УДК 517.968

ОДИН КЛАСС СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

З.А. Каденова

Исследована единственность решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, в которых оператор, порожденный ядрами, не является компактным оператором.

Ключевые слова: система линейных интегральных уравнений; единственность; регуляризация; функциональный анализ.

Постановка задачи. Актуальность проблемы обусловлена потребностями в разработке новых подходов для регуляризации и единственности решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными. В работе доказана теорема единственности решения интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях. Для этого использованы методы функционального анализа и метод неотрицательных квадратичных форм.

Рассмотрим уравнение

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)dx + \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x), (t,x)\in G,$$

$$G = \{(t,x)\in R^2, \quad t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le b\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y), & (t,x,y)\in G_1, \\ B(t,x,y), & (t,x,y)\in G_2, \end{cases} \tag{2}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ H(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$ – известные n×n-мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = \{(t,x,y): t_0 \le t < \infty,\ a \le y \le x \le b\},\ G_2 = \{(t,x,y): t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le y \le b\},$$

$$G_3 = \{(t,x,s): t_0 \le s \le t < \infty,\ a \le x \le b\},\quad G^2 = G\times G,$$

f (t,x) – известная, *u (t,x)* – неизвестная n-мерные вектор-функции.

В работах А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2, 3] и В.К. Иванова [4, 5], в которых дано новое понятие корректности постановки таких задач, отличное от классического, показано средство для исследования некорректных задач, что стимулировало интерес к интегральным уравнениям, имеющим большое прикладное значение. В настоящее время бурно развивается теория и приложения некорректных задач. Один из классов таких некорректных задач составляют интегральные уравнения первого рода с двумя независимыми переменными вида (1).

Введем следующие обозначения:

1. Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим M, < . , . > – скалярное произведение в R^n, $\|A\|, \|u\|$ – нормы соответственно n×n-мерной матрицы $A = (a_{ij}) \in M$ и *n*-мерного вектора *u*, т. е. для любых $u = (u_1, u_2, ..., u_n),\ \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n) \in R^n$

$$\langle u, \vartheta\rangle = u_1\vartheta_1 + u_2\vartheta_2 + ... + u_n\vartheta_n,$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle},\quad \|A\| = \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_{ij})^2\right)^{1/2};$$

2. $L_{2,n}(G)$ – пространство n-мерных векторов с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_{2,n}(G)$ – т. е. для любого $u(t,x)\in L_{2,n}(G)$:

$$\|u(t,x)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\|u(t,x)\|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}};$$

3. $L_2\left(\left(G^2\right);M\right)$ – пространство n×n-мерных матриц с элементами из $L_2(G^2)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_2((G^2);M$, – т. е. для любого $A(t,x,s,y)\in L_2\left(\left(G^2\right);M\right)$

$$\|A(t,x,s,y)\|_{L_2}=\left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^b\|A(t,x,s,y)\|^2dydxdsdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что $\|C(t,x,s,y)\|\in L_2\left(G^2\right)$ и $C(t,x,s,y)=C^*(s,y,t,x)$, $(t,x,s,y)\in G^2$, где C^* – матрица, сопряженная с матрицей C. Тогда матричное ядро $C\ (t,\ x,\ s,\ y)$ разлагается в ряд, который сходится по норме в пространстве $L_{2,n}(G^2)$:

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\begin{pmatrix}\varphi_1^{(i)}(t,x)\\ .\\ .\\ .\\ \varphi_n^{(i)}(t,x)\end{pmatrix}\left(\varphi_1^{(i)}(s,y),\ldots,\varphi_n^{(i)}(s,y)\right),\ l\le m\le\infty, \tag{3}$$

где $\left\{\left(\varphi^{(i)}(t,x)\right)=\left(\varphi_\nu^{(i)}(t,x)\right)\right\}$ – ортонормированная последовательность собственных вектор-функций из $L_{2,n}(G)$, $\{\lambda_i\}$ – последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора С, порожденного матричным ядром $C\ (t,\ x,\ s,\ y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$ расположены в порядке убывания их модулей т. е.

$|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\ldots$.

Обозначим

$$P(s,y,z)=A(s,y,z)+B^*(s,z,y),\quad (s,y,z)\in G_1, \tag{4}$$

где $B^*(s,z,y)$ – сопряженная матрица и матрице $B(s,z,y)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1. $P^*(s,y,z)=P(s,y,z),(s,y,z)\in G_1$.

2. Матрицы $P(s,b,a)$, $\lim\limits_{t\to\infty}H(t,y,t_0)$, $P_z'(s,b,z)$, $\lim\limits_{t\to\infty}H_\tau'(t,y,\tau)$ – неотрицательны соответственно при всех значениях $s\in[t_0,\infty)$, $y\in[a,b]$, $(s,\ z)$, $(\tau,\ y)\in G$, $\|P(s,b,a)\|\in C[t_0,\infty)$, $\left\|\lim\limits_{t\to\infty}H(t,y,t_0)\right\|\in C[a,b]$, $\|P_z'(s,b,z)\|\in C(G)$, $\left\|\lim\limits_{t\to\infty}H_\tau'(t,y,\tau)\right\|\in C(G)$.

3. Матрицы $P_y'(s,y,a)$, $H_s'(s,y,t_0)$, $P_{zy}''(s,y,z)$, $H_{\tau s}''(s,y,\tau)$– неположительны при всех значениях соответственно $(s,y)\in G$, $(s,y,z)\in G_1$, $(s,y,\tau)\in G_3$, $\|P_y'(s,y,a)\|\in C(G)$, $\|H_s'(s,y,t_0)\|\in C(G)$, $\|P_{zy}''(s,y,z)\|\in C(G_1)$, $\|H_{\tau s}''(s,y,\tau)\|\in C(G_3)$.

4. Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

а) при почти всех $(s,\ y)\in G$ матрица $P_y'(s,y,a)$ – отрицательны;

б) при почти всех $(s,\ z)\in G$ матрица $P_z'(s,b,z)$ – положительны;

в) при почти всех $(s,\ y)\in G$ матрица $H_s'(s,y,t_0)$ – отрицательны;

г) при почти всех $(\tau,\ y)\in G$ матрица $\lim\limits_{t\to\infty}H_\tau'(\infty,y,\tau)$ – положительны и для любого $v(t,x)\in L_{2,n}(G)$, $\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy$, $\int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy$, $\int_{t_0}^t H(t,x,s)v(s,x)ds\in L_{2,n}(G)$, где $C[t_0,\infty)$, $C(G)$, $C(G_1)$ и $C(G_3)$ – пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,\infty)$, G, G_1 и G_3.

Теоремы. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_{2,n}(G)$.

Доказательство. В силу (2) систему уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)dy + \int_x^b B(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds +$$
$$+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x),\ \ (t,x)\in G. \tag{5}$$

Обе части (5), скалярно умножим на $u\,(t,x)$ и интегрируем по области G:

$$\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_a^y A(s,y,z)u(s,z)dz, u(s,y)\right\rangle dsdy + \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_y^b B(s,y,z)u(s,z)dz, u(s,y)\right\rangle dsdy +$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy +$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\langle f(s,y),u(s,y)\rangle dsdy. \tag{6}$$

Применяя формулу Дирихле из (6), имеем:

$$\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_a^y A(s,y,z)u(s,z)dz, u(s,y)\right\rangle dsdy + \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_a^z B(s,y,z)u(s,y)dy, u(s,z)\right\rangle dsdz +$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_{t_0}^t H(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy +$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_a^b\int_{t_0}^{\infty} C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\langle f(s,y),u(s,y)\rangle dsdy.$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle \int_a^y \left[A(s,y,z)+B^*(s,z,y)\right]u(s,z)dz,\ u(s,y)\right\rangle dyds + \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy +$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\langle f(s,y),u(s,y)\rangle dsdy.$$

Отсюда, учитывая обозначения (4), получим:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle \int_a^y P(s,y,z)u(s,z)dz, u(s,y)\right\rangle dyds + \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy +$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau, u(s,y)\right\rangle dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\langle f(s,y),u(s,y)\rangle dsdy. \tag{7}$$

Преобразуем первый два интеграла левой части уравнения (7). Известно что, если К – самосопряженная матричная функция размеров n×n, то

$$\langle K\vartheta, \vartheta'_s\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle K\vartheta,\vartheta\rangle\right)'_s - \frac{1}{2}\langle K'_s\vartheta,\vartheta\rangle, \tag{8}$$

где ϑ – некоторый n мерный вектор-функция.

Далее, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi=-u(\tau,y),$$

с помощью интегрирования по частям и с учетом (8) первый слагаемый левой части (7) преобразуем к виду:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle\int_{a}^{y}P(s,y,z)u(s,z)dz,u(s,y)\right\rangle dyds=-\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle\int_{a}^{y}P(s,y,z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)dz,u(s,y)\right\rangle dyds=$$

$$=-\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle P(s,y,z)\left(\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)\Bigg|_{a}^{y}-\int_{a}^{y}P'_z(s,y,z)\left(\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)dz,u(s,y)\right\rangle dyds=$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle\left(P(s,y,a)\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu+\int_{a}^{y}P'_z(s,y,z)\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)dz,u(s,y)\right\rangle dyds=$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\{\left\langle P(s,y,a)\left(\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu\right),\left(\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)'_y\right\rangle+\int_{a}^{y}\left\langle P'_z(s,y,z)\left(\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right),\left(\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right)'_y\right\rangle\right\}dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_{a}^{b}\left\{\left[\left(\left\langle P(s,y,a)\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle\right)'_y-\frac{1}{2}\left\langle P'_y(s,y,a)\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{a}^{y}\left[\left(\left\langle P'_z(s,y,z)\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle\right)'_y-\frac{1}{2}\left\langle P''_{zy}(s,y,z)\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle\right]dz\right\}dyds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\int_{a}^{b}u(s,\nu)d\nu,\int_{a}^{b}u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle P'_y(s,y,a)\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle P'_z(s,b,z)\int_{z}^{b}u(s,\nu)d\nu,\int_{z}^{b}u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}\left\langle P''_{zy}(s,y,z)\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds. \quad (9)$$

Аналогично, для второго слагаемого имеем:

$$\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle\int_{t_0}^{s}H(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\left\langle\lim_{t\to\infty}H(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle H'_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi,\int_{t_0}^{s}u(\xi,y)d\xi\right\rangle dsdy+\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle\lim_{t\to\infty}H'_\tau(t,y,\tau)\int_{\tau}^{\infty}u(\xi,y)d\xi,\int_{\tau}^{\infty}u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\left\langle H''_{\tau s}(s,y,\tau)\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi,\int_{\tau}^{s}u(\xi,y)d\xi\right\rangle d\tau dsdy. \quad (10)$$

Подставляя (3), (9), (10) в (7), получим:

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\int_{a}^{b}u(s,\nu)d\nu,\int_{a}^{b}u(s,\nu)d\nu\right\rangle ds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle P'_y(s,y,a)\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{a}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle dyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\left\langle P'_z(s,b,z)\int_{z}^{b}u(s,\nu)d\nu,\int_{z}^{b}u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzds-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\int_{a}^{y}\left\langle P''_{zy}(s,y,z)\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu,\int_{z}^{y}u(s,\nu)d\nu\right\rangle dzdyds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \left\langle \lim_{t\to\infty} H(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi, \int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi \right\rangle dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty} \left\langle H_s'(s,y,t_0)\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi, \int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi \right\rangle dsdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty} \left\langle \lim_{t\to\infty} H_\tau'(t,y,\tau)\int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi \right\rangle d\tau dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s} \left\langle H_{\tau s}''(s,y,\tau)\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi \right\rangle d\tau dsdy +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \int_a^b\int_{t_0}^{\infty} \left|\left\langle \varphi^{(i)}(s,y), u(s,y)\right\rangle\right|^2 dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle f(s,y), u(s,y)\right\rangle dsdy. \qquad (11)$$

Пусть $f(t,x)=0, \quad (t,x)\in G.$

Тогда, учитывая условия 1), 2), 3), 4) и 5), из (11) имеем $u\ (t,\ x) = 0$ при всех $(t,\ x) \in G$. Теорема доказана.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* О методах решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // Тез. докл. межд. конгр. математиков. М., 1966.
2. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
3. *Лаврентьев М.М.* Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. М.: Наука, 1980.
4. *Иванов В.К.* О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Дифференциальные уравнения. 1968. № 2. С. 61.
5. *Иванов В.К.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. М.: Наука, 1978.