.Б. Системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для исследования нестационарных пространственных околосвуковых течений газа // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск IV. Гидрогазодинамика и экзогенно-экологические процессы природы.– Бишкек, 2005. – С. 44-52.

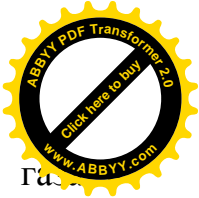
30. Чечейбаев Б. О некоторых точных решениях уравнения Линя-Рейсснера-Тзяня // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск IV. Гидрогазодинамика и экзогенно-экологические процессы природы.– Бишкек, 2005. – С. 153-160.

31. Чечейбаев Б., Сейталиев У., Чечейбаев А.Б. Приближенно-аналитический метод исследования нестационарных трансзвуковых двухфазных течений в соплах. // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына: Специальный выпуск. – Физика. Философия. – Бишкек, КНУ, 2003. – С. 94-104.

32. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б. Вывод рекуррентной системы дифференциальных уравнений инерционного фильтрационного движения газа в пласте при использовании современного модельного уравнения С.А. Христиановича. // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2005. Серия 3. Естественно - технические науки. – С.141-148.

33. Чечейбаев Б. Приближенно-аналитическое исследование задачи обтекания крыла пространственно-трехмерным нестационарным сверхзвуковым потоком газа.// Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2005. – С. 95-111.

34. Чечейбаев Б. О некоторых автомодельных решениях уравнения Линя-Рейсснера-Тзяня. // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына, 2005. – С.45-50. Международный год физики.



35. Чечейбаев Б. Неустановившиеся пространственные течения газа в сопле Лавалья. // Вестник Национальной Академии наук Республики Казахстан, 2007, №3. – С. 120-127.

36. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б. Численное моделирование и аналитические методы для решения задач гидрогазодинамики: Монография. – Бишкек, Изд-во «Турар», 2007. - 242 с.

37. Чечейбаев Б., Божымбаев С.К., Чечейбаева Э.Б. Аналитические решения уравнения Кармана для исследования трансзвуковых течений газа в пространстве. // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Серия 6. Наука и инновационные образовательные технологии в вузе. Труды ИИМОП. – Вып. 5. – Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2006. – С. 497-502.

38. Исманбаев А.И., Чечейбаев Б., Тельтаева А. К. Моделирование свободных течений газа методом крупных частиц Давыдова. // Вестник КГУСТА им. Н. Исанова, 2011. № 2(32), Т. 1. Материалы международной научно-практической конференции «Информационные технологии в образовании: состояние, проблемы и перспективы», 1-2 июля 2011 г., г. Бишкек. – Бишкек, КГУСТА, 2011.

39. Чечейбаев Б., Божымбаев С.К. К теории нестационарных течений жидкост и и газа в пористой среде. // Современные проблемы механики сплошных сред. Выпуск шестой. Гидрогазодинамика и экзогенно-геологические процессы природы. – Бишкек, 2007. – С. 34-40.

40. Чечейбаев Б., Сейталиев У., Чечейбаева Э.Б. Исследование околосвуковых пространственных течений газа в соплах Лавалья и в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода. // Вестник НАН Республики Казахстан. №1 . - Алматы, 2005. - С. 54-62.

41. Чечейбаев Б. Исследование разностных схем метода крупных частиц применительно к задачам инерционной фильтрации. // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия Математика. Механика. Информатика, № 1(68). – Алматы, 2011. - С. 131-136.

42. Чечейбаев Б. Истечение с критической скоростью потока газа и твердых частиц из сосуда. // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия Математика. Механика. Информатика, № 2(65). - Алматы, 2010. - С. 87-93.

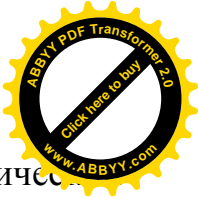
43. Чечейбаев Б., Чечейбаев А.Б., Жумаев М., Тельтаева А.К. Численные методы и программирование на языках программирования Pascal и Delphi. – Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2010.

44. Чечейбаев Б. Дифференциальные приближения и свойства разностных схем метода Давыдова: Монография. – Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына, 2011. – 124 с.

Резюме

Байыш Чечейбаев

«Аналитическое исследование и численное решение методом Давыдова некоторых задач механики одно- и двухфазных сред»



Используя аппарат приближенно-аналитических методов математической физики, исследованы пространственно-трехмерные стационарные и нестационарные трансзвуковые течения одно- и двухфазных сред в соплах Лавала, в сопле с плоской звуковой поверхностью перехода, в сопле с двумя сужениями. Обратными методами математической физики решены внешние задачи обтекания тел трансзвуковыми одно- и двухфазными потоками.

Методом крупных частиц Давыдова численно исследованы фильтрационные течения нефти в горизонтальном пласте при использовании фильтрационных моделей А.Дарси и С.А.Христиановича.

Используя систему аналитических вычислений Reduce на ЭВМ, вычислены дифференциальные приближения многопараметрического класса разностных схем метода крупных частиц Давыдова для решения пространственно-трехмерных задач нестационарной газовой динамики.

Исследованы основные свойства нелинейных разностных схем метода крупных частиц Давыдова для моделирования фильтрационных течений жидкости в пласте.

Корутунду

Байыш Чечейбаев

«Бир жана эки фазалуу чөйрөлөрдүн механикасынын кээ бир маселелерин аналитикалык түрдө изилдөө жана Давыдовдун сандык методу менен чыгаруу»

Математикалык физиканын жакындаштырылган аналитикалык ыкмаларын колдонуу менен Лавалдын туура кесилиши өзгөрмөлүү түтүкчөсүндөгү, үн аркылуу өтүү тегиздиги бар туура кесилиши өзгөрмөлүү түтүкчөдөгү жана эки ичкерүүсү бар туура кесилиши өзгөрмөлүү түтүкчөдөгү үч өлчөмдүү мейкиндиктеги стационардык жана стационардык эмес бир жана эки фазалуу үн ылдамдыгынын тегерегиндеги агымдар изилденген. Математикалык физиканын тескери маселелерин чыгаруу ыкмаларын колдонуу менен үн ылдамдыгынын тегерегиндеги бир жана эки фазалуу агымдардын телолор аркылуу агып өтүүсүнүн тышкы маселелери чыгарылган.

А.Дарси жана С.А.Христиановичтин фильтрациялык моделдерин колдонуу менен жердин горизонталдык катмарындагы нефтинин фильтрациялык агымдары Давыдовдун чоң бөлүкчөлөр ыкмасынын жардамы аркылуу сандык түрдө изилденген.

Стационардуу эмес газ динамикасынын үч өлчөмдүү мейкиндиктеги маселелерин чыгаруу үчүн Давыдовдун чоң бөлүкчөлөр ыкмасынын көп параметрлүү классындагы чектүү айырмаларынын дифференциалдык жакындатуулары Reduce аналитикалык эсептөөлөр системасын колдонуу менен ЭЭМде эсептелип чыгарылган.

Жер катмарындагы суюктуктардын фильтрациялык агымдарын моделдештирүү үчүн Давыдовдун чоң бөлүкчөлөр ыкмасынын сызыктуу эмес чектүү айырмаларынын негизги касиеттери изилденген.



Abstract

Baiysh Checheibaev

«The analytical investigation and numerical solution by Davydov's method of some problems of mechanics of single-phase and poly-phase mediums»

The spatial in three dimensions stationary and non-stationary transonic flows in Laval nozzle, in nozzle with flat sound surface of transition, in dual constriction nozzle have been studied for single-phase and multi-phase mediums by using the tools of approximate analytical methods of mathematical physics. The external problems of flowing of the bodies have been solved by using the inverse methods of mathematical physics and considering transonic single-phase and multi-phase flows.

The filtration oil flows in horizontal layers have been numerically investigated by using Davydov's Large-Particle Method and considering Darcy's law and a model of academician Sergei A. Christianovitch.

The differential approximations of multi-parameter class of difference schemes of Davydov's Large-Particle Method have been calculated by using Reduce computer algebra system for solving the spatial problems of gas dynamics in three dimensions.

The basic properties of nonlinear difference schemes of Davydov's Large-Particle Method have been investigated for modeling the fluid filtration flows in a layer.