УДК 531.3, 621.743

КОЛЕБАНИЯ ОСНАЩЕННОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ЕГО ТОРЕЦ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

В.Э. Еремьянц, И.С. Дроздова

Решена задача о колебаниях оснащенного стержня с распределенными параметрами для случая, когда один конец стержня опирается на жесткую опору, а на другой конец действует ударный импульс прямоугольной формы. Найдены функции, описывающие изменение перемещений и усилий от времени в различных сечениях стержня.

Ключевые слова: оснащенный стержень; ударный импульс; колебания сечений; усилия; напряжения.

Одним из эффективных способов отделения отливок от литниковых стержней при точном литье по выплавляемым моделям является виброударный способ, суть которого заключается в следующем. Литейный блок устанавливается на опору (рисунок 1 а) и по его центральному литниковому стержню 1 наносится удар. При этом в стержне генерируются продольные волны деформаций, которые перемещают его сечения и возбуждают колебания отливок 2, связанных со стержнем питателями 3. При колебаниях в питателях возникают знакопеременные напряжения, приводящие к их разрушению и отделению отливок от стержня. Для того чтобы на отливках не оставалось остатков питателей, на питателях вблизи отливки делают концентратор напряжений в виде надреза. Разрушение питателя происходит по сечению с концентратором напряжений.

Совершенствование процесса виброударного отделения отливок предполагает исследование ударных процессов в оснащенных стержнях, под которыми понимаются стержни, связанные упругими элементами с сосредоточенными массами, равномерно распределенными по длине стержня.

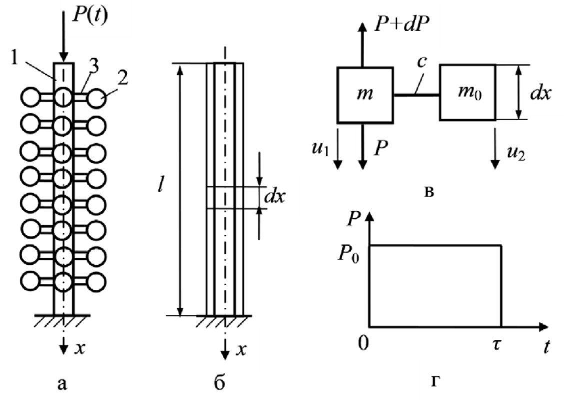

Рисунок 1

В работе [1] предложена модель оснащенного стержня с распределенными параметрами и решена задача об ударе оснащенным стержнем по жесткой преграде. В настоящей статье решается задача, более близкая к практике. Это задача о колебаниях оснащенного стержня, опирающегося на жесткую опору, при действии на его свободный торец ударного импульса прямоугольной формы.

В модели центральный стержень представлялся как упругое тело, к которому по всей длине с помощью упругих связей присоединены элементарные жесткие массы m_0, не связанные друг с другом (рисунок 1 б, в).

Перемещения сечений стержня обозначали через $u_1(x, t)$, а перемещения сосредоточенных масс – через $u_2(x, t)$, где x – координата сечения, отсчитываемая от верхнего конца стержня. В стержне выделяли элементарный участок длиной dx с массой mdx (рисунок 1 в), где m – погонная масса самого стержня. Этот участок связан с сосредоточенной массой величиной m_0dx упругим элементом с жесткостью cdx, где m_0 – величина сосредоточенных масс, приходящихся на единицу длины стержня; c – жесткость всех упругих связей, расположенных на единичной длине стержня.

Если масса самого стержня m_1, величина одной сосредоточенной массы m_2, а жесткость одной упругой связи сосредоточенной массы со стержнем c_0, то параметры модели связаны с параметрами оснащенного стержня соотношениями

$$m = m_1 / l = \rho S,\ m_0 = nm_2/l,\ c = nc_0/l,$$

где ρ – плотность материала стержня; S – площадь поперечного сечения стержня; l – длина стержня; n – количество сосредоточенных масс; c_0 – коэффициент жесткости упругой связи одной сосредоточенной массы со стержнем (коэффициент жесткости одного питателя).

Уравнения движения такой модели имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + k^2 \left(u_1 - u_2\right) - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + k_0^2 \left(u_1 - u_2\right) = 0, \qquad (2)$$

где E – модуль упругости материала стержня; a – скорость распространения волны деформации в гладком упругом стержне

$$a = \sqrt{E/\rho}, \quad k^2 = c/m, \quad k_0^2 = c/m_0.$$

Выразив из уравнения (1):

$$u_2 = u_1 - \frac{a^2}{k^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \qquad (3)$$

и подставив в уравнение (2), можно получить уравнение движения, содержащее только одну неизвестную $u_1(x, t)$

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - a^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \left(k_0^2 + k^2\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - k_0^2 a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0. \qquad (4)$$

Допустим, что на свободный торец оснащенного стержня, опирающегося на жесткую опору, действует ударный импульс прямоугольной формы (рисунок 1 г), описываемый функцией

$$P(0, t) = P_0, \; 0 < t < \tau;$$
$$P(0, t) = 0, \; \tau < t.$$

Для решения задачи о вынужденных колебаниях стержня под действием этой силы воспользуемся методом главных координат, разложив движение сечений стержня по собственным формам и частотам.

При нахождении собственных форм и частот примем, что решение уравнения (4) при свободных колебаниях имеет вид

$$u_1(x, t) = X(x) \cos(pt + \varphi), \qquad (5)$$

где $X(x)$ – амплитудная функция, зависящая от координаты x и не зависящая от времени; $\cos(pt+\varphi)$ – главная координата, зависящая только от времени.

Подставляя решение (5) в уравнение (4) и сокращая все члены на $\cos(pt + \varphi)$, приведем его к виду

$$X'' + \beta^2 X = 0, \qquad (6)$$

где

$$X'' = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad \beta^2 = \frac{p^2}{a^2}\left(1 - \frac{k^2}{p^2 - k_0^2}\right). \qquad (7)$$

Решением этого уравнения является функция

$$X(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x, \qquad (8)$$

где A и B постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

При свободном верхнем торце стержня и жесткой опоре нижнего торца граничные условия запишутся в виде

$$X'(0) = 0, \; X(l) = 0. \qquad (9)$$

Подставляя в эти условия решение (8), найдем: $A = 0$, $B \cos \beta l = 0$. Так как $B \neq 0$, то граничные условия выполняются при следующих значениях β:

$$\beta_s = (2s - 1)\,\pi/2l, \; s = 1, 2, 3.... \qquad (10)$$

При известном значении β_s собственные частоты колебаний стержня находятся из выражения (7) как

$$p_s = \sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2\beta_s^2 + k_0^2 + k^2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(a^2\beta_s^2 + k_0^2 + k^2\right)^2 - a^2\beta_s^2 k_0^2}}. \qquad (11)$$

Из полученной формулы видно, что в данном случае существуют два спектра собственных частот. Нижний спектр p_{s1}, соответствующий знаку минус в выражении (11) и верхний спектр p_{s2}, соответствующий знаку плюс.

В работе [1] показано, что верхний спектр частот определяется в основном собственными колебаниями центрального стержня, а нижний спектр – собственными колебаниями сосредоточенных масс относительно центрального стержня.

Формы колебаний определятся как

$$X_{s1}(x) = B_{s1} \cos \beta_s x, \;\; X_{s2}(x) = B_{s2} \cos \beta_s x.$$

В безразмерном виде они описываются одинаковой функцией:

$$X_{s1}(x) = X_{s2}(x) = X_s(x) = \cos \beta_s x. \qquad (12)$$

Частное решение уравнения движения (4) для функции $u_1(x, t)$ при свободных колебаниях стержня запишется в виде

$$u_{1s}(x, t) = \cos \beta_s x \,[B_{s1} \cos(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + B_{s2} \cos(p_{s2} t + \varphi_{s2})]. \qquad (13)$$

Подставляя это решение в соотношение (3), получим частное решение при свободных колебаниях стержня для функции $u_2(x, t)$:

$$u_{2s}(x, t) = \cos \beta_s x \,[B_{s1}\lambda_{s1} \cos(p_{s1} t + \varphi_{s1}) + B_{s2}\lambda_{s2} \cos(p_{s2} t + \varphi_{s2})], \qquad (14)$$

где

$$\lambda_{s1} = 1 + \frac{a^2\beta_s^2 - p_{s1}^2}{k^2}, \quad \lambda_{s2} = 1 + \frac{a^2\beta_s^2 - p_{s2}^2}{k^2}. \qquad (15)$$

При вынужденных колебаниях стержня под действием внезапно приложенной силы P примем, что решения уравнения движения (4) на интервале времени $0 < t < \tau$ имеют вид

$$u_1(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} X_s(x)\left[q_{1s1}(t) + q_{1s2}(t)\right], \qquad (16)$$

$$u_2(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} X_s(x)\left[\lambda_{s1} q_{1s1}(t) + \lambda_{s2} q_{1s2}(t)\right], \qquad (17)$$

где $X_s(x)$ – амплитудная функция или форма колебаний, которая имеет вид (12); q_{1s1}, q_{1s2} – главные координаты, соответствующие нижнему и верхнему спектрам собственных частот.

Главные координаты находятся из дифференциального уравнения

$$\ddot{q}_s + p_s^2 q_s = \frac{Q_s}{M_s}, \qquad (18)$$

где Q_s – обобщенная сила, равная сумме работ всех внешних сил при данной форме колебаний на перемещениях точек их приложения; M_s – обобщенная масса:

$$M_s = \int_0^l (m+m_0) X_s^2(x)dx. \qquad (19)$$

В рассматриваемом случае на интервале времени $0 < t < \tau$

$$Q_s = P_0 X_s(0) = P_0, \quad M_s = (m+m_0)\int_0^l \cos^2\beta_s x\, dx = (m+m_0)l/2,$$

и уравнение (18) для нижнего и верхнего спектров частот запишется так:

$$\ddot{q}_{1s1} + p_{s1}^2 q_{1s1} = \frac{2P_0}{(m+m_0)l}, \quad \ddot{q}_{1s2} + p_{s2}^2 q_{1s2} = \frac{2P_0}{(m+m_0)l}. \qquad (20)$$

Решениями этих уравнений являются функции

$$q_{1s1}(t) = B_{s1}\cos(p_{s1}t+\varphi_{s1}) + \frac{2P_0}{p_{s1}^2(m+m_0)l}, \qquad (21)$$

$$q_{1s2}(t) = B_{s2}\cos(p_{s2}t+\varphi_{s2}) + \frac{2P_0}{p_{s2}^2(m+m_0)l}. \qquad (22)$$

Постоянные коэффициенты B_{s1}, B_{s2}, φ_{s1}, φ_{s2} находятся из начальных условий. Примем, что в начальный момент времени перемещения и скорости сечений оснащенного стержня равны нулю, т. е.

$$u_1(0) = u_2(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0.$$

В системах с распределенными параметрами главные координаты связаны с физическими координатами соотношениями

$$q_s(t) = \frac{1}{M_s}\int_0^l (m+m_0) X_s(x) u(t) dx,$$

$$\dot{q}_s(t) = \frac{1}{M_s}\int_0^l (m+m_0) X_s(x) \dot{u}(t) dx,$$

из которых при принятых начальных условиях, следует:

$$q_{1s1}(0) = 0, \quad q_{1s2}(0) = 0, \quad \dot{q}_{1s1}(0) = 0, \quad \dot{q}_{1s2}(0) = 0.$$

Подставляя в эти соотношения решения (21), (22), получим систему уравнений:

$$B_{s1}\cos\varphi_{s1} + \frac{2P_0}{p_{s1}^2(m+m_0)l} = 0,$$

$$B_{s2}\cos\varphi_{s2} + \frac{2P_0}{p_{s2}^2(m+m_0)l} = 0,$$

$$B_{s1}p_{s1}\sin\varphi_{s1} = 0, \qquad B_{s2}p_{s2}\sin\varphi_{s2} = 0.$$

Так как B_{s1} и B_{s2} не равны нулю, то из двух последних выражений следует: $\varphi_{s1} = 0$, $\varphi_{s2} = 0$, а из первых двух выражений

$$B_{s1} = -\frac{2P_0}{p_{s1}^2(m+m_0)l}, \quad B_{s2} = -\frac{2P_0}{p_{s2}^2(m+m_0)l}.$$

С учетом этого главные координаты (21), (22) запишутся в виде

$$q_{1s1}(t) = \frac{2P_0}{p_{s1}^2(m+m_0)l}(1-\cos p_{s1}t), \qquad (23)$$

$$q_{s2}(t) = \frac{2P_0}{p_{s2}^2(m+m_0)l}(1-\cos p_{s2}t). \qquad (24)$$

а функции перемещений (16), (17) примут вид

$$u_1(x,t) = \frac{2P_0}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\beta_s x}{p_{s1}^2}\left[1-\cos p_{s1}t + \frac{p_{s1}^2}{p_{s2}^2}(1-\cos p_{s2}t)\right], \quad (25)$$

$$u_2(x,t) = \frac{2P_0}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda_{s1}}{p_{s1}^2}\cos\beta_s x\left[1-\cos p_{s1}t + \frac{\lambda_{s2}p_{s1}^2}{\lambda_{s1}p_{s2}^2}(1-\cos p_{s2}t)\right].$$

При этом усилия в упругих связях F_y и сечениях центрального стержня P_c определятся как

$$F_y(x,t) = c_0\left[u_1(x,t) - u_2(x,t)\right], \qquad P_c(x,t) = ma^2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (26)$$

После подстановки в эти выражения функций (25), окончательно получим:

$$F_y(x,t) = \frac{2P_0c_0}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\cos\beta_s x\left[\frac{(1-\lambda_{s1})}{p_{s1}^2}(1-\cos p_{s1}t) + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\lambda_{s2})}{p_{s2}^2}(1-\cos p_{s2}t)\right], \qquad (27)$$

$$P_c(x,t) = -\frac{2P_0ma^2}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\beta_s}{p_{s1}^2}\sin\beta_s x \times$$

$$\times\left[1-\cos p_{s1}t + \frac{p_{s1}^2}{p_{s2}^2}(1-\cos p_{s2}t)\right]. \qquad (28)$$

Знак минус перед правой частью последнего равенства показывает, что в сечениях стержня действуют усилия сжатия.

С учетом полученных формул напряжения в упругих связях сосредоточенных масс со стержнем σ_y и напряжения в сечениях центрального стержня σ_c определятся как

$$\sigma_y(x,t) = \frac{F_y R}{W}, \qquad \sigma_c(x,t) = \frac{P_c}{S}, \qquad (29)$$

где R – расстояние от центра тяжести сосредоточенной массы до рассматриваемого сечения в упругой связи; W – момент сопротивления изгибу рассматриваемого сечения; S – площадь поперечного сечения центрального стержня.

Полученное решение справедливо для интервала времени $0 < t < \tau$, пока на стержень действует внешняя сила P_0. При $t > \tau$ стержень совершает свободные колебания с начальными условиями, определяемыми из формул (25) при $t = \tau$.

Поскольку по окончании действия силы P_0 граничные условия не меняются до тех пор, пока в сечении $x = l$ не появятся растягивающие силы, свидетельствующие об отходе стержня от опоры, решения уравнений движения при свободных колебаниях стержня будут иметь вид (13), (14). При этом главные координаты будут описываться выражениями

$$q_{2s1}(t) = B_{s1}\cos(p_{s1}t+\varphi_{s1}), \quad q_{2s2}(t) = B_{s2}\cos(p_{s2}t+\varphi_{s2}). \quad (30)$$

Таблица 1 – Значения параметра β_s, собственных частот p_{s1} и p_{s2} и отношений их квадратов для первых восьми форм колебаний

s	1	2	3	4	5	6	7	8
βs, м$^{-1}$	4,245	12,736	21,227	29,718	38,208	46,699	55,190	63,675
$p_{s1}\cdot 10^{-4}$, с$^{-1}$	0,902	1,021	1,030	1,033	1,0342	1,0348	1,0350	1,0352
$p_{s2}\cdot 10^{-4}$, с$^{-1}$	2,502	6,637	10, 958	15,302	19,652	24,007	28,363	32,720
λ_{s1}	4,145	34,342	95,086	232,80	307,72	459,62	641,90	854,39
λ_{s2}	–0,205	–0,023	–0,013	–0,023	–0,012	–0,042	–0,045	–0,204
p^2_{s1}/p^2_{s2}	0,130	0,0237	0,0088	0,0046	0,0028	0,0019	0,0013	0,0010

Постоянные величины B и φ, входящие в эти выражения, определятся из начальных условий. Введем новую переменную времени $t^* = t - \tau$ и запишем начальные условия в виде

$$q_{2s1}(0)+q_{2s2}(0)=q_{1s1}(\tau)+q_{1s2}(\tau),$$
$$\dot q_{2s1}(0)+\dot q_{2s2}(0)=\dot q_{1s1}(\tau)+\dot q_{1s2}(\tau),$$
$$\lambda_{s1}q_{2s1}(0)+\lambda_{s2}q_{2s2}(0)=\lambda_{s1}q_{2s1}(\tau)+\lambda_{s1}q_{2s2}(\tau),$$
$$\lambda_{s1}\dot q_{2s1}(0)+\lambda_{s2}\dot q_{2s2}(0)=\lambda_{s1}\dot q_{2s1}(\tau)+\lambda_{s1}\dot q_{2s2}(\tau).$$

После подстановки в эти условия выражений (23), (24), (30), получим систему уравнений, из которой найдем:

$$B_{s1}=\frac{2P_0}{(m+m_0)lp_{s1}^2}\sin\left(\frac{p_{s1}\tau}{2}\right),$$
$$B_{s2}=\frac{2P_0}{(m+m_0)lp_{s2}^2}\sin\left(\frac{p_{s2}\tau}{2}\right),$$
$$\varphi_{s1}=\frac{\pi}{2}-\frac{p_{s1}\tau}{2},\quad \varphi_{s2}=\frac{\pi}{2}-\frac{p_{s2}\tau}{2}.$$

С учетом этих постоянных главные координаты определятся как

$$q_{2s1}=\frac{2P_0}{(m+m_0)lp_{s1}^2}\left[\cos p_{s1}(t-\tau)-\cos p_{s1}t\right], \qquad (31)$$
$$q_{2s2}=\frac{2P_0}{(m+m_0)lp_{s2}^2}\left[\cos p_{s2}(t-\tau)-\cos p_{s2}t\right], \qquad (32)$$

а функции перемещений и усилий на интервале времени $\tau < t < T$, где T – момент времени, соответствующий отскоку стержня от опоры, будут иметь вид

$$u_1(x,t)=\frac{2P_0}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\cos\beta_s x\left[\frac{1}{p_{s1}^2}\left[\cos p_{s1}(t-\tau)-\cos p_{s1}t\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{p_{s2}^2}\left[\cos p_{s2}(t-\tau)-\cos p_{s2}t\right]\right], \qquad (33)$$
$$u_2(x,t)=\frac{2P_0}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\cos\beta_s x\left[\frac{\lambda_{s1}}{p_{s1}^2}\left[\cos p_{s1}(t-\tau)-\cos p_{s1}t\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_{s2}}{p_{s2}^2}\left[\cos p_{s2}(t-\tau)-\cos p_{s2}t\right]\right], \qquad (34)$$
$$F_y(x,t)=\frac{2P_0c_0}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\cos\beta_s x\left[\frac{1-\lambda_{s1}}{p_{s1}^2}\left[\cos p_{s1}(t-\tau)-\cos p_{s1}t\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\lambda_{s2}}{p_{s2}^2}\left[\cos p_{s2}(t-\tau)-\cos p_{s2}t\right]\right], \qquad (35)$$
$$P_c(x,t)=-\frac{2P_0ma^2}{(m+m_0)l}\sum_{s=1}^{\infty}\beta_s\sin\beta_s x\left[\frac{1}{p_{s1}^2}\left[\cos p_{s1}(t-\tau)-\cos p_{s1}t\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{p_{s2}^2}\left[\cos p_{s2}(t-\tau)-\cos p_{s2}t\right]\right]. \qquad (36)$$

При этом напряжения в упругих связях и в сечениях стержня по-прежнему находятся по формулам (29).

В качестве примера рассмотрим оснащенный стержень со следующими параметрами [1]: m = 8,898 кг/м, m_0 = 10,378 кг/м, l = 0,37 м, a = 5135 м/с, c = 1,114·10^9 Н/м, c_0 = 6,438·10^6 Н/м, k = 1,1187·10^{4}с$^{-1}$, k_0 = 1,0359·10^{4}с$^{-1}$.

Из данных таблицы 1 видно, что частота, а следовательно, и форма гармоник нижнего спектра меняется незначительно. По сути это одна гармоника, связанная с колебаниями сосредоточенных масс относительно стержня. Поэтому при расчетах в разложениях функций перемещений и сил гармонику с низшей частотой необходимо учитывать только один раз при s =1.

На рисунке 2 приведены первые пять форм колебаний рассматриваемого стержня с гармониками высшего спектра (номера кривых соответствуют номерам форм), а на рисунке 3 сумма первых пяти (кривая 1) и первых десяти (кривая 2) форм.

На этих рисунках видно, что в основном характер колебаний определяется первыми пятью формами. Последующие формы уточняют этот характер только вблизи верхнего торца стержня, на котором, строго говоря, усилие должно быть равно P_0. Расчеты показывают, для того чтобы усилие в стержне было равно P_0 на расстоянии менее 5 мм от верхнего торца необходимо удержать в разложении более 40 гармоник.

В этом заключается один из недостатков метода разложения вынужденных колебаний по собственным формам и частотам. Он дает медленно

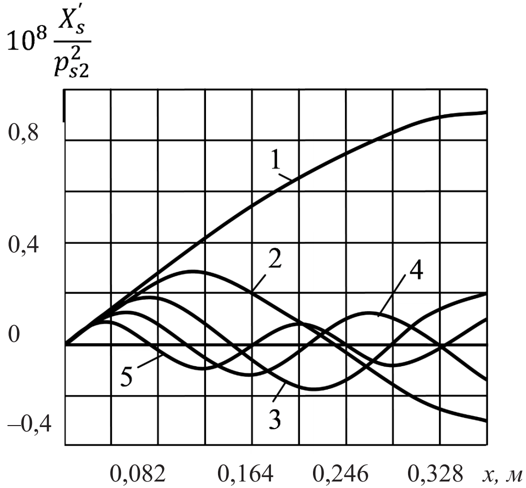

Рисунок 2

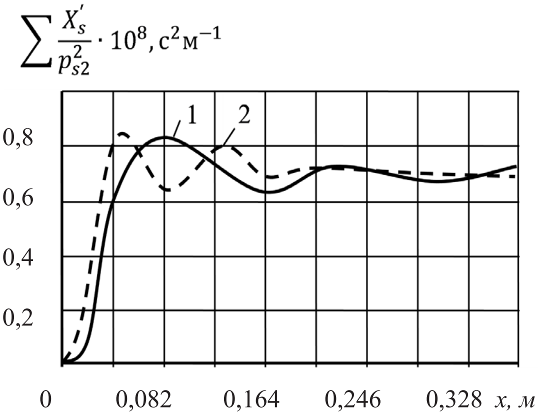

Рисунок 3

сходящиеся ряды при резком изменении внешних сил. Тем не менее, полученные в данной работе соотношения позволяют проводить анализ влияния различных факторов на колебания и прочность оснащенных стержней при импульсных нагрузках.

Литература

1. *Еремьянц В.Э.* Модель оснащенного стержня с распределенными параметрами / В.Э. Еремьянц, И.С. Дроздова // Современные проблемы механики сплошной среды. Вып. 16. Бишкек: НАН КР, 2012. С. 285–290.
2. *Еремьянц В.Э.* Расчет собственных форм и частот колебаний оснащенного стержня, описываемого различными моделями / В.Э. Еремьянц, И.С. Дроздова, Г.М. Муктарбекова // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. межд. научн. конф. Бишкек: НАН КР, 2012. С. 374–378.