УДК 517.947.537

Тогочуев А.Ж., Сагынтай кызы Н., Нурлан кызы Э.

ИГУ им. К.Тыныстанова

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ.

В данной работе доказывается гладкость решений нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля на бесконечном интервале, используя результаты работы [1].

In this work the smoothness of the solutions of the nonlinear Shturm-Liuwill equation on the nonterminating interval is being proved by using the results of the work [1].

Рассмотим нелинейное уравнение

$$Lu = -\rho(x)(\rho(x)\cdot U(x))'' + q(x,u)U(x) = f(x), \qquad (1)$$

$$f(x) \in L_2(R),\ R = (-\infty,\infty)$$

Определение. Функция $U(x) \in L_2(R)$ называется слабым решением уравнения (1), если существует последовательность

$$\{U_n\} \subset W_2^1(R) \cap W_2^2{}_{,loc}(R) \qquad ,$$

такая, что

$$\|U_n - U\|_{L_{2,loc}(R)} \to 0,\ \|LU_n - f\|_{L_{2,\,loc}(R)} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Существование слабого решения уравнения (1) в $R = (-\infty,\infty)$ была доказана в работе [1].

В данной работе мы будем изучать гладкость решения уравнения (1) по всей числовой оси $R = (-\infty,\infty)$.

В дальнейшем нам понадобится еще одно определение:

Определение. Линейный оператор

$$LU = -\rho(\rho U)'' + q(x)U$$

называется разделимым, если из того что $U \in D(U)$ следует, что

$$\rho(\rho U)'' \in L_2(R),$$

где $D(U)$ область определения оператора L.

Основным результатом этой работы является следующая теорема:

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

а) $q(x,u) \geq w > 0$ и непрерывна по совокупности переменных в R^2;

б) $\rho(x) \geq \delta > 0, \quad \rho(x) \in C_{loc}(R);$

в) $\inf\limits_{x\in R} \inf\limits_{|c|\leq A} \left\{\rho^{-2}(x) \cdot q(x,c)\right\} > 0;$

г) $\sup\limits_{|x-y|\leq K(y)\frac{\rho(x)}{\sqrt{q(y,C_2)}}} \sup\limits_{|c_1-c_2|\leq A} \left\{\frac{\rho(x)}{\rho(y)}, \frac{q(x,c_1)}{q(y,c_2)}\right\} \leq F(A) < \infty,$

где *K(y)* ≥ 4, непрерывная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $|y| \to +\infty$, А – конечная величина и $|c| \leq A$, $F(A)$ - непрерывная функция.

Тогда для любой $f \in L_2(R)$ существует решение $U(x)$ уравнения (1), такое что

$$\rho(\rho U)'' \in L_2(R).$$

Доказательство. При любой $f \in L_2(R)$ существует слабое решение уравнения (1) [1].

Пусть $U_0(x)$ решение уравнения (1) с правой частью $f_0 \in L_2(R)$. Тогда при $U_0 \in C_0^\infty(R)$ имеем

$$(LU_0, U_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\rho U_0)'' U_0 dx + \int_{-\infty}^{\infty} q(x, U_0) U_0^2 dx$$

Интегрируя первый интеграл по частям, получим

$$(LU_0, U_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\rho U_0)'' U_0 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(x,U_0)}{\rho^2(x)} |\rho U_0|^2 dx \qquad (2)$$

Применяя неравенство Коши с $\varepsilon = 1$ к левой части имеем:

$$(LU_0,U_0)\le\frac{1}{2}\|LU_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|U_0\|_2^2 \tag{3}$$

Не нарушая общности из условия а) теоремы можно полагать, что $q(x,U_0)\ge 1$.

Поэтому

$$\|U_0\|_2^2=\int_{-\infty}^{\infty}|U_0|^2dx\le\int_{-\infty}^{\infty}q(x,U_0)|U_0|^2dx\le\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(x,U_0)}{\rho^2(x)}|\rho U_0|^2dx..$$

Тогда неравенство (3) принимает вид:

$$(LU_0,U_0)\le\frac{1}{2}\|LU_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|U_0\|_2^2\le\frac{1}{2}\|f_0\|_2^2+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(x,U_0)}{\rho^2(x)}|\rho U_0|^2dx.. \tag{4}$$

Из (2), (4) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(\rho U_0)'\right|^2dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(x,U_0)}{\rho^2(x)}|\rho U_0|^2\le\frac{1}{2}\|f_0\|_2^2+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(x,U_0)}{\rho^2(x)}|\rho U_0|^2dx..$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(\rho U_0)'\right|^2dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(x,U_0)}{\rho^2(x)}|\rho U_0|^2dx\le\frac{1}{2}\|f_0\|_2^2..$$

Учитывая $\rho^{-2}(x)\cdot q(x,U_0)\ge 1$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(\rho U_0)'\right|^2dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|\rho U_0|^2\le\frac{1}{2}\|f_0\|^2$$

$$\text{или }\int_{-\infty}^{\infty}\left|(\rho U_0)'\right|^2dx\le\|f_0\|.$$

Тогда $\|(\rho U_0)\|_{W_2^1(R)}\le\|f_0\|_2$.

Следовательно, по теореме вложения Соболева

$$\rho U_0\in C(R)\text{ и }\|\rho U_0\|_{C(R)}\le C_0\|f_0\|_2,$$

так как $\rho(x) \geq \delta > 0$, то

$$\|U_0\|_{C(R)} \leq \frac{C_0}{\delta}\|f_0\|_2 \qquad (5)$$

и согласно условию а) $q(x, U_0(x)) \in C_{loc}(R)$.

Далее положим $\tilde{q}(x) = q(x, U_0(x))$ и обозначим через $\tilde{L}$ замыкание в норме $L_2(R)$ оператора, заданного на $C_0^\infty(R)$ равенством

$$\tilde{L}U = -\rho(\rho U)'' + \tilde{q}(x)U .$$

Для оператора $\tilde{L}$ справедлива лемма:

Лемма. Пусть выполнены условия а), б), в), г) теоремы. Тогда оператор $\tilde{L}$ самосопряжен и положительно определен.

Доказательство. Положительная определенность $\tilde{L}$ следует из условия а) теоремы. Самосопряженность оператора $\tilde{L}$ вытекает из теоремы 1.1.2 работы [2].

В силу этой леммы уравнение

$$\tilde{L}U = -\rho(\rho U)'' + \tilde{q}(x) \cdot U = f(x)$$

имеет единственное решение, которое совпадает с $U_0(x)$.

Теперь полагая, $U_0(x) = c_1, U_0(y) = c_2$ и $A = 2 \cdot \frac{C_0}{\delta}\|f\|_2$ из (5) получим:

$$|c_1 - c_2| \leq A.$$

Отсюда в силу условий а) - г) теоремы для оператора $\tilde{L}$ выполнены все условия вышеупомянутой теоремы из работы [2].

Следовательно, оператор $\tilde{L}$ разделим, то есть

$$\rho(\rho U)'' \in L_2(R).$$

Теорема доказана.

Литература:

1. Тогочуев А.Ж., Бектемиров М.А., Сагынтай кызы Н. О существовании

решений одного нелинейного эллиптического уравнения.// Вестник ИГУ.- Каракол, № 31, 2012.

2. Тогочуев А.Ж. Разделимость дифференциальных операторов нечетного порядка в неограниченной области. Канд. дисс., …Бишкек, 1993. - 94 с.