УДК 517.97, 62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

Р.Ж. Наметкулова

Проведено исследование задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегро-дифференциальное уравнение; приближенное решение; сходимость.

I. Постановка задачи оптимизации и нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал [1–4]

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T u^2(t)dt,\ \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи:

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+g(t,x)f[t,u(t)],\quad 0<x<1,\ 0<t\le T, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi(x),\ 0<x<1, \tag{3}$$

$$v_x(t,0)=0,\ v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0,\ 0<t\le T. \tag{4}$$

Здесь функция $v(t,x)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,\ 0<t\le T\}$ описывает состояния управляемого процесса, ядро $K(t,\tau)$ – известная функция, определенная в квадрате $A=\{0<t<T,\ 0<\tau\le T\}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau d\tau=K_0<\infty; \tag{5}$$

$g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$, $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $f[t,u(t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ монотонна, т. е.

$$\frac{\partial f\left[t,u(t)\right]}{\partial u}\neq 0,\forall t\in[0,T]; \tag{6}$$

λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени; H (Y) – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Управление u^0 (t) ∈ $H(0, T)$, которое вместе с соответствующим ему решением v^0 (t, x) краевой задачи *(2)–(4)* минимизирует функционал *(1)*, называется оптимальным, а v^0 (t, x) – оптимальным процессом.

Решение краевой задачи определяется по формуле

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x),$$

где $v_n(t)$ – решение линейного интегрального уравнения [3, 5].

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)\,v_n(s)ds+a_n(t) \tag{7}$$

с ядром

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau \tag{8}$$

и свободным членом

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n(\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau. \tag{9}$$

Коэффициенты Фурье v_n (t) определяются по формуле [6]

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t), \tag{10}$$

где резольвента R_n (t, s, λ) ядра K_n (t, s) имеет вид

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\ K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta,\ i=1,2,3,... \tag{11}$$

и при выполнении условия

$$|\lambda|\sqrt{K_0T}<\sqrt{2}\lambda_1, \tag{12}$$

является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$|R_n(t,s,\lambda)|\leq\frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}}\left(\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Оптимальное управление u^0 (t) определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,\lambda)\int_0^T\tilde G_n(s,\lambda)f\left[s,u(s)\right]ds=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t)h_n, \tag{14}$$

где

$$\tilde G_n(t,\lambda)=g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(\tau,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\right], \tag{15}$$

$$G_n(t,\lambda)=g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right], \tag{16}$$

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2\tau}d\tau\right], \tag{17}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{u(t)}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u>0. \tag{18}$$

Это условие ограничивает класс функций внешних воздействий $f\,[t, u(t)]$. Поэтому будем считать, что функция $f\,[t, u(t)]$ удовлетворяет условию *(18)* для любого управления $u(t)$ ∈ $H(0, T)$.

Оптимальное управление имеет структуру [7]

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta], \tag{19}$$

где $u^0(t)$ является единственным решением нелинейного интегрального уравнения

$$p(t) = G[p(t)] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s, \varphi(s, p(s), \beta)\right] ds\right]. \tag{20}$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$ определяется по формуле

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds - a_n(t)\right) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\right) e^{-\lambda_n^2 t} ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u^0(\tau)] d\tau + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\eta)} g_n(\eta) f[\eta, u^0(\eta)] d\eta ds\right] z_n(x), \tag{21}$$

а минимальное значение функционала *(1)* вычисляется по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^{T-}\left[u^0(t)\right]^2 dt. \tag{22}$$

Тройка $\left(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)]\right)$ определяет решения задачи нелинейной оптимизации.

II. Приближенное решение задачи оптимизации.

На практике не всегда удается найти точное решение уравнения *(20)*. Поэтому в большинство случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $p_k(t)$ уравнения *(20)*, где число k определяется из неравенства [8]

$$\left\|\overline{p}(t) - p_k(t)\right\|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[p_0(t)] - p_0(t)\right\|_H < \varepsilon \tag{23}$$

при заданном $\varepsilon > 0$. Согласно структуре оптимального управления k-е приближение находим по формуле

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta]. \tag{24}$$

Лемма 2.1. Пусть функция $\varphi[t, \vartheta_k(t), \beta]$ удовлетворяет условию Липшица по функциональной переменной $\vartheta(t)$, т. е.

$$\left\|\varphi[t, \vartheta_1(t), \beta] - \varphi[t, \vartheta_2(t), \beta]\right\|_H \leq \varphi_0(\beta)\left\|\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)\right\|_H, \ \varphi_0(\beta) > 0. \tag{25}$$

Тогда k-е приближенное управление сходится к оптимальному управлению $u(t)$ по норме гильбертова пространства H.

Доказательство. Утверждение леммы следуетиз неравенства

$$\left\|u^0(t) - u_k(t)\right\|_H = \left\|\varphi[t, p^0(t), \beta] - \varphi[t, p_k(t), \beta]_H\right\| \leq$$

$$\leq \varphi_0(\beta)\left\|p^0(t) - p_k(t)\right\|_H \leq \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G[p_0(t)] - p_0(t)\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{26}$$

Лемма 2.2. Пусть функция $f[t, u(t)]$ удовлетворяет условию Липшица по функциональной переменной $u(t)$, т. е.

$$\left\|f[t, u_1(t)] - f[t, u_2(t)]\right\|_H \leq f_0\left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|_H \tag{27}$$

и выполнено *(25)*. Тогда m, k-е приближение $v_n^m(t,x)$ решения краевой задачи *(2)–(4)* сходится к точному решению $v(t, x)$ по норме гильбертова пространства $H(Q)$.

Доказательство. Приближения оптимального процесса $v^0(t, x)$ определяются двумя индексами k и m и имеют вид

$$v_n^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^T \lambda R_n^m(t,s,\lambda)\bar{e}^{\lambda_n^2 s} ds\right) + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u_k(\tau)] d\tau + \lambda\int_0^T g_n(\tau)\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda)\bar{e}^{\lambda_n^2(s-\tau)} ds f[\tau, u_k(\tau)] d\tau\} z_n(x). \tag{28}$$

Поскольку

$$v^0(t,x) - v_k^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\{\psi_n \lambda\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda)\right] e^{-\lambda_n^2 s} ds + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau)\left[f(\tau, u^0(\tau)) - f(\tau, u_k(\tau))\right] d\tau +$$

$$+ \lambda\int_0^T g_n(\tau)\int_\tau^T\left[R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda)\right] e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds f[\tau, u^0(\tau)] d\tau + \lambda\int_0^T g_n(\tau)\int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds\left[f(\tau, u^0(\tau)) - f(\tau, u_k(\tau))\right] d\tau z_n(x),$$

то с учетом вычислений, использованных при доказательстве сходимости приближенного решения краевой задачи *(2)–(4),* получим соотношение

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_H^2 \le C_1(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}+C_2(\lambda)\left(\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\right)^2 \xrightarrow[m,\,k\to\infty]{} 0,$$

где

$$C_1(\lambda)=\left(\left\|\psi(x)_H^2\right\|+T\left\|g(t,x)\right\|_H^2\right)\frac{\lambda^2K_0T}{4}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\cdot\frac{4}{3}\right),$$

$$C_2(\lambda)=\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left\|g(t,x)\right\|_H^2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0^2\varphi_0^2(\beta)\left\|G[p_0(t)]-p_0(t)\right\|_H^2,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2.3. m, k-е приближение $J_m[u_k(t)])$ минимального значения функционала $J[u^0(t)])$ сходится к точному значению.

Доказательство. Поскольку

$$J[u^0(t)]=\int_0^1[\nu^0(T,x)-\xi(x)]^2dx+\beta\int_0^T[u^0(t)]^2dt,\quad J_m[u_k(t)]=\int_0^1[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)]^2dx+\beta\int_0^T u_k^2(t)dt,$$

то нетрудно получить неравенство

$$\left|J[u^0(t)]-J_m[u_k(t)]\right|=\int_0^1\left\{[\nu^0(T,x)-\xi(x)]^2-[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\left([u^0(t)]^2-u_k^2(t)\right)dt\le$$

$$\le\left\|\nu(T,x)+\nu_k^m(T,x)-2\xi(x)\right\|_H\left\|{}^0\nu(T,x)+\nu_k^m(T,x)\right\|_H+\beta\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_H\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_H.$$

Отсюда согласно лемме 2.1 и 2.2 и с учетом того, что

$$u^0(t)\in H(0,T),\ \nu(T,x)\in H(0,1),\ \xi(x)\in H(0,1), f[t,u(t)]\in H(0,T),$$

получим соотношение

$$\left|J[u^0(t)]-J_m[u_k(t)]\right|\le C_0(\lambda)\left[C_1(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}+C_2(\lambda)\left(\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\right)^2\right]^{1/2}+$$

$$+h_0\beta\varphi_0(\beta)\left\|G[p_0(t)]-p_0(t)\right\|_H\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\xrightarrow[m,k\to\infty]{}0,$$

где

$$C_0(\lambda)=4\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\left(\left\|\psi(x)\right\|_H^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left\|g(t,x)\right\|_H^2f\left\|[t,u(t)]\right\|_H^2\right),$$

из которого следует утверждение леммы.

Таким образом, как следует из *лемм 2.1–2.3* доказано, что приближенное решение $\left(u_k(t),\nu_m^k(t,x),J[u_k(t)]\right)$ задачи нелинейной оптимизации сходится к точному решению $\left(u^0(t),\ \nu^0(t,x),J[u^0(t)]\right)$ по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Литература

1. *Верлань А.Ф.* Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. Киев: Наукова думка, 1988. 288 с.
2. *Тихонов А.Н.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.

4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
5. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
6. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
7. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
8. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис… д-ра физ.-мат. наук. / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.