УДК 51(07):371.3

Салыков С.С., Джапарова С.Н., Салыкова Н.С.
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ОКУТУУДА ИНТЕРАКТИВДҮҮ ЫКМАЛАРДЫ КОЛДОНУУ

Макалада мектеп математикасынын маанилүү бөлүмдөрүнүн бири болгон тригонометриялык функциялардын касиеттерин жана негизги теңдештиктерди окуп үйрөнүүдө интерактивдүү ыкмаларды колдонуу менен окуучулардын өз алдынча активдүүлүгүн жогорулатуу маселелери каралган

Тригонометрия боюнча окуу материалын өздөштүрүүгө жетишүү менен, окуучулардын математикалык билимдери тереңдеп, аналитикалык ой жүгүртүүсүн өстүрүүгө шарт түзүлөт. Айрыкча, тиешелүү функциялардын жуп, тактыгы, мезгилдүүлүгү, монотондуу аралыктары сыяктуу кесиеттеринен келип чыга турган тригонометриялык туюнтмаларды теңдеш өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүү окуучулардын рационалдык туюнтмаларды теңдеш өзгөртүп түзүү боюнча алган билимдеринин тереңдешине алып келип, натыйжада, алардын жалпы эле математика боюнча билимдеринин сапаттуу болушуна алып келет.

Математикалык ырастоолорду негиздөөнүн бир нече варианттарына талдоо жүргүзүү ишин эффективдүү уюштуруу окуучулардын кызыгуусун пайда кылып, окуу материалын ийкемдүү жана толук өздөштүрүүгө өбөлгө түзүү менен, алардын математикалык билимдеринин аң-сезимдүү жана бекем болушуна алып келе турганы практикада жана теорияда далилденген [1, 180-181]. Экинчи жактан, мындай ыкма окутуунун инновациялык жолу менен үндөш болуп, чакан топ түзүү, ротация, инсерт ж.б.д.у.с. интерактивдүү жолдорду кеңири пайдаланууга жол ачылып, натыйжада, окуучулардын таанып-билүү өз алдынчалуулугун өнүктүрүүгө реалдуу мүмкүнчүлүктөр пайда болот.

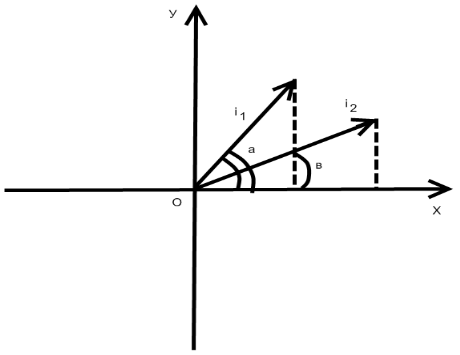
Программага ылайык [2, 35], мектеп математикасынын тригонометрия боюнча окуу материалдарынын ичинен транцендenttик функциялардын касиеттерин өздөштүрүшкөндөн кийин, окуучуларга сунуш кылына турган жана таанып-билүү багытында, ошондой эле алардын акыл-сезиминин функционалдык касиеттерин өсүп-өнүктүрүүдө айрыкча маанилүү болгон кошуунун теоремалары жана келтирүүнүн формулалары деген өзгөчө аталыш менен математикада белгилүү болгон темаларды өзгөчө бөлүп көрсөтүү абзел. Чындыгында эле, кошуунун теоремаларынан дээрлик бардык тригонометриялык теңдештиктерди (кош бурчтун тригонометриялык функциялары, тригонометриялык функциялардын суммасын жана көбөйтүндүсүн тиешелүү түрдө көбөйтүндүгө жана суммага өзгөртүп түзүүгө мүмкүндүк берүүчү формулалар ж.б.) негиздеп, натыйжа катарында көрсөтүүгө мүмкүн болсо, келтирүүнүн формулалары каалагандай α бурчунун тригонометриялык функцияларынын маанилерин эсептөөнү, $\frac{\pi}{2}\kappa+\alpha$ (к∈Z) туюнтмасын пайдалануу менен к нын ар кандай маанисинде тар бурчтун тригонометриялык функциясынын маанилерин эсептөөгө алып келүүгө мүмкүндүк пайда болот.

Программада [2,30-31] жана окуу китебинде [3, 175-176] көрсөтүлгөндөй, кошуунун формуласын далилдөөдө вектордук координаттык метод колдонулганы белгилүү. Окуучулардын окуу-таанып билүү активдүүлүгүн жогрулатуу үчүн жана алардын математикалык ырастоолорду негиздөө боюнча билимдеринин жана билгичтиктеринин сапатын жогорулатуу максатында, эффективдүү интерактивдүү ыкмалардын бири болгон ротация методун колдонуу максатында

$\cos(\alpha\pm\beta)= \cos\alpha * \cos \beta \mp \sin \alpha * \sin \beta$ (1) формулаларынын далидөөсүнүн бир нече вариантын сунуштоого болот. Далилдөөнүн окуу китебиндегиден [3, 175] айырмалуу болгон төмөнкүдөй жолдорун келтирели.

1-жол. Тик бурчтуу координата системасын сызып, Ох огу менен тиешелүү түрдө α жана β бурчун түзө турган $\overline{i_1}$ жана $\overline{i_2}$ бирдик векторлорун сызып көрсөтөбүз. (1-сүрөт).

Окуучулар мурда өздөштүргөн билимдерине таянуу менен, $\overline{i_1}$ жана $\overline{i_2}$ векторлорунун арасындагы бурч α-β га барабар экенин белгилешет.



1-сүрөт.

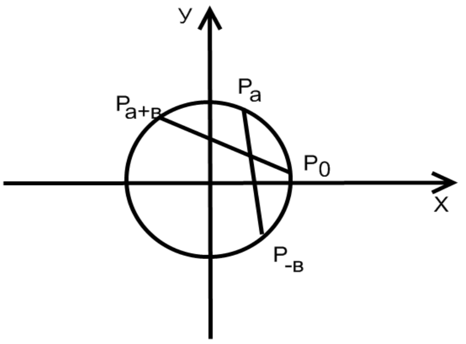
Ошондой эле окуучулар планиметрия курсунан алган билимдерине ылайык, эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсү алардын узундуктарын алардын арасындагы бурчтун косинусуна болгон көбөйтүндүсүнө барабар экендигин эстерине түшүрүшүп, $\overline{i_1}$ * $\overline{i_2}$ =1*1*cos(α-β) (2) барабардыгын жазышат. Далилдөөнүн экинчи этабында $\overline{i_1}$ жана $\overline{i_2}$ векторлорунун координаттары, тиешелүү түрдө, (cosα ,sinα) жана (cosβ, sinβ) экендигин эске алуу менен координаттар аркылуу берилген векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн формуласын пайдаланышып, окуучулар төмөнкүдөй барабардыкты жазышат: $\overline{i_1}$ * $\overline{i_2}$ =cosα* cosβ+ sin α* sin β (3)

Андан ары (2) жана (3) барабардыктарды өз ара салыштыруу менен тиешелүү корутунду чыгарууну окуучуларга сунуштайбыз. Натыйжада, эки бурчтун айырмасынын косинусунун формуласы келип чыгат: cos(α-β)= cosα* cos β+sin α* sin β

2-жол. Эми эки бурчтун суммасынын косинусунун формуласын далилдөөнүн бир вариантын берели.

Ошентип, α жана β нын каалаган маанисинде (1) барабардык орун аларын далилдейли (2-сүрөт).

Мейли, координаттык айлананын P_α, $P_{-\beta}$ жана $P_{\alpha+\beta}$ чекиттери $P_0(1;0)$ чекитин тиешелүү түрдө α,-β жана α+β радиан бурчуна буруудан алынган чекиттер болсун дейли.



2-сүрөт.

Синустун жана косинустун аныктамалары боюнча бул чекиттер төмөнкүдөй координаттарга ээ болушат:

P_α (cosα ,sinα), $P_{-\beta}$ (cos(-β), sin(-β)) жана $P_{\alpha+\beta}$ cos(α+β),sin(α+β)).

Түзүү боюнча P_0, $P_{\alpha+\beta}$ жана $P_{-\beta}P\alpha$ жаалары барабар, анда $P_\alpha P_{-\beta}$ жана $P_0\ P_{\alpha+\beta}$ хордалары да барабар болушат: $P_{-\beta}\ P_\alpha= P_0\ P_{\alpha+\beta}$. Демек, $(P_{-\beta}\ P_\alpha)^2 =(\ P_0\ P_{\alpha+\beta})^2$ барабардыгы келип чыгат. (Чоңдуктар барабар болсо, алардын квадраттары да барабар болот) Эми планиметрия курсунан белгилүү болгон, эки чекиттин арасындагы аралыктын формуласын пайдаланып, төмөнкүгө ээ болобуз:

$(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2=(1-\cos(\alpha+\beta))^2+ (\sin(\alpha+\beta))^2$

Алынган бул барабардыкты косинустун жана синустун жуп, тактык касиеттерин колдонуу менен теңдеш өзгөртүп түзүп, төмөнкүдөй формуланы алабыз:

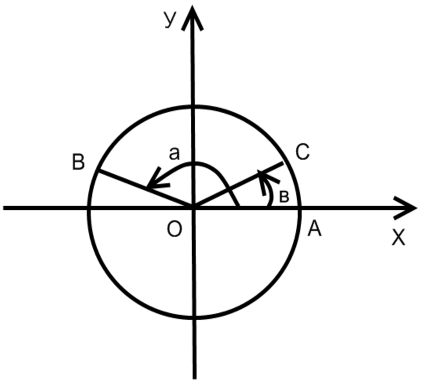
$\cos^2\beta-2\cos\beta*\cos\alpha + \cos^2\alpha+ \sin^2\beta+2\sin\alpha*\sin\beta+ \sin^2\alpha=1-2\cos(\alpha+\beta)+ \cos^2(\alpha+\beta)+$
$+\sin^2(\alpha+\beta)\Rightarrow(\cos^2\beta+ \sin^2\beta)+(\cos^2\alpha+ \sin^2\alpha)-2(\cos\alpha*\cos\beta-\sin\alpha*\sin\beta)=1+(\cos^2(\alpha+\beta)+$
$+\sin^2(\alpha+\beta))-2\cos(\alpha+\beta)$

Эми $\cos^2 t+ \sin^2 t=1$ экендигин эске алып, окшош мүчөлөрүн топтоо менен далилдөөнү талап кылган барабардыктарды алабыз:

$\cos(\alpha+\beta)= \cos\alpha* \cos\beta- \sin \alpha* \sin \beta$

Эки бурчтун айырмасынын жана суммасынын косинусун тиешелүү түрдө ошол бурчтардын косинустары жана синустары аркылуу туюнта турган формулалардын жогоруда келтирилген далилдөөсүнө окуу китебинде [3, 175] берилген далилдөөнү кошумчалоо менен, класстагы окуучуларды үч чакан топко бөлүү аркылуу ротация ыкмасын колдонуп, алдын ала даярдалган ватман кагазга бул теоремалардын далилдөөлөрүн өркүндөтүлгөн анализ методу жана блок схема түзүү менен талдоо жүргүзүп чыгууну сунуштоого болот. Маселен, окуу китебинде берилген далилдөөнү өркүндөтүлгөн анализ методун колдонуу менен төмөндөгүчө өзгөртүп түзүүгө болот (3-сүрөт).

(1) барабардыкты далилдөө үчүн R_0^{α} (A)=B, R_0^{β} (A)=C сыяктуу, борбору O чекити болгон буруу аркылуу алынган чекиттердин координаталарын, тиешелүү түрдө косинустун жана синустун аныктамаларын пайдаланылып жазып чыгуу менен векторлордун ($\overline{OB},\overline{OC}$) скалярдык көбөйтүндүсүнүн касиеттерине таянуу аркылуу алынган туюнтманы теңдеш өзгөртүп түзүү жетиштүү.



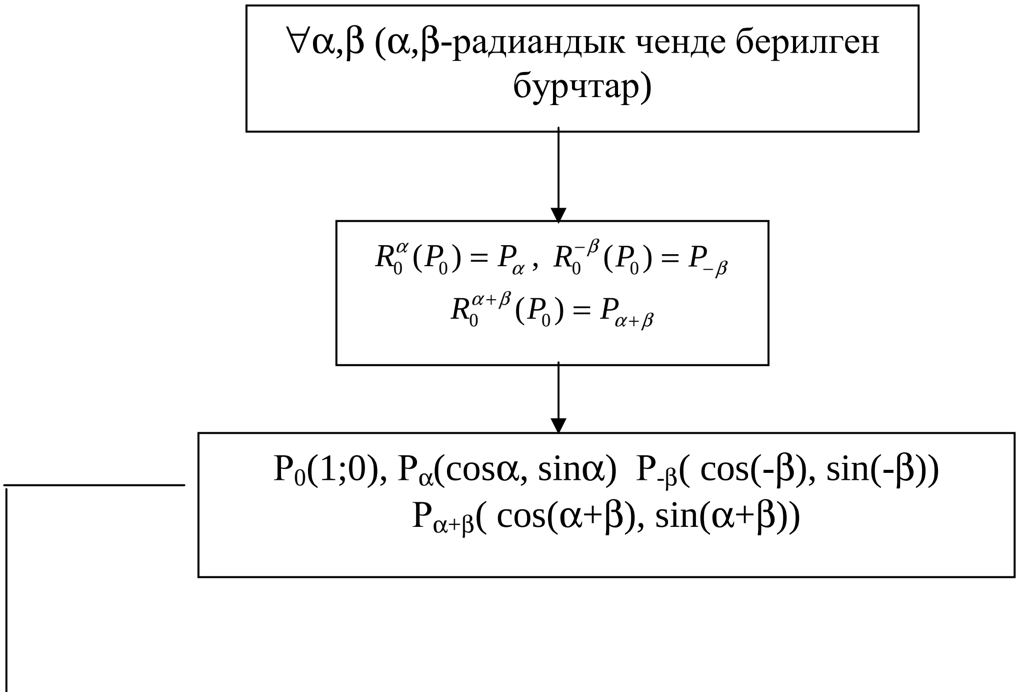
3-сүрөт.

Эми (1) барабардыктын сол жагындагы cos(α-β) туюнтмасын алуу үчүн $\overline{OB}*\overline{OC}=\left|\overline{OB}\right|*\left|\overline{OC}\right|*\cos(\alpha-\beta)$ же $\overline{OB}*\overline{OC}=R^2\cos(\alpha-\beta)$ (*$_1$) деген векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн касиетин туюнта турган формуланы колдонуу жетиштүү.

Ал эми (1) формуланын оң жагын алуу үчүн, векторлордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн координаттык аныктамасын, косинустун жана синустун аныктамасына ылайык B жана C чекиттеринин координаттары B(Rcosα, Rsinα) жана C(Rcosβ, Rsinβ) экендигин эске алуу менен, пайдалануу жетиштүү. Натыйжада, төмөнкүдөй барабардык келип чыгат. $\overline{OB}*\overline{OC}=R^2*(\cos\alpha*\cos\beta+\sin\alpha*\sin\beta)$ (*$_2$)

Эми (*$_1$) жана (*$_2$) барабардыктарынын сол жактары барабар болгондуктан, оң жактары да барабар боло турганын эске алуу менен, келип чыккан туюнтманы теңдеш өзгөртүп түзүү аркылуу, далилдөөнү талап кылган (1) барабардыкка келебиз.

Эми далилдөөнүн экинчи учурунун блок-схемасын келтирели. Мындай схеманы түзүүнү чакан топтордун бирине сунуштоого болот.



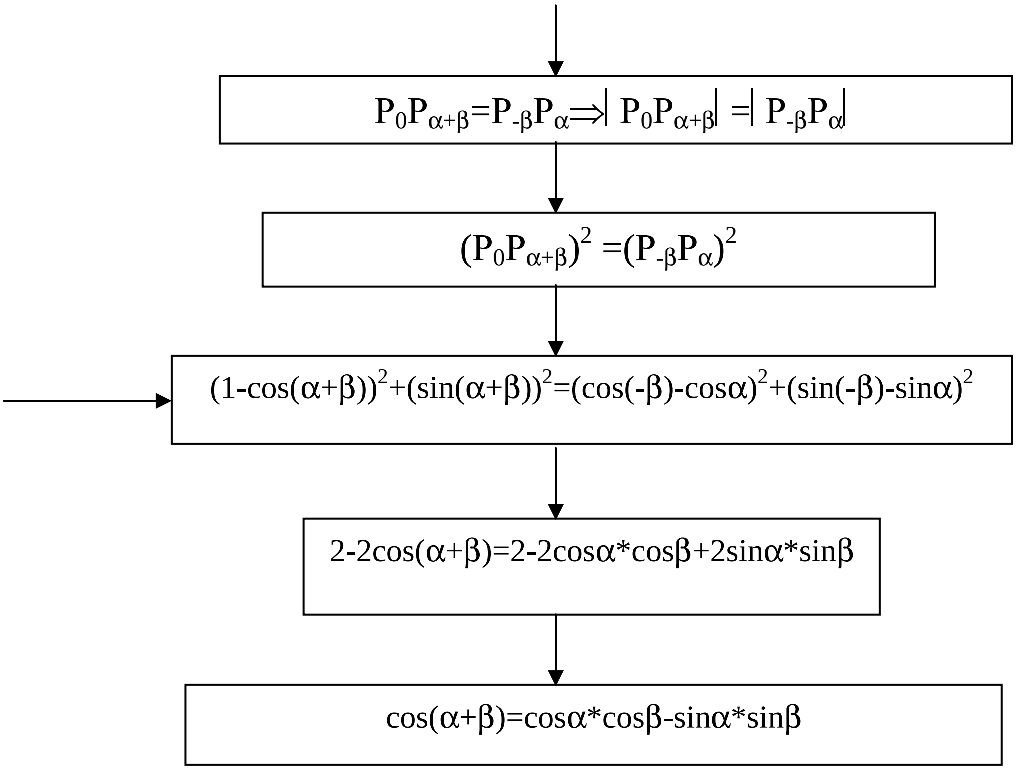
$\forall\alpha,\beta$ (α,β-радиандык ченде берилген бурчтар)

$R_0^{\alpha}(P_0)=P_{\alpha}$, $R_0^{-\beta}(P_0)=P_{-\beta}$

$R_0^{\alpha+\beta}(P_0)=P_{\alpha+\beta}$

$P_0(1;0)$, $P_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $P_{-\beta}(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$

$P_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$



$$P_0P_{\alpha+\beta}=P_{-\beta}P_{\alpha}\Rightarrow|P_0P_{\alpha+\beta}|=|P_{-\beta}P_{\alpha}|$$

$$(P_0P_{\alpha+\beta})^2=(P_{-\beta}P_{\alpha})^2$$

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2$$

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha*\cos\beta+2\sin\alpha*\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha*\cos\beta-\sin\alpha*\sin\beta$$

Эки бурчтун суммасынын косинусунун бул формуласынан аргументтердин айырмасынын косинусунун формуласын оңой эле алууга боло турганын белгилейли. Ошондуктан бул ишти кошумча түрдө өз алдынча аткарууга берилген тапшырма катарында окуучуларга сунуштоого болот. Акыркы формуладагы βны $-\beta$ га алмаштырып, косинус менен синустун жуп, тактык касиеттерине таянуу менен, төмөндөгүдөй эки бурчтун айырмасынын косинусун туюнта турган теңдештикке ээ болобуз:

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha*\cos(-\beta)-\sin\alpha*\sin(-\beta)\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha*\cos\beta+\sin\alpha*\sin\beta$.

Ал эми биринчи учурда келтирилген далилдөөнүн планын түзүүнү окуучулардын бир чакан тобуна сунуш кылууга болот. Мында өркүндөтүлбөгөн анализ колдонулуп жатканын белгилеп кетели.

1. OX огунун оъ багыты менен α жана β бурчтарын түзө турган, $\overline{i_1}$ жана $\overline{i_2}$ бирдик векторлорун координата системасында түзүү.
2. $\overline{i_1}$ жана $\overline{i_2}$ векторлорунун арасындагы бурч $\alpha-\beta$ га барабар экендигин негиздеп көрсөтүү.
3. Эки вектордун скалярдык көбөйтүндүсүнүн касиетин колдонуп $i_1*i_2=1*1*\cos(\alpha-\beta)$ барабардыгын негиздеп жазуу.
4. Геометрия курсунан белгилүү болгон $\overline{a}*\overline{в}=x_1*x_2+y_1*y_2$, (мында x_1 жана y_1 сандары а векторунун, ал эми x_2 жана y_2 -$в_2$ векторунун координаталары) формуланы колдонуу менен, ошондой эле $\overline{i_1}$ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overline{i_2}$ $(\cos\beta, \sin\beta)$ экендигин эске алып, $\overline{i_1} * \overline{i_2}$ $=\cos\alpha*\cos\beta+\sin\alpha*\sin\beta$ формуласын негиздеп жазуу.
5. Үчүнчү жана төртүнчү кадамдардагы барабардыктарды салыштыруу менен барабардык катышынын транзитивдик касиетине ылайык, далилдөөнү талап кылган (1) формуланы негиздеп жазуу.

Кошуунун формулалары математиканын башка тармактарында да кеңири колдоно турганын белгилейли. Маселен, $y=k_1x+в_1$, $y= k_2x+в_2$ теңдемелери менен берилген L_1 жана L_2 түз сызыктарынын арасындагы бурчтун $k_1=tg\alpha_1$, $k_2=tg\alpha_2$ (мында k_1 жана k_2 бурч коэффициенттер) жана үч бурчтуктун бурчунун касиетин эске алуу менен эки бурчтун айырмасынын тангенсинин формуласын пайдаланып, төмөнкүдөй формула боюнча эсептөөгө болот. $tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 * tg\alpha_2}$ бул формуладан $tg\alpha_1*tg\alpha_2=1$ б.а. k_2-k_1=-1 болсо L_1 жана L_2 түз сызыктары перпендикуляр, ал эми $tg\alpha_2=tg\alpha_1$ б.а. $k_2=k_1$ шарты аткарылса, алар параллель боло тургандыгы жөнүндөгү корутундуларды чыгарууга болот.

Бул сыяктуу окуу материалдарынын үстүнөн окуучулардын өз алдынча иштерин, маселен, эки бөлүктүү күндөлүк түрүндө уюштурууга болот.

Ушундай эле ар түрдүү вариантта берилген далилдөөлөрдүн үстүнөн жүргүзүлгөн окуучулардын өз алдынча таанып-билүү ишмердүүлүгүн келтирүүнүн формулаларын окуп үйрөнүүдө да жүргүзүү максатка ылайыктуу экендигин белгилейли.

Жыйынтыктап айтканда, айрыкча, кайталоого жана бышыктоого арналган сабактарда интерактивдүү ыкмаларды оптималдуу тандап алуу менен окуучулардын билимдеринен аң-сезимдүү жана бекем болушуна жетишүүгө болот.

Адабияттар:

1. Бекбоев И.Б. Инсанга багыттап окутуу технологиясынын теориялык жана практикалык маселелери. -Б.: Педагогика, 2003.

2. Бекбоев И.Б. ж.б Жалпы билим берүүчү мектептер үчүн программа. Математика 5-11-кл. - Б.: Педагогика, 2007.

Иманалиев М. ж.б. Алгебра: Орто мектептин 9-кл. үчүн окуу китеби. -Б.: Педагогика, 2009.