УДК 517.97, 62-50

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

А.К. Керимбеков, Б.Ж. Кулбаева

Проведено исследование задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

I. Краевая задача управляемого процесса. Рассмотрим управляемый тепловой процесс $v\ (t,\ x)$ $(t,\ x) \in Q = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, описываемый краевой задачей

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^t K(t,\ \tau) v(\tau, x)\, d\tau + g(t, x)\, f\left[t, u(t)\right],$$

$$0 < x < 1, 0 < t \leq T, \tag{1.1}$$

$$v\ (0,\ x) = \psi\ (x),\ 0\ x < 1, \tag{1.2}$$

$$v_x\ (t,\ 0) = 0,\ v_x\ (t,\ 1) + av\ (t,\ 1) = 0,\ 0 < t \leq T, \tag{1.3}$$

где $g\ (t,\ x) \in H\ (Q)$, $\psi\ (x) \in H\ (0,1)$, $f\,[t,\ u\ (t)] \in H\ (0,\ T)$ – заданные функции, причем функция $f\,[t,\ u\ (t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H\ (0,\ T)$ и по функциональной переменной $u\ (t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f\left[t,u(t)\right]}{\partial u}\neq 0,\ \forall t\in\left[0,T\right]; \tag{1.4}$$

ядро $K(t,\tau)$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0=\sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|; \tag{1.5}$$

λ – параметр, постоянная $\alpha>0$, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

При решении задачи управления будем пользоваться слабо обобщенным решением краевой задачи *(1.1)–(1.3)*. Под этим решением понимается функция $v(t,x)\in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1(v\phi)_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1\left[(\phi_t+\phi_{xx})v(t,x)+\left(\lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau+g(t,x)f\left[t,u(t)\right]\right)\right]dxdt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\phi_x(t,0)\,v(t,0)-\left(\phi_x(t,1)+\alpha\phi(t,1)\right)v(t,1)\right]dt$$

при любых $t_1\,t_2\,(0\le t_1<t_2\le T)$, и для любой функции $\varphi(t,x)\in C^{1,2}(Q)$, а начальному и граничным условиям – в слабом смысле.

Решение краевой задачи *(1.1)–(1.3)* имеет вид

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x), \tag{1.6}$$

где функции

$$z_n(x)=\sqrt{\frac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x,\ \ n=1,2,3,\ldots$$

образуют полную ортонормированную систему собственных функций в пространстве $H(0,1)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяет условиям

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,,\ \ (n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1);\ \ n=1,2,3,\ldots \tag{1.7}$$

Согласно методике работы [1], коэффициенты Фурье $v(t)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots$ определяются как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра 2-рода вида

$$v_n(t)=\lambda\int_0^t K_n(t,s)\ v_n(s)ds+a_n(t) \tag{1.8}$$

с ядром

$$K_n(t,s)=\int_s^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\,\tau,$$

и свободным членом

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n(\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau.$$

Резольвенту ядра $K_n(t,s)$ находим в виде ряда Неймана

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s), \tag{1.9}$$

где итерированные ядра $K_{n,i}(t,s)$ определяются по формуле [2]:

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_s^t K_n(t,\tau)K_{n,i}(\tau,s)d\,\tau,\ K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s)\ \ i=1,2,3,\ldots$$

Нетрудно показать, что, согласно *(1.5)*, ряд Неймана *(1.9)* абсолютно сходится при любом значении параметра λ и для резольвенты имеет место неравенство

$$|R_n(t,s,\lambda)|\le\frac{K_0}{\lambda_n^2}e^{\frac{|\lambda|K_0(t-s)}{\lambda_n^2}}\le\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}. \tag{1.10}$$

Решение интегрального уравнения *(1.8)* находим по формуле [2]:

$$v_n(t)=\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)=\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 t}+\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+$$

$$+\int_0^t g_n(\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^t R_n\left(t,s,\lambda\right)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau, \quad (1.11)$$

где ψ_n, $g_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и $g(t, x)$.

Согласно *(1.5)*, *(1.10)* и свойствам заданных функций, нетрудно проверить, что функция $v(t, x)$, определяемая по формулам *(1.6)* и *(1.11),* является элементом пространства $H(Q)$.

Заметим, что, согласно *(1.4)*, каждому управлению $u(t) \in H(0, T)$ соответствует единственная функция $v(t, x)$.

II. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[u(t)]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u(t)\right|dt,\ \ \beta>0, \quad (2.1)$$

где $v(t, x)$ – решение краевой задачи *(1.1)–(1.3)*, $\xi(x) \in H(0,1)$ – заданная функция, т. е. нужно найти такое управление $u^0(t) \in H(0, T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $v^0(t, x)$ краевой задачи *(1.1)–(1.3)* минимизирует функционал *(2.1)*. Такое управление $u^0(t)$ называется оптимальным, а $v^0(t, x)$ – оптимальным процессом.

Согласно методике вывода принципа максимума для распределенных систем [3], нетрудно показать, что оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$2\beta sign\ u(t)=\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dxf_u\left[t,u(t)\right], \quad (2.2)$$

$$f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]f_{uu}\left[t,u(t)\right]sign\ \ u(t)>0, \quad (2.3)$$

где $\omega(t, s)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_t+\omega_{xx}+\lambda\int_t^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau=0,\ (t,x)\in Q,$$

$$\omega(T,x)+2\left[v(T,x)-\xi(x)\right]=0,\ 0<x<1,$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\ 0\le t<T, \quad (2.4)$$

а $v(t, x)$ – решение краевой задачи *(1.1)–(1.3)*. Условия *(2.2)* и *(2.3)*, которые выполняются на оптимальном управлении одновременно, называются *условиями оптимальности.*

III. Решение сопряженной краевой задачи.

Решение сопряженной краевой задачи *(2.4)* ищем в виде

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^\infty\omega_n(t)z_n(x)\cdot \quad (3.1)$$

Легко показать, что коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3, ...$ определяются как решение линейного интегрального уравнения

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(s,t)\,\omega_n(s)ds-2\left[v_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}, \quad (3.2)$$

где ядро

$$B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}K(s,\tau)d\tau\ ; \quad (3.3)$$

$v_n(t)$, ξ_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $v(t, x)$ и $\xi(x)$. Резольвенту ядра $B_n(s, t)$ находим в виде ряда Неймана

$$L_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^\infty\lambda^{i-1}B_{n,i}\left(t,s\right), \quad (3.4)$$

где

$$B_{n,i+1}\left(t,s\right)=\int_t^s B_n\left(t,\tau\right)B_{n,i}\left(\tau,s\right)d\tau,\ B_n(t,s)=B_{n,1}(t,s),\ i=1,2,3,...,$$

итерированные (повторные) ядра. Нетрудно проверить, что они удовлетворяют следующим оценкам:

$$\left|B_{n,i}\left(t,s\right)\right|\le\left(\frac{K_0}{\lambda_n^2}\right)^i\frac{(s-t)^{i-1}}{(i-1)!},\ i=1,2,3,..., \quad (3.5)$$

Согласно *(3.5)*, для резольвенты имеет место оценка

$$\left|L_n(t,s,\lambda)\right| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\left|B_{n,i}(t,s)\right| \le \frac{K_0}{\lambda_n^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1)!}\left(\frac{|\lambda|K_0(s-t)}{\lambda_n^2}\right)^{i-1} = \frac{K_0}{\lambda_n^2}e^{\frac{|\lambda|K_0(s-t)}{\lambda_n^2}} \le \frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0 T}{\lambda_n^2}}, \tag{3.6}$$

т. е. ряд Неймана сходится равномерно для любого значения λ.

Решение интегрального уравнения *(3.2)* находим по формуле

$$\omega_n(t) = -2\lambda\int_0^T L_n(s,t,\lambda)\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds - 2\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-t)}. \tag{3.7}$$

Подставляя *(3.7)* в *(3.1)* находим решение сопряженной краевой задачи *(2.4)*.

IV. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления. Оптимальное управление находим согласно условиям оптимальности *(2.2)* и *(2.3)*. Поскольку

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)\,dx = \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)z_n(x)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(t)z_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\,\omega_n(t) = -2\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T h_n(s,t,\lambda)\,e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right),$$

то с учетом *(1.11)*, согласно *(2.2)*, получим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]sign\;u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}G_n^0(t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,\lambda)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right], \tag{4.1}$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right); \tag{4.2}$$

$$G_n(t,\lambda) = g_n(t)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right); \tag{4.3}$$

$$G_n^0(t,\lambda) = g_n(t)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T L_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right). \tag{4.4}$$

Уравнение *(4.1)* следует решать с учетом и второго условия оптимальности *(2.3)*, ибо оптимальное управление u^0 *(t)* должно удовлетворять условиям оптимальности *(2.2)* и *(2.3)* одновременно. Поскольку функция $f[t,\, u(t)]$ задается, то в зависимости от знака соотношения $f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]f_{uu}\left[t,u(t)\right]$, согласно *(2.3),* относительно оптимального управления имеет место одно из следующих условий:

$$u(t) > 0 \text{ если } f_u^{-1}\left[t,u\right]f_{uu}\left[t,u\right] > 0, \tag{4.5}$$

$$u(t) < 0 \text{ если } f_u^{-1}\left[t,u\right]f_{uu}\left[t,u\right] < 0. \tag{4.6}$$

Известно, что решение интегрального уравнения Фредгольма не обладает свойством продолжаемости, т. е. решение строится для области (интервала) в целом.

Поэтому оптимальное управление u^0 *(t)* является решением интегрального уравнения *(4.1)* определенного знака.

Пусть выполняется условие *(4.5)*. В этом случае оптимальное управление u^0 *(t)* определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}G_n^0(t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,\lambda)f\left[t,u(t)\right]d\tau\right]. \tag{4.7}$$

только положительного знака.

Для построения решения уравнения *(4.7),* согласно методике, разработанный проф. А. Керимбековым [4], положим

$$\beta f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = p(t). \tag{4.8}$$

Лемма 4.1. Функция *p* (*t*) является элементом пространства функций суммируемых с *m*-й степенью, т. е. $p(t)\in L_2^m(0,T),\ 1\le m<\infty$.

Доказательство. Согласно условию *(1.4),* имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} f^{-1}\left[t,u(t)\right] = M > 0. \tag{4.9}$$

Поэтому утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T |p(t)|^m\, dt \le \beta^m \int_0^T \left| f^{-1}[t,u(t)\right|^m dt \le (\beta M)^m\ T < \infty.$$

Согласно условию (1.4), из равенства (4.8) функция определяется $u(t)$ однозначно, т. е. существует функция $\varphi(\cdot)$, такая, что имеет место равенство

$$u(t) = \varphi\ [t,\ p(t),\ \beta]. \tag{4.10}$$

Лемма 4.2. Пусть $p\,(t) \in H\,(0, T), f\,[t,\ u\,(t)] \in H\,(0, T),\ \forall u(t) \in H(0,T)$. Тогда оператор

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^0\,(t,\lambda)\left[h_n\ - \int_0^T G_n\,(\tau,\ \lambda) f\ [\tau, u(\tau)]\,d\tau\right] \tag{4.11}$$

отображает пространство H (0, T) в себя.

Доказательство. С учетом равенств *(4.2)–(4.4)* непосредственным вычислением получим неравенство

$$\int_0^T G^2\,[p\,(t)]dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n^0(t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\ [\tau, u(\tau)]\,d\tau\right]\right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \left(G_n^0(t,\lambda)\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,\lambda) f\,[\tau, u\,(\tau)]\,d\tau\right]^2 dt \le$$

$$\le 2\,\|\,g(t,x)\,\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left[1+\left(\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}\right)^2\right]\Big\{2\left(\|\,\xi\,(x)\,\|_H^2 + B_0\,\|\psi\,(x)\|_H^2\right) +$$

$$+\,\|\,g(t,x)\,\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left[1+\left(\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}\right)^2\right]\|\,f\,[t,u(t)]\,\|_H^2\Big\} < \infty\,,$$

из которого следует утверждение леммы. Здесь $B_0 = 2\left[1+\left(\dfrac{\lambda K_0}{2\lambda_1^2}\right)^2 e^{\frac{2|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}\cdot\dfrac{1}{2\lambda_1^2}\right]$.

Лемма 4.3. Пусть каждая из функций $f\,[t,\ u\,(t)]$ и $\varphi\ [t,\ P(t), \beta]$ по функциональному аргументу удовлетворяет условию Липшица:

$$\left\| f\,[t,u(t)] - f\,[t,\bar{u}(t)]\right\|_H \le f_0 \left\| u(t) - \bar{u}(t)\right\|_H,\ f_0 > 0, \tag{4.12}$$

$$\left\|\varphi[t,\, p(t),\ \beta] - \varphi[t,\, \bar{p}(t), \beta]\right\|_H \le \varphi_0\,(\beta)\left\| p(t) - \bar{p}(t)\right\|_H,\ \ \varphi_0\,(\beta) > 0. \tag{4.13}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = \left\|g(t,x)\right\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left[1+\left(\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}\right)^2\right] f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \tag{4.14}$$

оператор $G\,[p]$, действующий по формуле *(4.11)*, является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\left\|[G[p] - G[\bar{p}]\right\|_H^2 = \int_0^T \left(G[p] - G[\bar{p}]\right)^2 dt = \le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n^0(t,\lambda)\right)^2 \int_0^T G_n^2(\tau,\lambda)d\tau \int_0^T \left(f\,[\tau,u(\tau)] - f\,[\tau,\bar{u}(\tau)]\right)^2 d\tau dt \le$$

$$\le \left[\left\|g\,(t,x)\right\|_H^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left(1+\left[\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}\right]^2\right)\right]^2 \left\| f\,[\tau, u(\tau)] - f[\tau,\bar{u}(\tau)]\right\|_H^2 \le$$

$$\le \left[\left\|g(t,x)\right\|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\left[\frac{\lambda K_0 T}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}\right]^2\right)\right]^2 f_0^2 \varphi_0^2(\beta)\left\|p(t) - \bar{p}(t)\right\|_H^2,$$

из которого следует утверждение леммы.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия *(1.4), (1.5), (4.12)–(4.14).* Тогда операторное уравнение $p(t) = G\left[p(t)\right]$ в пространстве H (0, T) имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно Леммам *4.1* и *4.3* операторное уравнение можно рассматривать в пространстве H (0, T). Согласно Лемме *4.3* оператор G (p) является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство H (0, T) является полным метрическим пространством, то согласно теореме [5] о принципе сжимающих отображений оператор G (p) имеет единственную неподвижную точку, т.е. операторное уравнение имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. n-е приближение решения находится по формуле $p_n(t) = G[p_{n-1}(t)]$, $n = 1,2,3, ...$,
где $p_0(t)$ произвольный элемент пространства H (0, T), причем имеет место оценка

$$\left\|p(t) - p_k(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right] - p_0(t)\right\|_H. \tag{4.15}$$

Точное решение $p^0(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е. $p_0(t) = \lim\limits_{k\to\infty} p_k(t)$.

Это решение подставляя в *(4.10)* находим искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta]. \tag{4.16}$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$, т. е. решение краевой задачи *(1.1)–(1.4),* соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, согласно *(1.6), (1.11)* находим по формуле

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)\,e^{-\lambda_n^2 s}ds\right) + \right.$$
$$\left. +\int_0^T g_n(\tau)\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)f\left[\tau, u^0(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x). \tag{4.17}$$

Минимальное значение функционала *(2.1)*вычислим по формуле:

$$J[u^0] = \int_0^1\left[v^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt. \tag{4.18}$$

Найденная тройка ($u^0(t)$ $v^0(t, x)$, $J[u^0(t)]$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер.мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
2. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров М.: Наука, 1978. 500 с.
4. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис… д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.