УДК 3383.00124

Торубаева У.С.

К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ИЙРИ СЫЗЫКТУУ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСЫ ЖАНА АЛАРДЫН ЭЛЕКТРОТЕХНИКАДА КОЛДОНУЛУШУ

Заряддалган электроддун электромагниттик талаасын эсептёёдё «потенциалдык бет», «кщчтщк сызыктардын» касиеттерин эске алуу керек. Эгерде электроддун каптал бетин «бирдей потенциалдык бет» катары кабыл алсак, анда андан чыккан «кщч сызыктары» бирдей потенциалдык бетке ортогоналдуу болот.

Математикада бир канча ийри сызыктуу координаталар системасы сунушталган. Ийри сызыктарга жаныма тщз сызыктары бири биринен 90^0 бурчка жайланышкан. Ал декарттык координата системасын тщзёт.

Электромагниттик талааны эсептёёдё ийри сызыктуу координаталар системасы декарттык координата системасына салыштырганда артыкчылыкка тёмёнкщ ээ.

а) эгер бирдей потенциалдык бет, кщчтщк сызык, ийри сызыктуу координатага дал келсе же жакындашса, эсептёё катасыз же каталык проценти аз болот;

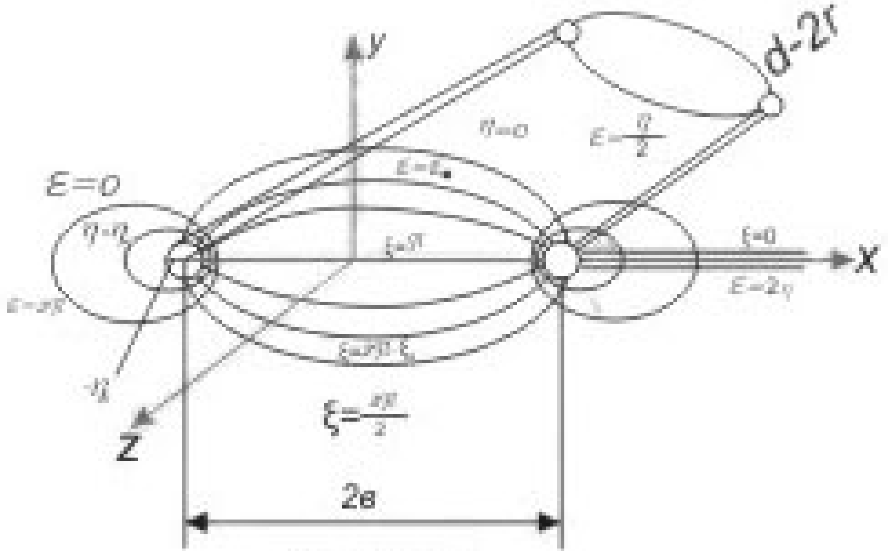
б) эсептёёдё математикалык моделдер, жёнёкёй, кыска болот;

в) декарттык координаталар системасында проекциялар аныкталып, мейкиндикте кёп пайдасыз боштуктар пайда болот;

г) декарттык координаталар системасында математикалык формулалар узун, татаал болуп, тактык тёмён.

Электродинамикада кёп пайдаланылуучу ийри сызыктуу координаталар системаларын жана алар пайдаланылган мисалдарын карап кёрёбщз.

Биополярдуу цилиндрлик координаталар системасы (1-сщрёт).



1-сщрёт

Декарттык жана биполярдык координаталар системасы тёмёнкщдёй байланышат:

$$x=\frac{в\ sh\eta}{ch\eta-cos\xi};\quad y=\frac{в\ sin\xi}{ch\eta-cos\xi};\quad Z=Z \tag{1}$$

Мында 2β - ёз ара уюлдун аралыгы. Ийри сызыктуу координаталар ξ, η, Z ёзгёрщшёт

$$0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi, \; -\infty < \eta < \infty, \; -\infty < Z < \infty,$$

Ламанын коэффициенти же болбосо, масштабдуу коэффиценттер барабар болушат.

$$h_\xi = h_\eta = \frac{b}{ch\eta - \cos\xi}, \quad h_z = 1$$

Электростатикалык талаанын векторунун проекциясы бирёё гана $E = E_\xi$, элктроддун каптал бети координатанын каптал бетине дал келет. *η-const*, ал эми координатанын каптал беттеринин координаталары *ξ=const* жана Z= *const* сызыктарына дал келет.

Элементардык кёлём жана анын сыйымдуулугу жазылат:

$$dx = h_\xi h_\eta h_z \, d\xi \, d\eta \, dz$$

$$dC_{dv} = \varepsilon_a \frac{d\xi \, dz}{d\eta} \qquad (2)$$

Бирдик узундуктагы октору бири бирине дал келбеген эки цилиндрдин электр сыйымдуулугун (2) формуланы ξ, η, Z ёзгёрщщ менен интегралдайбыз. Мында алар ёзгёрёт.

$$\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2 \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi \quad 0 \leqslant Z \leqslant 1$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\eta_2 - \eta_1} \qquad (3)$$

η_1, η_2 - координаталардын каптал бети цилиндрлердин каптал бетине дал келишет.

(3) формуланы пайдаланып, эки ёткёргщчтщщ чынжырдын электр сыйымдуулугун алабыз $\eta_2 = |\eta_1|$:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_a}{\eta_2} \qquad (4)$$

Ошондой эле бир зым менен жердин ортосундагы электр сыйымдуулукту алабыз:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\eta_2} \qquad (5)$$

Барабар чоъдуктарды пайдаланабыз:

$$sh\eta_2 = \frac{b}{r_2}; \; ch\eta_2 = \frac{a}{d_2}; \; b^2 = \left(\frac{a^2}{2}\right) - r_2^2; \; d_2 = 2r_2$$

$a \gg 2r_2$ эске алып,

$$a \approx 2b, \quad \eta_2 = Arsh\,\frac{b}{r_2} = \ln\left(\frac{b}{r_2} + \sqrt{\frac{b^2}{r_2^2} + 1}\right) \approx \ln\frac{a}{r_2} \qquad (6)$$

(6) барабардыкты (5) формулага коюп, сыйымдуулукту геометриялык ёлчёмдёр аркылуу алабыз.

$$C = \frac{\pi\varepsilon_a}{\ln\frac{a}{r_2}} \qquad (7)$$

(6) формула сыяктуу η_1 координатасын полюстардын аралыгы катары туюндуруп (3) формуласын геометриялык ёлчёмдёр аркылуу жазабыз:

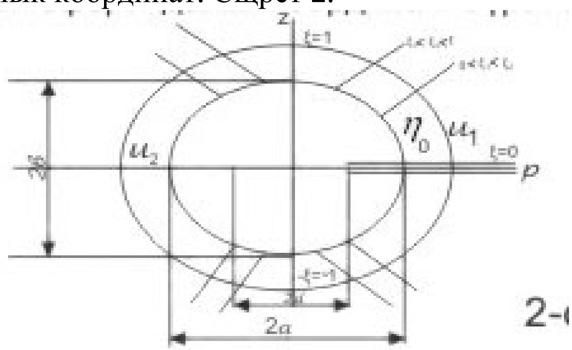
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\dfrac{(b+\ell_1)(b+\ell_2)}{r_1 r_2}} \qquad (8)$$

Мында $\ell_1 = \sqrt{b^2 + r_1^2}$; $\ell_2 = \sqrt{b^2 + r_2^2}$

Электр талаасынын чыъалышын аныктайбыз:

$$E=\frac{t}{2\pi\varepsilon_a h_\eta}$$ (9)

Мында $t=\frac{q}{e}$ заряддын сызыктуу тыгыздыгы.
Басылган сфероидалык координат. Сщрёт 2.



2-сщрёт

Ийри сызыктуу координаталар ξ,η,a ёзгёрёт.

$$0<\eta<\infty,\ -1\leq\xi\leq1,\ 0<a\leq2\pi$$

Масштабдуу коэффиценттери:

$$h_\eta=d\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\eta^2}},\quad h_\xi=d\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\xi^2}},\quad ha=d\sqrt{(1+\eta^2)(1-\xi^2)}$$

Бул системада каптал бет *η=const* конфокалдуу сфероиддин каптал бетин тщзёт, *ξ=const* - бир баракчалуу конфокалдык гипорболоиддин каптал бети.

Цилиндрлик координаттар *z,p* басырылган сфероидалык координаталары менен байланышат.

$$Z=d\,\xi\eta,\ p=d\sqrt{(1+\eta^2)(1-\xi^2)}$$

Элементардык «тщтщкчёнщн» сыйымдуулугу:

$$dc_{\eta\beta}=\frac{\varepsilon_a\,d\xi\,da}{\int_{\eta_1}^{\infty}\frac{h_1\,d_1}{h_1\,h_a}}=\frac{\varepsilon_a\,d\xi\,da}{\int_{\eta_1}^{\sqrt{\frac{R^2}{d^2}\xi^2-1}}\frac{d_\eta}{1+\eta_1}}=\frac{\varepsilon_a\,d\xi\,da}{arctg\sqrt{\frac{R^2}{d^2}\xi^2-1}-arctg\frac{\beta}{a}}$$ (10)

Мында η_0*-const,* дисканын каптал бети $\eta_1=\frac{\beta}{d}$

$\eta=\sqrt{\frac{R^2}{d^2}\xi^2-1}$ сферанын теъдемеси чоюлган учурда.

β – кичине жарым ок, эллипс формадагы баракчанын.

Системанын электр сыйымдуулугун (10) формуланын ёзгёргён координаттарын ξ,a $0\leq\xi\leq1,\ 0\leq a\leq2\pi$ интегралдоо боюнча табабыз:

$$C=4\pi\varepsilon_a d\int_0^1\frac{d\xi}{arctg\sqrt{\frac{R^2}{d^2}\cdot\xi^2-1}-arctg\frac{\beta}{a}}$$ (11)

Электр талаасынын чыъалышын жана потенциалдын функциясын аныктайбыз:

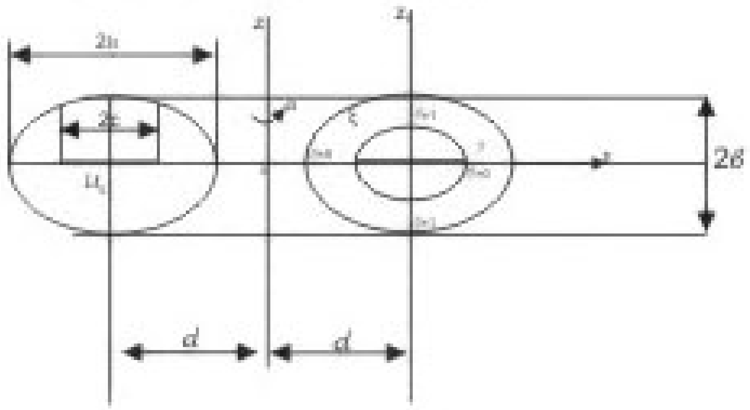
$$E_0=\frac{(\mathcal{U}_2-\mathcal{U}_1)dC_{тр}}{\varepsilon_a h_\xi h_\alpha d\xi\, d\alpha}=\frac{\mathcal{U}_2-\mathcal{U}_1}{d\sqrt{(\xi^2+\eta^2)(1+\eta^2)}\left(arctg\sqrt{\frac{R^2}{d^2}\xi^2-1}-arctg\frac{в}{d}\right)} \qquad (12)$$

$$\mathcal{U}_\eta=\mathcal{U}_2-\frac{(\mathcal{U}_2-\mathcal{U}_1)(arctg\,\eta_2-arctg\,\eta_0)}{arctg\sqrt{\frac{R^2}{d^2}\xi^2-1}-arctg\frac{в}{d}} \qquad (13)$$

(13) формула тёмёнкщ чек ара шарттарын канаттандырат

$$\mathcal{U}=\begin{cases}\mathcal{U}_2 & \text{качан } \eta=\eta_2=\frac{в}{d}\\ \mathcal{U}_1 & \text{качан } \eta=\sqrt{\frac{R^2}{d^2}\xi^2-1}\end{cases}$$

Чоюлган сфероидалдык координат системасы (3-сщрёт)



Сщрёт 3

Чоюлган эллипис координатасын OZ огунун айланасында OZ_1 огун d аралыгында айлантуу менен бул координаталар системасын алабыз.

Масштабдык коэффициенттер аныкталат:

$$h_\xi=c\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2+1}}, \quad h_\xi=c\sqrt{\frac{\xi^2+\eta^2}{1-\eta^2}}$$

$$h_\alpha=d\pm c\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}$$

Мында белги «-» ички биринчи (1) ал эми белги «+» экинчи (2) аймакка таандык.

Аймактардын чек арасы цилиндрлик бетти OZ_1 огун OZ огунун айласында айландыруудан пайда болот.

Бул координат системасында $\xi=0$ жана $\xi=|\xi_0|=const$ беттер тегерек шакектин каптал бетине дал келет, кесилиши эллипис.

Электр талаасынын шакекке салыштырмалуу симметриялуулугун эске алып, жогорку аймакты гана эсептейбиз $\xi>0$.

Электроддун ортосундагы элементардык кщчтщк тщтщкчёнщн электр сыйымдуулугу:

$$dc_{тр}=\frac{\varepsilon_a d\eta d\alpha}{\int_0^{\xi_0}\frac{h_\xi d\alpha}{h_\alpha h_\eta}}=\frac{\varepsilon_a d\eta d\alpha}{\sqrt{1+\eta^2}\int_0^{\xi_0}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+1}[d\pm c\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}]}}= \qquad (14)$$

$$
= \frac{-\mathcal{E}_a d_\eta d_a}{\sqrt{\frac{1-h^2}{d^2-c^2(1-\eta^2)}}\, \ell n \frac{\sqrt{d^2-c^2(1-\eta^2)}\,\xi_0 \pm c\sqrt{1-\eta^2}-d\sqrt{1+\xi_0^2}}{d \pm c\sqrt{(1-\eta^2)(1+\xi_0^2)}}}
$$

Эгерде электроддун ортосундагы потенциалдарды U_0 =const десек, анда чыъалыш векторунун проекциясы бир гана болот, $E=E_\xi$ да чыъалыш аныкталат

$$
E=U\frac{dc_{тр}}{\mathcal{E}_a h_a h_\eta\, da\, d\eta} = \frac{-U\sqrt{d^2-c^2(1-\eta^2)}}{c^2\sqrt{\xi^2+\eta^2}\left[d \pm c\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\right] \ell n \left| \frac{\sqrt{d^2-c^2(1-\eta^2)}\,\mathcal{E}_0 \mp c\sqrt{1-\eta^2}-d\sqrt{1+\xi_0^2}}{d \pm c\sqrt{(1-\eta^2)(1+\xi_0^2)}} \right|}
$$

Ийри сызыктуу координаталар системасынын кёптщгщн геометрияда белгилщщ парабола, гипербола, айлана, эллипс жана башка ийри сызыктардын биргелешкен катыштарынан алууга болот. Тщзщлгён координата системасы электродинамикада пайда болуучу «бирдей потенциалдык беттер», «кщчтщк сызыктар», электроддун геометриялык формаларына жараша болот. Андан Ламанын коэффициенттери чыгат.

Адабияттар:

1. Бухгольц Г. Расчет электротехнических магнитных полей. –М.: Изд-во Иностр. лит., 1961.
2. Шимони К. Теоретическая электротехника. –М.: Высшая школа, 1964.
3. Кузнецов Д.С. Специальные функции. –М.: Высшая школа, 1965.
4. Иоссель Ю.Я., и др. Расчет электрической емкости. –Л.: Энергоиздат, 1981.
5. Анго А. Математика для электротехники радиоинженеров. –М.: Наука, 1967.