УДК 378.016:57+57.08:51

Шарипов С., Шарипов К.С.

ИГУ им. К.Тыныстанова

Шарипов К.С.

Каз. НУ им. Аль-Фараби, Республика Казахстан.

ПЛАНОВАЯ БИОЛОГИЧЕСКАЯ СТУПЕНЧАТАЯ ПОПУЛЯЦИЯ

Здесь, нами впервые, на отрезках времени на основании теории исправленных производных [1-2] начато создание теории плановой ступенчатой биологической популяции с лимитами и без лимита. Полученные формулы, выводы и рекомендации можно использовать также в решении теоретико-практических задач физики, биологии и т.д.

Модель популяции экспоненциального роста

Как известно, Т.Мальтусом был сделан первый шаг к исследованию задачи о динамике роста популяции, которая является одной из главных задач в теории математико-биологической популяции [3].

На отрезке времени $[\![t_0,\infty]\!]$ математическая модель популяции была предложена Т.Мальтусом (в 1798 г.), она имеет вид

$$y' = \mu y, \qquad t \in [\![t_0,\infty]\!] \qquad (1)$$

Но, к великому сожалению, модель популяции по Т.Мальтусу как задача Коши

$$y' = \mu y, \qquad t \in [\![t_0,\infty]\!] \qquad (2)$$

начальный уровень популяции

$$y(t_0) = y_0 \qquad (3)$$

была обречена на неудачу как экспоненциальный рост и разочаровал многих.

На протяжении более 200 лет (1798-2012) многие исследователи в задаче популяции остались в плену мнения экспоненциального роста, которое привело к неудаче.

Отметим, что такое мнение, приводящее к неудаче как экспоненциальный рост, является следствием отрицания изменчивости коэффициентов прироста $\mu = r - c$ и ресурсов на отрезках времени.

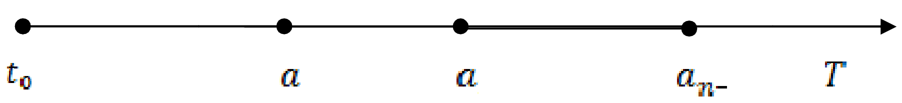
Модель плановой ступенчатой популяции на отрезках времени
$$[\![t_0,a_1]\!] \cup [\![a_1,a_2]\!] \cup \ldots \cup [\![a_{n-1},T]\!]$$

Определение. Популяция, порожденная на отрезках времени скачкообразными изменчивыми коэффициентами прироста $\mu = r - c$ и ресурсов будем называть плановой ступенчатой популяцией.

В модели популяции (1) основной проблемой является ресурс (обозначим – р), который мы вынуждены на отрезках времени усовершенствовать, имея ввиду, что он имеет сложную структуру (математика, биология, химия, физика и т.д.). Знаем, что ресурс был и остается ограниченно-достаточным.

Для эффективного использования ресурса, подсказанный правилами природы, мы должны рассматривать популяцию на отрезках времени, которые предлагаем строить так.

Берём отрезок $[\![t_0,T]\!] \subset [t_0,+\infty)$ и точками $t_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \; a_n = T$ делим отрезок $[\![t_0,T]\!]$ на n частей



Тогда имеем n отрезков

$$[\![t_0,a_1]\!]; [\![a_1,a_2]\!]; \ldots; [\![a_{n-1},T]\!] \subset [t_0,+\infty) \qquad (4)$$

Разрывные темпы прироста.

На этих отрезках времени действуют свои коэффициенты прироста и природные и искусственные ресурсы вида

$$\mu_1 = \frac{dy_1}{y_1 dt}, \quad \rho_1, \quad t \in [\![t_0, a_1]\!]$$

$$- \tag{5}$$

$$\mu_n = \frac{dy_n}{y_n dt}, \quad \rho_n, \quad t \in [\![a_{n-1}, T]\!]$$

Видно, что на каждом отрезке времени мы постараемся подсчитать количество (число) популяций. При планировании допускаем генетические и телеологические подходы.

Ограничимся рассмотрением случая, когда

$$y(t_0) = y_0,\ y(a_1) = y_1, y(a_2) = y_2, \ldots, y(T_n) = y_n\ (y(a_i - 0) = y(a_i + 0)) \tag{6}$$

В этом случае имеем функцию численности популяций

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t, \mu_1), & t \in [\![t_0, a_1]\!], \quad \rho_1 \\ y_2(t, \mu_2), & t \in [\![a_1, a_2]\!], \quad \rho_2 \\ - - - - - - - - - - - - - \\ y_n(t, \mu_n), & t \in [\![a_{n-1}, T]\!], \quad \rho_n \end{cases} \tag{7}$$

При наличии ресурсов $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ требуется найти на $[\![t_0, a_1]\!]; [\![a_1, a_2]\!]; \ldots; [\![a_{n-1}, T]\!]$ соответственно коэффициентов прироста

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \tag{8}$$

так, чтобы функция (7) удовлетворяла условиям (6).

В дальнейшем условие (6) будем называть ***планами для численности популяции***.

Алгоритм вычисления плановый ступенчатой популяции

1) Исправленная производная

Дана урчуктная непрерывная функция

$$c(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \le t \le a \\ \psi(t), & a \le t \le T \end{cases} \qquad \varphi(t), \psi(t) \in C \tag{9}$$

1. $\varphi(a - 0) = \psi(a + 0)$
2. $\varphi'(a - 0) \ne \psi'(a + 0)$

Её исправленная первая производная определяется по формуле [2]

$$isc'(A, a, t) = \begin{cases} \varphi'(t) & t_0 \le t < a \\ \varphi'(a - 0) + [\![\psi'(a + 0) - \varphi'(a - 0)]\!] A, & t = a, \\ \psi'(t) & a < t \le T \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{c(t + \lambda_2) - c(t - \lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2} = isc'(A, a, t) \tag{11}$$

Отмеченным может быть тот факт, что первая исправленная производная (10) порождает разрывную функцию первого рода.

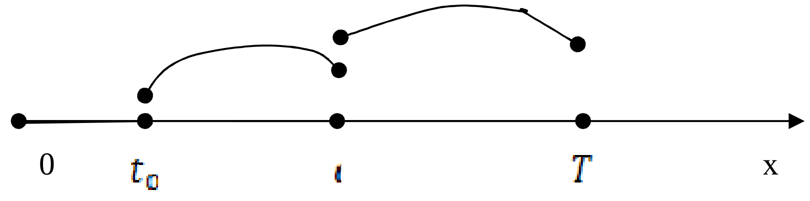


Рис.-1

Таким замечательным свойством не обладает производная по Ньютону- Лейбницу.

Из рис. 1 видно, что только и только исправленная производная (10) по идее совпадает с идеей в проблеме (5)- (6).

Теперь мы можем говорить, что уравнения (8) мы должны рассматривать в классе исправленных производных (10).

В дальнейшем будем использовать исправленную производную урчуктной функции

$$c_1(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \le t < a \\ t - a, & a < t \le T \end{cases} \tag{14}$$

которая, согласно (12), определяется формулой

$$isc_1'(A, a, t) = \begin{cases} 0, t_0 \le t < a \\ A, \quad t = a, \quad A \in [\![0,1]\!] \\ 1, a < t \le T \end{cases} \tag{15}$$

Она дает нам разрывную функцию первого рода.

2) Методы вычисления с разрывными темпами прироста

Согласно этой функции (15), на отрезке $[\![t_0, T]\!]$ изменение коэффициента прироста (8) можно представить, в частности, так

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) isc_1'(0, a_1, t) + \cdots + (\mu_n - \mu_{n-1}) isc_1'(0, a_{n-1}, t), t \in [\![t_0, T]\!] \tag{16}$$

В этом случае инновационная модель (9)-(10) представима так: [3]

$$y' = [\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1) isc_1'(0, a_1, t) + \cdots + (\mu_n - \mu_{n-1}) isc_1'(0, a_{n-1}, t),] y, \tag{17}$$

условия плана

$$y(t_0) = y_0, \ y(a_1) = y_1, y(a_2) = y_2, \dots, y(T) = y_n \tag{18}$$

Пришло время отметить о том, что многие задачи физики, социалистической экономики, медицины, биологии, педагогики и т.д. дается уравнением (1). Мы предлагаем их исследовать сведением к усовершенствованным плановым задачам типа плановой популяции (17)- (18) с лимитами и без лимитов.

Приступим к решению задачи популяции (17)-(18).

Решение уравнения (17) имеет вид.

$$y = y_0 e^{\mu_1 (t - a_1) + (\mu_2 - \mu_1)(t - a_1) isc_1'(0, a_1, t) + \cdots + (\mu_n - \mu_{n-1})(t - a_{n-1}) isc_1'(0, a_{n-1}, t)}, \ t \in [\![t_0, T]\!] \tag{19}$$

Отсюда, согласно (18), имеем

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \frac{1}{a_1 - t_0} ln \frac{y_1}{y_0}, \quad t \in [\![t_0, a_1]\!] \\ &- - - - - - - - - - - - - - - - \\ &\mu_n = \frac{1}{T - a_{n-1}} ln \frac{y_n}{y_{n-1}}, \quad t \in [\![a_{n-1}, T]\!] \end{aligned} \tag{20}$$

Теперь, подставляя (20) в (19) имеем динамику биологической популяции в виде

$$y(t) = \begin{cases} y_0 \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{t - t_0}{a_1 - t_0}}, \ t_0 \le t \le a_1 \\ y_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{t - a_1}{a_2 - a_1}}, \ a_1 \le t \le a_2 \\ - - - - - - - - - - - \\ y_{n-1} \left(\frac{y_n}{y_{n-1}}\right)^{\frac{t - a_{n-1}}{T - a_{n-1}}}, a_{n-1} \le t \le T \end{cases} \tag{21}$$

Итак, мы имеем динамику численности популяции на отрезках в виде

$$\begin{aligned} &y_1(t, \mu_1) = y_0 \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{t - t_0}{a_1 - t_0}}, \quad t \in [\![t_0, a_1]\!] \\ &- \\ &y_n(t, \mu_n) = y_{n-1} \left(\frac{y_n}{y_{n-1}}\right)^{\frac{t - a_{n-1}}{T - a_{n-1}}}, \quad t \in [\![t_0, a_1]\!] \end{aligned} \tag{22}$$

Видно, что мы должны приложить определенные усилия так, чтобы получить хороший результат, на каждом отрезке времени, используя ресурсы разного характера.

Этим еще раз подтверждается актуальность, эффективность и надежность плановой ступенчатой популяции.

На отрезке $[\![t_0, T]\!]$ динамики плановой ступенчатой популяции имеет вид

$$y = y_0 \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{t-t_0}{a_1-t_0}} \cdot \left(\frac{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{a_2-a_1}}}{\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{\frac{1}{a_1-t_0}}} \right)^{(t-a_1) isc_1{}'(0,a_1,t)} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{\left(\frac{y_n}{y_{n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-a_{n-1}}}}{\frac{y_{n-1}}{y_{n-2}}} \right)^{(t-a_{n-1}) isc_1{}'(0,a_{n-1},t)}, \quad t \in [\![t_0, T]\!] \qquad (23)$$

Это есть построчная форма записи функции (21).

Вышеприведенная работа напоминает нам плановую экономику (работу) В.И.Ленина и И.В.Сталина. Но, к великому сожалению, в то время не была проведена работа по математическому обоснованию актуальности эффективности и надежности пятилетнего плана. Поэтому великая идея В.И.Ленина и И.В.Сталина продержалась с 1928 г. – до 1990 г. и засохла как дыня. Потому, что она родилась раньше времени, чем теория исправленных производных.

Анализ и оптимизация относительно лимитов будет рассмотрены в других статьях. *Продолжение следует*.

Литература:

1) Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений //Вестник ИГУ, №12, -Каракол, 2004.

2) Шарипов С., Шарипов К.С. Усовершенствование производных Ньютона – Лейбница и их применение //Вестник ИГУ, №7, -Каракол, 2006.

3) Мальтус Т. О росте народонаселения, 1798.